MASTERARBEIT/MASTER THESIS

Kombinatorik in der Primarstufe

eingereicht von/submitted by

Stefanie Maria Hartl, BEd

zur Erlangung des akademischen Grades/in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Master of Education (MEd)

Krems, Mai 2025 / Krems, May 2025

Matrikelnummer/Student number:	41901162
Studienrichtung/Degree programme:	Lehramt im Bereich der Primarstufe
Betreuung/Supervisor:	Mag. Dr. Anita Summer, BEd

Kurzzusammenfassung

Die vorliegende Masterarbeit befasst sich mit der Kombinatorik in der Primarstufe. Untersucht wird, wie Schülerinnen und Schüler der vierten Schulstufe kombinatorische Aufgaben bearbeiten und welche Lösungsstrategien und Darstellungsformen sie dabei verwenden. Ziel ist es, die Ausgangslage vor der Implementierung der Kombinatorik in den neuen Lehrplan (2023) zu analysieren. Zur Beantwortung der Forschungsfragen wurde ein *Mixed-Methods Ansatz* gewählt. Mittels quantitativer Fragebögen und der qualitativen Methode des *Lauten Denkens* wurden die Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern aus vierten Schulstufen an sieben Schulen untersucht. Die Ergebnisse zeigen, dass Probandinnen und Probanden im Durchschnitt weniger als die Hälfte der gestellten Kombinatorikaufgaben lösen können. Hinsichtlich der Lösungsstrategien wird häufig intuitiv vorgegangen, wobei systematische Strategien zu einer höheren Lösungsrate führen. Die Wahl der Darstellungsform steht oft in Abhängigkeit zur jeweiligen Aufgabenstellung. Abschließend lässt sich die Relevanz der Kombinatorik für die Primarstufe sowie ihr Potential bestätigen.

Summary

This master's thesis focuses on combinatorics in primary education. It analyses how fourth grade students work on combinatorial problems and which solution strategies and representations they use. The aim is to analyse the situation before the introduction of combinatorics in the new curriculum (2023). A mixed method approach was chosen to answer the research questions. Quantitative questionnaires and the qualitative method of thinking aloud were used to analyse the skills of fourth grade students in seven schools. The results show that, on average, participants can solve less than half of the combinatorics problems. In terms of solution strategies, students often proceeded intuitively, although systematic strategies led to a higher success rate. The choice of visualisation often depends on the task. In conclusion, the relevance of combinatorics for primary school and its potential can be confirmed.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

1 Themenaufriss und Zielstellungen

Kinder haben oft die Vorstellung, dass Mathematik nur aus Rechnen besteht. In einem Großteil der Volksschulklassen wird auch dem Erlernen der Grundrechenarten die meiste Unterrichtszeit gewidmet. Die Mathematik ist jedoch eine Sprache der Logik, welche viel mehr als das formelle Anwenden von Regeln beinhaltet (Boesten, 2014, S. 4). Strukturiertes und systematisches Denken wird in der Primarstufe nicht nur durch die Erarbeitung der Zahlensysteme oder der Rechenoperationen aus dem Bereich der Arithmetik oder durch die Erkundung von Mustern in der Geometrie vermittelt, sondern auch durch Lerngelegenheiten, welche die Stochastik bietet (Eichhorn, 2024, S. 5).

Bis zur Lehrplanreform im Jahr 2023 war die Stochastik kein Inhalt des österreichischen Lehrplanes. Mit dem neuen Lehrplan, der ab dem Schuljahr 2023/2024 aufsteigend gilt, wird der Themenbereich erstmals in der dritten Schulstufe eingeführt. Als Teilbereich des Kompetenzbereiches der Daten und Zahlen sollen Schüler*innen Wahrscheinlichkeiten aus ihrer Lebenswelt qualitativ beschreiben und vergleichen sowie kombinatorische Abzählaufgaben darstellen und lösen (BMBWF, 2023, S. 75). „Einfache kombinatorische Abzählaufgaben (zB Wie viele zweigängige Menüs können aus 2 möglichen Vorspeisen und 3 möglichen Hauptspeisen zusammengestellt werden?), werden durch Probieren erkundet, zunehmend systematisch dargestellt und gelöst." (BMBWF, 2023, S. 74)

Vor der Gültigkeit des neuen Lehrplans kamen viele Schülerinnen und Schüler das erste Mal mit der Stochastik in der Oberstufe in Berührung. Die Inhalte aus dem Bereich der Daten, Wahrscheinlichkeiten und Häufigkeiten werden traditionell eher in der Sekundarstufe unterrichtet und lösen dort bei vielen Lernenden, aber auch bei Lehrenden, ein Unbehagen aus. Grund hierfür sind oftmals ein zu geringes Verständnis des Inhaltes sowie ein später Einstieg in die Thematik (Neubert, 2019c, S. 5). Die Kombinatorik sollte jedoch wie alle anderen mathematischen Inhalte im Sinne eines Spiralprinzips von Beginn an im Unterricht thematisiert werden, damit Schüler*innen Schritt für Schritt ihre Kompetenzen erweitern können (Baack, 2013, S. 4).

Zudem hat das Thema bereits für Kinder im Volksschulalter eine große Alltagsrelevanz. Zahlreiche Anwendungsbereiche der Kombinatorik sind Teil des Lebens von Kindern im Primarschulalter (Bettner & Dinges, 2018, S. 4; Ulm, 2010, S. 17). Die Fragen nach den Eissorten, die ausgewählt werden, oder nach dem Gewand, das angezogen wird, sind beide typische Fragestellungen der Kombinatorik, welche den Kindern in ihrem Alltag begegnen (Eichhorn, 2024, S. 5).

Bereits im Anfangsunterricht hat die Kombinatorik ein hohes Potential (Neubert, 2019a, S. 20), denn das Bestimmen von Anzahlen ist hier zentral. Dies bezieht sich zunächst auf die Zählfertigkeiten, die Mengenerfassungen oder die Rechenoperationen. Angestrebt werden hierzu Möglichkeiten, die Anzahlen nicht-zählend zu bestimmen (Herzog et al., 2017, S. 264). Auch kombinatorische Aufgaben bieten die Möglichkeiten, Strategien zum „Zählen ohne zu zählen“ (Selter & Spiegel, 2004, S. X) zu entwickeln.

Die Kombinatorik beschäftigt sich insbesondere mit dem Bestimmen von Anzahlen einer endlichen Menge, also mit dem Zählen (Tittmann, 2019, S. V). Neubert (2019d, S. 7) bezeichnet sie „als Kunst des geschickten Abzählens“. Für die Primarstufe ergeben sich hierbei zwei wesentliche Fragen zum Lösen von kombinatorischen Aufgaben: „Welche Möglichkeiten gibt es? Wie viele Möglichkeiten gibt es?“ (Neubert, 2019c, S. 7)

Die Behandlung der Kombinatorik im Grundschulalter bringt für die Schüler*innen viele Vorteile und Lernchancen (Schipper et al., 2021a, S. 258; Schipper, 2023, S. 280; Neubert, 2019a, S.22). Im Vordergrund steht der Lösungsprozess, bei welchem handelnd oder zeichnend verschiedene Möglichkeiten ausfindig gemacht werden (Eichhorn, 2024, S. 5). Die Lernenden sollen von einem anfänglich noch sehr unsystematischen Finden von Lösungen zu einem systematischen Vorgehen geführt werden, bei welchem sie alle Kombinationsmöglichkeiten finden können (Schipper, 2023, S. 281). Wesentlich ist, dass Schüler*innen der Primarstufe beim Lösen von kombinatorischen Aufgaben die Möglichkeit zum Handeln brauchen (Neubert, 2019b, S. 46) und noch nicht mit Formeln oder Fachausdrücken konfrontiert werden (Eichhorn, 2024, S. 5).

Das Lösen von Kombinatorikaufgaben hat eine eigenständige Bedeutung und zielt darauf ab, dass Schüler*innen eine Freude am selbstständigen Problemlösen sowie Kreativität und geistige Beweglichkeit entwickeln (Sill & Kurtzmann, 2019, S. 170). Viele Lehrkräfte der Primarstufe berichten über eine motivierende Wirkung der Kombinatorik im Unterricht sowie über ein vielfältiges und selbstständiges Finden von Lösungsstrategien (Breiter et al., 2009, S. 53). Zudem leisten kombinatorische Aufgaben einen wesentlichen Beitrag zur Entwicklung von allgemeinen mathematischen Kompetenzen (Neubert, 2019a, S. 22). Prozessbezogene[1] Kompetenzen werden beim Modellieren von Sachsituationen, beim Problemlösen, beim Kommunizieren, beim Argumentieren sowie beim Darstellen gefordert und gefördert (Eichhorn, 2024,

[1] Der Begriff „prozessbezogene“ Kompetenzen stammt aus Deutschland. In den österreichischen Bildungsstandards werden diese als „allgemeine“ Kompetenzen bezeichnet.

S. 5). Außerdem wird durch die Kombinatorik das Rechnen mit natürlichen Zahlen gesteigert sowie die Umwelterschließung unterstützt (Sill & Kurtzmann, 2019, S. 170). Die Kombinatorik gibt nicht nur die Möglichkeit über mathematische Zusammenhänge zu sprechen, sondern auch Problemlösungsansätze systematisch zu erarbeiten (Herzog et al., 2017, S. 264).

Kipman (2015, S. 58 f.) beschreibt in seiner Untersuchung zur Kombinatorik in der Grundschule, dass Schüler*innen, welche bei einfachen kombinatorischen Aufgaben Strategien entwickeln, auch schwierigere Beispiele mit einer höheren Wahrscheinlichkeit lösen können. Weiters untersucht er die Abhängigkeit von Strategien mit diversen Faktoren. So kann er aufzeigen, dass angewandte Lösungsstrategien nicht vom Geschlecht und nur wenig vom sozialen Hintergrund abhängig sind, jedoch von der Schulstufe.

Auch Herzog et al. (2017, S. 270 ff.) untersuchen das Lösen von Kombinatorikaufgaben von Schüler*innen der dritten Schulstufe. Hier zeigt sich, dass durchschnittlich nur ein Viertel der Aufgaben von den Lernenden gelöst werden kann. Zudem kommt die Untersuchung zum Ergebnis, dass die Schüler*innen passende Darstellungsformen sowie Makrostrategien brauchen, um kombinatorische Aufgaben lösen zu können. Es wird ersichtlich, dass die Kombinatorik in der Grundschule einen flexiblen Zugang braucht. Diese Ergebnisse betonen die Wichtigkeit der Thematisierung der Kombinatorik in der Primarstufe.

In Bezug auf diesen Hintergrund soll die vorliegende Arbeit die kombinatorischen Kompetenzen von Schüler*innen aufdecken. Untersucht wird, welche Kompetenzen Schüler*innen der vierten Schulstufe im Schuljahr 2024/2025 im Bereich der Kombinatorik aufweisen, obwohl diese laut Lehrplan noch nicht explizit gelehrt wird. Es soll analysiert werden, welche Aufgaben von Schüler*innen korrekt bearbeitet werden können, beziehungsweise welche Strategien und Darstellungsformen Lernende anwenden, um Aufgaben aus dem Kombinatorikbereich zu lösen. Hierfür werden den Schüler*innen Aufgaben unterschiedlicher kombinatorischer Typen gestellt, um zu untersuchen, ob die Lernenden für diese verschiedene Strategien und Darstellungen verwenden. Ziel der Arbeit ist aufzuzeigen, welche Kompetenzen Schüler*innen im Bereich der Kombinatorik bereits vor der Implementierung im Lehrplan haben und welche Strategien und Darstellungsformen zum Lösen von kombinatorischen Aufgaben angewendet werden.

Die zentralen Forschungsfragen lauten demnach: **Wie lösen Schülerinnen und Schüler der vierten Schulstufe kombinatorische Aufgaben? Welche Lösungsstrategien und Darstellungsformen treten bei Schülerinnen und Schüler der vierten Schulstufe beim Lösen von kombinatorischen Aufgabenstellungen auf?**

Um die Forschungsfragen umfassend beantworten zu können, wird mit einem *Mixed-Methods-Ansatz*, qualitativ sowie quantitativ, gearbeitet. Mittels quantitativen Testbögen, welche Aufgaben verschiedener kombinatorischer Typen enthalten, wird ermittelt, welche Beispiele von Schüler*innen der vierten Schulstufe gelöst werden können, welche Strategien diese am Testbogen angeben sowie wie diese ihren Lösungsweg darstellen. Weiterführend wird qualitativ mittels der Methode des *Lauten Denkens* untersucht, welche Denk- und Lösungsstrategien Lernende beim Lösen der Beispiele anwenden. Die gewonnenen Daten werden analysiert und mittels qualitativer Inhaltsanalyse in Kategorien ausgewertet und anschließend interpretiert.

Zur Einbettung der Forschung in einen theoretischen Rahmen wird in der vorliegenden Arbeit zunächst erläutert, wie sich die Kombinatorik in die Stochastik eingliedern lässt, was die Kombinatorik ist und welche Typen von kombinatorischen Problemen auftreten können. Zudem wird die Kombinatorik in der Primarstufe theoretisch beleuchtet. Nach der Analyse der Lehrpläne und der aktuellen Studienlage wird das Potential der Kombinatorik in der Grundschule näher erläutert. Zudem erfolgen methodisch-didaktische Überlegungen. Thematisiert werden die Arbeit mit Material, Differenzierungsmöglichkeiten sowie unterschiedliche Lösungsstrategien und Darstellungsformen. Um aufzuzeigen, wie sich kombinatorisches Können entwickeln kann, werden verschiedene Modelle miteinander verglichen, ehe auch auf Herausforderungen im Bereich der Kombinatorik in der Primarstufe eingegangen wird. In einem weiteren Kapitel wird erläutert, wie und welche mathematischen Teilgebiete durch die Kombinatorik gefördert werden. Hierfür wird auf die allgemeinen und inhaltlichen mathematischen Kompetenzen sowie auf die Förderung der Kombinatorik durch die Wahrscheinlichkeit eingegangen. Im Anschluss werden praktische Umsetzungsbeispiele aller kombinatorischer Problemtypen für die Primarstufe vorgestellt. Weiterführend wird die empirische Untersuchung - ihr Setting, ihre Forschungsmethoden, ihr Forschungsinstrument sowie die Methode der Auswertung und die Durchführung der Untersuchung - näher erläutert. In einem weiteren Kapitel werden die Forschungsergebnisse dargelegt. Zunächst erfolgt eine deskriptive Beschreibung, ehe die einzelnen Testaufgaben jeweils quantitativ und qualitativ ausgewertet werden und mit einer Interpretation der Ergebnisse abgeschlossen wird.

2 Kombinatorik

Im folgenden Kapitel werden für die Arbeit relevante Begriffe näher erläutert. Grundlegend beschäftigt sich dieses Kapitel mit der Kombinatorik. Zunächst wird die Einbettung dieser in die Stochastik thematisiert, ehe auf den Zusammenhang zwischen der Kombinatorik und der Stochastik näher eingegangen wird. Ziel des Kapitels ist es darzulegen, was die Kombinatorik, ein Teilgebiet der Mathematik, ist. Zudem wird ein Fokus auf die Typen von kombinatorischen Problemen gelegt, welche sich in das allgemeine Zählprinzip sowie in die kombinatorischen Figuren der Permutation, der Kombination und der Variation gliedern (Kipman, 2018, S. 129; Neubert, 2019b, S. 9 ff.). Abschließend wird auf die Bestimmung des Typs eingegangen.

2.1 Stochastik und Kombinatorik

Einige Autoren (Ulm, 2010, S. 2; Kortenkamp und Kunze, 2023, S. 4) verstehen die Kombinatorik als Teilgebiet der Stochastik. Aus diesem Grund wird anbei die Stochastik näher erläutert.

2.1.1 Stochastik

Im 17. Jahrhundert vertrieben sich französische Adelige ihre Zeit mit Glücksspielen und wollten dabei ihre Gewinnchancen ermitteln. Der Mathematiker Blaise Pascal (1623 – 1662) lebte zu dieser Zeit am Hof von König Ludwig XIV. Im Jahr 1654 wendet sich der Chevalier de Méré (Krüger, 2020, S. 55), welcher als Spieler bekannt war (Neubert, 2019c, S. 7), an Pascal und stellte ihm die Frage, was wahrscheinlicher ist:

- bei vier Würfen mit einem Würfel mindestens eine Sechs zu bekommen, oder
- bei 24 Würfen mit zwei Würfeln mindestens einmal eine Doppelsechs zu werfen?

Solche Fragen wurden zuvor noch nie einem Mathematiker gestellt. Daher gilt das Jahr 1654 als Geburtsjahr der Stochastik. Von diesem Zeitpunkt an, wurden rasch viele weitere berühmte Stochastikaufgaben gestellt (Krüger, 2020, S. 55).

Eine typische Problemstellung der Stochastik aus der heutigen Zeit wäre etwa die Annahme, dass größere Personen die Tendenz dazu haben, schwerer zu sein als kleinere Menschen. Die stochastische Fragestellung ist hierbei, wie sich ein Gleichklang der Körpergröße und des Körpergewichtes quantifizieren lässt (Büchter & Henn, 2007, S. 7).

Hafendorn (2011, S. 239) beschreibt, dass die Stochastik heute als Oberbegriff für die beschreibende sowie die beurteilende Statistik und für die Wahrscheinlichkeitstheorie dient. Auch Meermann (1998, S. 250) und Büchter und Hann (2007, S. 8) geben an, dass die Stochastik die Statistik und die Wahrscheinlichkeitsrechnung umfasst. Ulm (2010, S. 2) und Kortenkamp und

Kunze (2023, S. 4) beschreiben jedoch, dass sich die Inhalte der Stochastik in die Teilbereiche der Statistik, der Wahrscheinlichkeitsrechnung sowie auch der Kombinatorik gliedern. Sill und Kurtzmann (2019, S. 170) führen hierzu an, dass die Kombinatorik zum Teil in der Fachdidaktik (Ulm, 2010, S. 2; Kortenkamp und Kunze, 2023, S. 4) sowie in vielen deutschen Lehrplänen, Schulbüchern und Arbeitsheften als Teilgebiet der Stochastik eingegliedert wird, dies jedoch aus fachlicher sowie aus didaktischer Sicht nicht korrekt ist. Auch wenn sich hier die Meinungen unterscheiden, ist wesentlich, dass jene drei Teilbereiche – die Statistik, die Wahrscheinlichkeit und die Kombinatorik – eng miteinander verbunden sind und nicht strikt voneinander getrennt werden können (Kortenkamp & Kuze, 2023, S. 4).

2.1.2 Verknüpfung von Stochastik und Kombinatorik

Die Kombinatorik dient als Grundlage für die diskrete Wahrscheinlichkeitsrechnung. Diese wird als Quotient der Anzahl der günstigen durch die gesamt möglichen Fälle berechnet. Das Ermitteln von Möglichkeitsanzahlen ist die wesentliche Aufgabe der Kombinatorik (Mende, 2020, S. 1).

Die Anzahlbestimmung von Anordnungen oder die Auswahl von Elementen einer endlichen Menge, mit oder ohne Beachtung der Reihenfolge, sind wesentliche Probleme der Kombinatorik. Diese Teildisziplin der Mathematik ist zentral für die Wahrscheinlichkeitsrechnung, da der Eintritt eines gleichwahrscheinlichen Ereignisses P(A) mit folgender Formel berechnet werden kann (Schmidt, 2015, S. 48):

„$P(A) = \frac{\text{Anzahl der für A günstigen Ereignisse}}{\text{Anzahl möglicher Ereignisse}}$" (Schmidt, 2015, S. 48)

Hierfür muss jedoch die Anzahl solcher Ereignisse bestimmt werden (Schmidt, 2015, S. 48). Mit dieser Problematik beschäftigt sich die Kombinatorik.

2.2 Was ist die Kombinatorik?

In der Alltagssprache wird unter den Begriffen des Kombinierens, der Kombination oder der Kombinatorik zumeist eine Folgerung, ein logischer Gedanke oder ein Gedankenspiel, wie etwa beim Schach- oder Fußballspiel, verstanden. In der Fachsprache der Mathematik wird die Kombinatorik jedoch als eine Teildisziplin der Mathematik angesehen (Schipper et al., 2019b, S. 317), welche sich nur schwer von weiteren mathematischen Disziplinen, wie der Wahrscheinlichkeitsrechnung, abgrenzen lässt. Sie kann als Theorie von endlichen Mengen aufgefasst werden, da sie alle relevanten Fragestellungen zu endlichen Mengen beinhaltet.

Die Kombinatorik befasst sich mit der Problematik der Anordnung und Auswahl bestimmter Objekte aus unterschiedlichen Bereichen der Realität oder des Denkens (Neubert, 2019d, S. 7). Als Teilgebiet der diskreten Mathematik befasst sich die allgemeine Kombinatorik mit endlichen oder abzählbaren unendlichen mathematischen Strukturen (Sill & Kurtzmann, 2019, S. 169). Neubert (2019d, S. 7) bezeichnet die Kombinatorik „als Kunst des geschickten Abzählens“. Auch Berger (2023, S. 1) schreibt von der „mathematischen Theorie des intelligenten Zählens“. Für Tittmann (2019, S. V) beschäftigt sie sich ebenfalls mit der Anzahlbestimmung einer endlichen Menge, sprich mit dem Zählen. Herzog et al. (2017, S. 265) erwähnt, dass das schnelle und effektive Anzahlbestimmen wesentlich ist. Die Kombinatorik beschäftigt sich mit „der Anordnung von Elementen, der Auswahl von Elementen unter Berücksichtigung ihrer Anordnung sowie der Auswahl von Elementen ohne Berücksichtigung der Anordnung “ (Klunter et al., 2020a, S. 19). Laut Kipman (2018, S. 129) geht es darum, Strategien und Prinzipien der Heuristik anzuwenden und zu erlernen.

Neubert (2019d, S. 7) beschreibt zwei Aufgaben der mathematischen Zielstellung der Kombinatorik. Einerseits gilt es die Möglichkeiten zu ermitteln, Elemente einer endlichen Menge gemäß bestimmten Bedingungen anzuordnen oder zu wählen. Andererseits muss festgestellt werden, wie viele Möglichkeiten hierfür bestehen. Folgend ergeben sich aus diesen Zielstellungen zwei Fragen, welche für das Lösen von Kombinatorikaufgaben, auch in der Grundschule, wesentlich sind: „Welche Möglichkeiten gibt es? Wie viele Möglichkeiten gibt es?“ (Neubert, 2019d, S. 7) Um sicherzugehen, dass keine der Möglichkeiten übersehen oder mehrmals gezählt wird, müssen zuvor Regeln überlegt werden, anhand welcher jede Möglichkeit genau einmal gezählt werden kann. Für dieses System wird die Kombinatorik benötigt, denn ohne sie wäre ein Abzählen zeitaufwendig und unsicher (Berger, 2023, S. 1).

Typische Fragestellungen der Kombinatorik sind etwa die Frage nach der Anzahl der Möglichkeiten, die es gibt, Buchstaben anzuordnen oder die Ermittlung der Möglichkeiten beim Lotto-Spiel sechs aus 49 Zahlen anzukreuzen (Rolles & Bossek, 2005, S. 298). Die Kombinatorik verfolgt das Ziel, alle Anordnungsmöglichkeiten solcher Fragestellungen zu finden (Klunter & Raudies, 2010, S. 31)

2.3 Typen kombinatorischer Probleme

Die Bestimmung von Anzahlen – das Ziel der Kombinatorik – kann unterschiedlich erreicht werden. Der einfachste Weg ist jener des Abzählens. Grundsätzlich ist dieser für das Lösen aller Kombinatorikaufgaben möglich, für komplexere Aufgaben jedoch nicht realisierbar. Daher gibt es diverse Strategien und Berechnungsmöglichkeiten (Neubert, 2019c, S. 8). Zudem steht die Anzahl der Möglichkeiten in Abhängigkeit davon, ob beim Auswählen von Objekten beziehungsweise deren Anordnung ihre Reihenfolge wesentlich ist und ob gleiche Objekte mehrmals ausgewählt werden dürfen. Für diese diversen Fälle gibt es verschiedene Fachtermini (Schipper et al., 2019b, S. 317).

In der Kombinatorik wird zwischen dem allgemeinen Zählprinzip und speziellen Zählprinzipien unterschieden. Zu diesen gehören die Permutation, die Variation und die Kombination (Kipman, 2018, S. 129; Neubert, 2019b, S. 9 ff.). Für die speziellen Zählprinzipien, auch als kombinatorische Figuren bezeichnet, können Lösungsformeln verwendet werden, welche sich auf aufwendige Weise durch das allgemeine Zählprinzip herleiten lassen (Neubert, 2019c, S. 10).

2.3.1 Allgemeines Zählprinzip

„Das allgemeine Zählprinzip ist intuitiv verständlich und wird auch als Produktsatz der Kombinatorik bezeichnet.“ (Kipman, 2018, S. 130) Es umfasst die Produktregel. Oft wird es in Zusammenhang mit dem Baumdiagramm betrachtet. Der Vorgang bei diesem geschickten Zählprinzip ist in verschiedene Stufen gegliedert, wobei sich bei jeder Stufe die Frage stellt, wie viele Entscheidungsmöglichkeiten es gibt (Neubert, 2019c, S. 9).

Neubert (2019c, S. 9) beschreibt folgendes Beispiel: „Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, sich ein Menü aus Suppe, Hauptgericht und Dessert zusammenzustellen, wenn es im Angebot zwei Suppen, drei Hauptgerichte und zwei Desserts gibt?“

Zuerst wird eine Suppe gewählt. Für diese gibt es zwei Möglichkeiten ($n_1 = 2$). In einer zweiten Entscheidung muss sich für ein Hauptgericht entschieden werden, wofür drei Möglichkeiten zur Verfügung stehen ($n_2 = 3$). Die drei Hauptgerichte können je mit den zwei Suppen kombiniert werden, weshalb sich hierfür bereits sechs verschiedene Möglichkeiten für die Zusammenstellung ergeben. Bei der dritten und letzten Entscheidung muss eines der zwei Desserts gewählt werden ($n_3 = 2$). Damit ein vollständiges Menü zusammengestellt wird, können diese zwei Desserts nun mit den sechs Kombinationsmöglichkeiten aus Suppe und Hauptgericht zu einem Menü aus drei Gängen werden. Schließlich ergeben sich zwölf verschiedene Möglichkeiten (Neubert, 2019c, S. 9).

Rechnerisch kann die Anzahl der Möglichkeiten folgendermaßen ermittelt werden: $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ (Neubert, 2019c, S. 9).

Dieser Entscheidungsprozess kann auch in einem Baumdiagramm veranschaulicht werden:

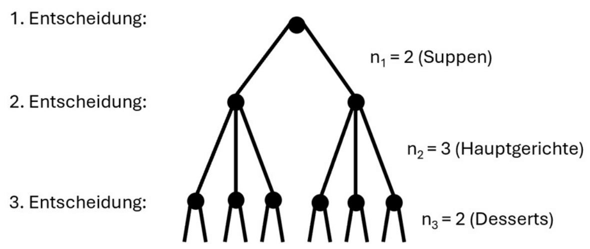


Abbildung 1: Baumdiagramm (in Anlehnung an Neubert, 2019c, S. 9)

Kipman (2018, S. 129) beschreibt ebenfalls eine Aufgabe zum allgemeinen Zählprinzip, bei welchem drei Preise an acht Langläufer vergeben werden. Ermittelt wird, wie viele Arten es gibt, die Preise zu verteilen. Für den ersten Platz gibt es acht Möglichkeiten, für den zweiten sieben und für den dritten sechs Möglichkeiten. Daraus lässt sich folgende Berechnung ableiten: $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ Möglichkeiten

Werden die in den Beispielen beschriebenen Vorgehen für eine beliebige Anzahl an Möglichkeiten verallgemeinert, ergibt sich das allgemeine Zählprinzip der Kombinatorik, welches auch Produktregel genannt wird:

> „Ein Lösungsversuch werde in m Entscheidungsstufen durchgeführt.
> Auf der ersten Stufe gebe es n_1 Möglichkeiten.
> Auf der zweiten Stufe gebe es n_2 Möglichkeiten.
> Auf der dritten Stufe gebe es n_3 Möglichkeiten.
> …
> Auf der m-ten Stufe gebe es n_m Möglichkeiten.
> Dann beträgt die Anzahl a der Möglichkeiten bei diesem Versuch insgesamt:
>
> $a = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots n_m$“ (Neubert, 2019c, S. 9)

Aufgaben, welche mit dem Allgemeinen Zählprinzip gelöst werden können, müssen bei der Erstellung der n-stufigen Sequenzen, die bei der Bildung der einzelnen Anordnungen entstehen, zwei unterschiedliche Fälle berücksichtigen. Entweder jedes n stammt aus einer anderen Menge, wie beim zuvor beschriebenen Beispiel (Suppe, Hauptspeise, Nachspeise), oder die Möglichkeiten der Belegung der Sequenzstellen sind gleich. Aufgaben aus dem zweiten Fall können der Permutation beziehungsweise der Variation zugeordnet werden (Neubert, 2019c, S. 10).

Grundsätzlich kann die Produktregel für alle kombinatorischen Aufgaben angewendet werden. Dies ist jedoch teilweise sehr zeitaufwendig. Daher gibt es Grundaufgaben der Kombinatorik beziehungsweise kombinatorische Figuren. Diese sind besondere Auswahlsituationen, die oft bei kombinatorischen Aufgaben und Fragen vorkommen (Neubert, 2019c, S. 10).

2.3.2 Permutation

Das Wort der Permutation leitet sich vom lateinischen Ausdruck *permutare* ab, welcher übersetzt vertauschen oder tauschen bedeutet (Schmidt, 2015, S. 50). Aus sprachlicher Sicht ist die Permutation also eine Vertauschung. Diese Bezeichnung wird auch ihrer inhaltlichen Bedeutung in Anordnungsproblemen der Kombinatorik gerecht (Sill & Kurtzmann, 2019, S. 171). Die Permutation wird als Veränderung der Anordnung einer Menge durch ein Vertauschen der Elemente aufgefasst (Schmidt, 2015, S. 50). Sie wird als Anordnung von Objekten verstanden (Tittmann, 2019, S. 2), wobei die Reihenfolge wesentlich ist (Mende, 2020, S. 2).

2.3.2.1 Permutation ohne Wiederholung

„Unter Permutation ohne Wiederholung versteht man alle möglichen Anordnungen einer n-elementigen Menge, ohne dass Elemente mehrfach vorkommen." (Neubert, 2019c, S. 10) Die Permutation ohne Wiederholung ermittelt alle möglichen Anordnungen einer n-elementigen Menge beziehungsweise die Anzahl dieser (Neubert, 2019c, S. 10). Die Permutation ohne Wiederholung erfasst somit alle möglichen Anordnungen, die sich ergeben, wenn jedes Objekt genau einmal vorhanden ist (Kütting & Sauer, 2011, S. 138). Hierfür sind die konkret vorliegenden Objekte, wie beispielweise Bücher, Farben oder Zahlen, unwesentlich (Tittmann, 2019, S. 2), die Reihenfolge ist jedoch entscheidend (Mende, 2020, S. 2).

Eine typische Fragestellung wäre hierbei, wie viele Möglichkeiten es gibt, n Personen in einer Reihe aufzustellen. Für zwei bis vier Personen ist es möglich, die Lösung explizit aufzuschreiben. Für eine größere Anzahl ist dies jedoch sehr aufwendig, weshalb eine Lösungsformel aus der Produktregel abgeleitet werden kann. Dazu wird sich an den zwei wesentlichen Fragen dieser orientiert, nämlich nach der Anzahl der Stufen, auf denen Entscheidungen getroffen werden müssen und nach der Anzahl der Möglichkeiten, sich auf jeder Stufe zu entscheiden. Da auch bei der Permutation ohne Wiederholung, beispielsweise bei der Anordnung von n Personen über jeden der n Plätze, bestimmt werden muss, müssen diese Entscheidungen auf n Stufen stattfinden. Bei der ersten Entscheidung stehen $n_1 = n$ Möglichkeiten zur Verfügung. Bei der zweiten Entscheidungsstufte gibt es $n_2 = n – 1$ Möglichkeiten, die übriggebliebenen $n – 1$ Personen anzuordnen. Auf der dritten Stufe gibt es $n_3 = n – 2$ Möglichkeiten. Dies kann so weitergeführt werden, bis es letztlich auf der n-ten Stufe $n_n = n – (n – 1)$ Möglichkeiten gibt, die letzte verbleibende Person anzuordnen (Neubert, 2019c, S. 10 f.).

Wird zum Beispiel ermittelt, wie viele Möglichkeiten es gibt, sieben unterschiedlich farbige Streifen nebeneinander aufzulegen, so gilt: $a = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$. Es gibt also 5040 Möglichkeiten, die sieben unterschiedlich farbigen Streifen nebeneinander anzuordnen (Neubert, 2019c, S. 11).

Hergeleitet von der Produktregel ist für die kombinatorische Figur der Permutation ohne Wiederholung gültig: $a = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ Hierbei wird folgendermaßen definiert: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n - 1) \cdot n = n!$ Gesprochen wird n! als *n-Fakultät* (Neubert, 2019c, S. 11). Mit der *n-Fakultät* kann die Gesamtanzahl der möglichen Anordnungen einer n-elementigen Menge ermittelt werden (Tittmann, 2019, S. 3).

Ein weiteres Anwendungsbeispiel ist die kombinatorische Fragestellung nach der Anzahl der Möglichkeiten, die es gibt, dass vier Mädchen und vier Jungen durch eine Drehtür gehen. Dies kann durch $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ berechnet werden (Kipman, 2018, S. 130).

Allgemein lässt sich für die Permutation ohne Wiederholung folgendes herleiten:

> „Für n verschiedene Elemente einer Menge gibt es n! verschiedene Möglichkeiten der Anordnung:
>
> $a = n!$“ (Neubert, 2019c, S. 11)

Die Permutation ohne Wiederholung hat für die Primarstufe eine besondere Bedeutung (Neubert, 2019c, S. 10).

2.3.2.2 Permutation mit Wiederholung

Die Grundaufgabe der Permutation mit Wiederholung verfolgt das Ziel, alle möglichen Reihenfolgen einer n-elementigen Menge mit Wiederholung zu ermitteln. Mit Wiederholung ist meint, dass ein Element mehrmals in der Anordnung vorkommen darf (Neubert, 2019c, S. 12). Es werden also alle möglichen Kombinationen ermittelt, welche sich ergeben, wenn jedes Objekt mehrmals verwendet werden kann (Kipman, 2018, S. 131).

Ein Beispiel für die Permutation mit Wiederholung wäre, dass drei rote sowie zwei schwarze Kugeln nebeneinander auf einer Schnur aufgefädelt werden sollen. Die kombinatorische Fragestellung ist, auf welche Art die Kugeln angeordnet werden können und wie viele Arten es gibt. Zunächst können alle möglichen Platzierungen aufgeschrieben und abgezählt werden. Jedoch gibt es einen effektiveren Lösungsweg für größere Anzahlen. Ausgehend von der Lösungsformel für die Permutation ohne Wiederholung, wird nun in diese eingearbeitet, dass Elemente innerhalb einer Reihenfolge mehrfach vorkommen können. Dazu wird eine mögliche Anordnung der Permutation mit Wiederholung hergenommen und alle roten Perlen werden mit r_1 bis r_3 durchnummeriert. Hierfür gibt es 6 = 3! verschiedene Möglichkeiten, dass beispielsweise eine schwarze Kugel an der ersten und der dritten Stelle angeordnet wird. Werden die drei roten Kugeln voneinander unterschieden, gibt es also 3!-mal mehr verschiedene Anordnungen als ohne eine Differenzierung der roten Kugeln. Werden auch die schwarzen Kugeln nummeriert, ergeben sich 2!-mal mehr Möglichkeiten wie ohne Unterscheidung. Wären also zusammengefasst alle fünf Kugeln unterschiedlich, gäbe es 5! mögliche Anordnungen. Dies wäre die Permutation ohne Wiederholung. Da jedoch drei beziehungsweise zwei Perlen die gleiche Farbe haben, ergibt sich: $a = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 10$ (Neubert, 2019c, S. 12).

Eine weitere Aufgabenstellung der Permutation mit Wiederholung ist die Fragestellung, wie viele verschiedene Wörter aus dem Wort *Ananas* gebildet werden können. Da der Buchstabe A dreimal vorkommt, der Buchstabe N zweimal und der Buchstabe S einmal, ergeben sich $\frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!}$ Möglichkeiten (Kipman, 2018, S. 131).

Tittmann (2019, S. 4) führt an, dass durch eine k-fache Wiederholung jedes Objekt k!-mal in einer Liste der Permutation zu finden ist. Somit ergibt sich für die Permutation mit Wiederholung:

„Befinden sich unter n Elementen einer Menge n_1 gleichartige Elemente einer ersten Teilmenge, n_2 gleichartige Elemente einer zweiten Teilmenge, … n_k Elemente einer k-ten Teilmenge, wobei $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ ist, so ist die Anzahl a dieser Permutation mit Wiederholung:

$a = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$" (Neubert, 2019c, S. 12)

2.3.3 Kombination

Bei Aufgaben der Kombination ist die Reihenfolge der Elemente nicht wichtig (Sill & Kurtzmann, 2019, S. 171; Mende, 2020, S. 1). Aus sprachlicher Sicht steht der Begriff der Kombination für eine Verknüpfung oder für ein Knüpfen von Beziehungen. Daher wird der Ausdruck oft auch allgemein für jegliche Arten von kombinatorischen Problemstellungen verwendet und nicht nur für eine bestimmte kombinatorische Figur (Sill & Kurtzmann, 2019, S. 171). In dieser Arbeit wird dennoch die Kombination in Anlehnung an Neubert (2019c) als ein eigenständiger Typ von kombinatorischen Problemen behandelt.

2.3.3.1 Kombination ohne Wiederholung

Neubert (2019c, S. 13) beschreibt, dass die Kombination ohne Wiederholung eine ungeordnete Stichprobe umfasst, bei welcher zurückgelegt und das Ziel verfolgt wird, die „Anzahl aller möglichen m-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge“ (Neubert, 2019c, S. 13) zu bestimmen. Die auszuwählenden Elemente haben eine geringere Anzahl als die gegebenen (Kipman, 2018, S. 133). Die Grundfrage lautet demnach, auf wie viele Arten m verschiedene Elemente aus n unterschiedlichen Elementen ausgewählt werden können. Die Reihenfolge spielt dabei keine Rolle (Mende, 2020, S. 4). Zudem können alle Elemente nur einmal vorkommen (Kipman, 2018, S. 133). Typische Aufgaben sind Lotto-Beispiele (Mende, 2020, S. 4).

Das Herleiten der Formel für die Anzahlbestimmung bei Aufgaben aus dem Bereich der Kombination ohne Wiederholung ist laut Neubert (2019c, S. 13) etwas aufwendiger, weshalb in dieser Arbeit auf diese nicht näher eingegangen wird. Die Formel lautet wie folgend:

„$a = \binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!}$“ (Neubert, 2019c, S.13)

$\binom{n}{m}$ wird als *n über m* gesprochen und als sogenannter Binomialkoeffizient bezeichnet (Tittmann, 2019, S. 9), wobei $m \leq n$ gültig ist (Neubert, 2019c, S. 13).

Als Beispiel für die Kombination ohne Wiederholung kann jene Aufgabe dienen, bei welcher eine Urne fünf Kugeln in verschiedenen Farben enthält. Die Frage ist, wie viele Arten es gibt, zwei Kugeln auf einmal und ohne Zurücklegen zu entnehmen. Zunächst werden die Möglichkeiten inhaltlich überlegt und notiert. Hierfür können die Farben Buchstaben von A bis E bekommen. Werden alle möglichen Kombinationen notiert, ergeben sich zehn Möglichkeiten. Dies kann auch mit der Lösungsformel für die Kombination ohne Wiederholung ermittelt werden. Werden die Zahlen eingesetzt, ist diese wie folgt anzuwenden: $a = \binom{5}{2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 10$ (Neubert, 2019c, S. 13)

Kipman (2018, S. 132) führt als Beispiel an, dass es vier verschiedene Sorten Eis zur Auswahl gibt, wovon zwei Sorten ausgesucht werden dürfen. Wird ermittelt, wie viele Möglichkeiten es gibt, ist dies mit $\frac{4!}{2! \cdot 2!}$ möglich.

2.3.3.2 Kombination mit Wiederholung

Die Kombination mit Wiederholung ist eine kombinatorische Aufgabe, bei welcher, wie bei der Kombination ohne Wiederholung, eine ungeordnete Stichprobe zu Grunde liegt, jedoch mit der Möglichkeit des Zurücklegens. Ziel ist die Anzahlbestimmung aller möglichen Anordnungen von m Elementen, welche mit den Elementen einer Menge n möglich sind. In der m-elementigen Anordnung dürfen Elemente mehrmals vorkommen. Wie diese angeordnet werden, spielt aber keine Rolle (Neubert, 2019c, S. 13). Auch Mende (2020, S. 5) beschreibt, dass die Reihenfolge keine Rolle spielt und dass Elemente mehrfach gewählt werden dürfen. Wesentlich ist, dass die Anzahl der Elemente, welche ausgewählt werden müssen, kleiner ist als jene, die gegeben sind (Kipman, 2018, S. 133).

Neubert (2019c, S. 14) führt folgendes Beispiel an: „Wie viele Steine enthält ein Dominospiel, bei dem es die *Zahlbilder* von 0 bis 6 gibt?“ Wird die Aufgabe auf ihren mathematischen Inhalt untersucht, zeigt sich, dass alle möglichen Paare aus den Ziffern null bis sechs zu bilden sind. Wesentlich ist, dass die Ziffern auch doppelt vorkommen können und dass die Anordnung, die Reihenfolge, dieser nicht entscheidend ist (Neubert, 2019c, S. 14). Eine Auswahl, bei welcher die Anordnung nicht berücksichtigt wird, ist eine typische Aufgabe der Kombination (Tittmann, 2019, S. 12). Konkret bedeutet dies, dass immer zwei aus sieben möglichen Ziffern gewählt werden. Wird die Aufgabe zunächst inhaltlich gelöst, können alle möglichen Paare systematisch notiert werden. Hierbei zeigt sich, dass es sieben Dominosteine gibt, bei denen die Ziffer null an mindestens einer Stelle steht, sechs neu dazugekommene Paare mit der Ziffer eins und so weiter. Die Anzahl der Möglichkeiten lässt sich in diesem Beispiel mit $m = 2$ für die auszuwählenden Elemente und $n = 7$ für die Auswahl der möglichen Elemente mit der Addition $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$ ermitteln (Neubert, 2019c, S. 14).

Laut Neubert (2019c, S. 14) ist diese Rechnung für größere n jedoch nicht mehr realisierbar, weshalb es ebenfalls eine Formel zur Berechnung der Kombination mit Wiederholung gibt:

„$a = \binom{n + m - 1}{m}$" (Neubert, 2019c, S. 14)

Für das zuvor beschriebene Beispiel muss die Anwendung der Formel folgendermaßen aussehen:

„$a = \binom{7 + 2 - 1}{2} = \binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28$" (Neubert, 2019c, S. 14)

2.3.4 Variation

Eine Variation wird in der Umgangssprache oft als eine Abweichung oder als eine Veränderung betrachtet. Diese Interpretationen stehen jedoch in keinem Zusammenhang mit der Variation im Bereich der Kombinatorik (Sill & Kurtzmann, 2019, S. 171). Bei der kombinatorischen Figur der Variation ist die Reihenfolge der Anordnung von Elementen wesentlich. Daher handelt es sich stets um ungeordnete Stichproben (Mende, 2020, S. 1).

2.3.4.1 Variation ohne Wiederholung

Ziel der Variation ohne Wiederholung ist die Anzahlbestimmung „aller möglichen m-elementigen Anordnungen ohne Wiederholungen aus einer n-elementigen Menge“ (Neubert, 2019c, S. 15). Die Reihenfolge der Elemente ist hierbei zu unterscheiden (Mende, 2020, S. 2). Wesentlich ist, dass weniger Objekte ausgewählt werden, als es gesamt gibt. Dies wird auch als $k < n$ bezeichnet (Kipman, 2018, S. 131).

Als Beispiel führt Neubert (2019c, S. 15) ein Beispiel an, bei welcher die Anzahl der Möglichkeiten ermittelt werden muss, zwei verschiedene Preise an sechs Kinder zu verteilen, so dass jedes Kind maximal einen Preis bekommt. Diese Aufgabe kann zunächst mit der Produktregel gelöst werden. Bei der ersten Stufe der Entscheidung gibt es $n_1 = 6$ Möglichkeiten, um den ersten Preis zu vergeben. Für den zweiten Preis gibt es $n_2 = 5$ Möglichkeiten. Aufgrund dessen, dass nur zwei Plätze vergeben werden, ist der Entscheidungsprozess hiermit abgeschlossen und für die Berechnung mit der Produktregel ist gültig: $a = n_1 \cdot n_2 = 6 \cdot 5 = 30$

Allgemein betrachtet kann eine m-elementige Anordnung aus einer n-elementigen Menge, welche ohne Wiederholung erfolgt, über einen m-stufigen Entscheidungsprozess ermittelt werden. Während es auf der ersten Stufe n Entscheidungsmöglichkeiten gibt, nehmen diese auf jeder weiteren Stufe um eine Anzahlmöglichkeiten ab. Auf der letzten, der m-ten Stufe, gibt es somit $n – m + 1$ Möglichkeiten sich zu entscheiden (Neubert, 2019c, S. 15).

„Nach der Produktregel ergibt sich für die Anzahlbestimmung einer Variation ohne Wiederholung:

$a = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots \cdot (n-m+2) \cdot (n-m+1)$ mit $m \leq n$

$a = \frac{n!}{(n-m)!}$ “ (Neubert, 2019c, S. 15)

Wird diese Formel beim beschriebenen Beispiel angewendet, so ist gültig, dass $m = 2$ und $n = 6$ ist: „$a = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 6 \cdot 5 = 30$" (Neubert, 2019c, S. 15 f.)

Ein weiteres Anwendungsbeispiel der Variation ohne Wiederholung ist die Frage, wie viele Möglichkeiten es gibt, ein rotes sowie ein schwarzes Auto auf vier Parkplätzen einzuparken. Bei dieser Aufgabe ist die Anzahl k, die Autos, kleiner als die Anzahl n, die Parkplätze. Somit ergeben sich $\frac{4!}{(4-2)!} = 12$ Möglichkeiten (Kipman, 2018, S. 131).

Wesentlich ist, dass es einen Sonderfall der Variation ohne Wiederholung gibt – die Permutation. Als Unterschied zur Permutation kann sich verzeichnen lassen, dass bei der Permutation immer alle Elemente angeordnet werden, während bei der Variation $k \leq n$ Elemente zur Auswahl stehen und dabei die Reihenfolge beachtet wird. Die gezogenen Elemente werden bei der Variation ohne Wiederholung jedoch nicht zurückgelegt (Mende, 2020, S. 2 f.).

2.3.4.2 Variation mit Wiederholung

„Bei der Variation mit Wiederholung besteht das Ziel in der Bestimmung der Anzahl aller möglichen m-elementigen Anordnungen mit Wiederholungen aus einer n-elementigen Menge“ (Neubert, 2019c, S. 16). Bei einer Variation mit Wiederholung kann jedes Element willkürlich oft vorkommen. Von Interesse ist immer die Reihenfolge der Elemente. So sind etwa zwei geordneten Auswahlen, wie (a, a, b) und (a, b, a), zwei verschiedene Objekte (Tittmann, 2019, S. 7). Es spielt also eine wesentliche Rolle, wie die Objekte angeordnet werden (Neubert, 2019c, S. 16). Mende (2020, S. 4) beschreibt die Grundfrage der Variation mit Wiederholung als jene Frage nach der Anzahl der Anordnungen von k-Elementen, welche sich aus n-unterschiedlichen Elementen zusammenstellen lassen. Hierbei werden die bereits ausgewählten Elemente wieder zurückgelegt, sodass Elemente mehrfach verwendet werden und die Reihenfolge wichtig wird.

Anwendung findet die Variation mit Wiederholung etwa in einem Aufgabenbeispiel, in dem ermittelt werden soll, auf wie viele unterschiedliche Arten drei Kästchen, die nebeneinander liegen, in roter und grüner Farbe ausgemalt werden können. Die Aufgabe kann wieder zunächst inhaltlich gelöst werden, indem eine Notation aller möglicher Anordnungen erfolgt. Das Beispiel ist ein dreistufiger Entscheidungsprozess, wobei auf jeder Stufe zwischen zwei Farben entschieden werden muss. Daraus ergibt sich $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Möglichkeiten (Neubert, 2019c, S. 16).

Zum Finden einer allgemeinen Formel wird wieder die Produktregel herangezogen. Für die Anzahlbestimmung einer m-elementigen Reihenfolge finden m-stufige Entscheidungen statt. Dabei gibt es auf jeder Stufe n Möglichkeiten der Entscheidung. Daher folgt für das Bestimmen der Anzahl: $a = n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n$. Die Anzahl der Faktoren entspricht dabei m. Daher ergibt sich die Formel $a = n^m$ (Neubert, 2019c, S. 16).

> „Für die Anzahl a der m-elementigen Anordnungen mit Wiederholungen aus einer n-elementigen Menge gilt:
>
> $a = n^m$“ (Neubert, 2019c, S. 16)

Wird diese Formel auf das Ausgangsbeispiel angewendet, ergibt sich für $m = 3$ und $n = 2$ folgende Berechnung: $a = 2^3 = 8$ (Neubert, 2019c, S. 16).

2.3.5 Bestimmung des Aufgabentyps

Zusammenfassend ist bei der Kombination die Anzahl jener Elemente, die gewählt werden, kleiner als die Gesamtzahl der Elemente. Bei der Kombination ist die Reihenfolge nicht wichtig. Das heißt (a,b) = (b,a). Auch bei der Variation sind die auszuwählenden Elemente weniger als die gegebenen. Als Unterschied zur Kombination ist bei der Variation jedoch die Reihenfolge relevant. Das bedeutet, dass (a,b) ≠ (b,a) ist. Bei der Permutation ist die Gesamtanzahl aller möglichen Elemente ident mit der Anzahl der gewählten Elemente (Kipman, 2018, S. 133 f.).

Mit den Bezeichnungen der kombinatorischen Figuren sind einerseits sprachliche Probleme verbunden (Sill & Kurtzmann, 2019, S. 171), andererseits können auch viele Anwendungsbeispiele nicht eindeutig oder nur schwierig einer Grundaufgabe zugeordnet werden (Neubert, 2019c, S. 10). Daher kann es beim Finden des richtigen Aufgabentyps zu Schwierigkeiten kommen. Beim Bestimmen des Typs einer kombinatorischen Aufgabe können folgende Fragen helfen:

- Findet eine Auswahl der Objekte statt oder werden alle Objekte angewandt und nur die Anordnung ist wichtig?
- Ist die Elementanordnung wesentlich?
- Besteht die Möglichkeit, dass die Elemente mehrfach auftreten? Ist dies der Fall, ist die Aufgabe eine mit Wiederholung (Neubert, 2019c, S. 17 f.).

Die Abbildung anbei veranschaulicht einen Erkennungsalgorithmus, welcher beim Bestimmen des Aufgabentyps helfen kann.

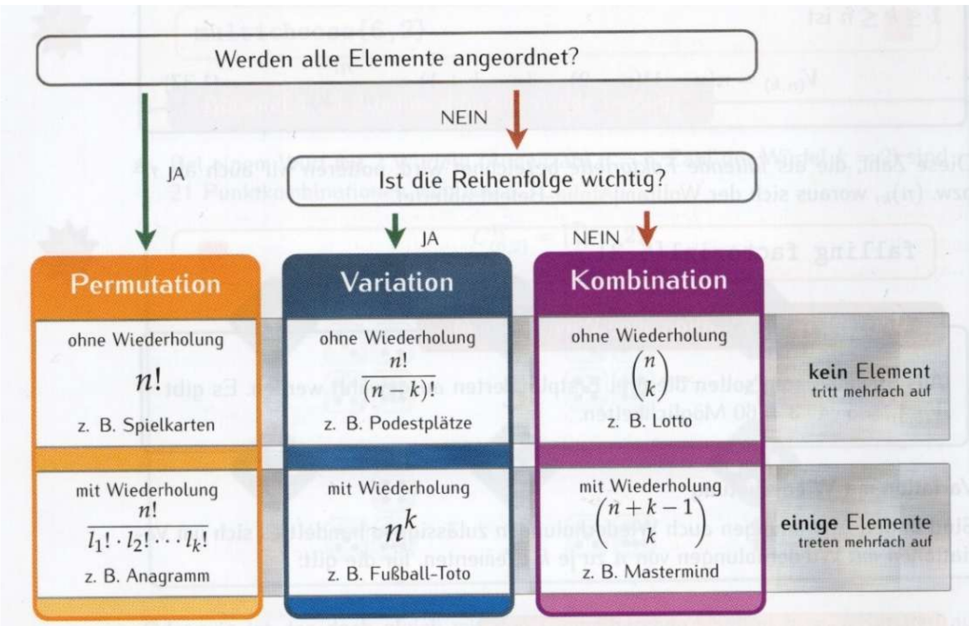


Abbildung 2: Kombinatorische Abzählverfahren (Schmidt, 2015, S. 56)

2.4 Resümee

Ziel des Kapitels *Kombinatorik* ist es, für die Arbeit relevante Begriffe zu erläutern sowie darzulegen, was die Kombinatorik ist. Die Kombinatorik wird von diversen Autoren als Teilgebiet der Stochastik, zu welcher auch die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Statistik zählen, angesehen. Auch wenn andere Autoren diese nicht als Teilbereich der Stochastik anerkennen, steht fest, dass die Teilbereiche eng mit der Kombinatorik verknüpft sind und nicht voneinander getrennt werden können. Die Kombinatorik ist Grundlage für die diskrete Wahrscheinlichkeitsrechnung, da diese als Quotient der Anzahl der günstigen Fälle durch die Anzahl der möglichen Fälle ermittelt wird. Um die Anzahl der Fälle berechnen zu können, wird die Kombinatorik benötigt. Die Kombinatorik als Theorie endlicher Mengen beschäftigt sich mit der Auswahl und Anordnung von bestimmten Objekten, mit der Bestimmung von Anzahlen einer endlichen Menge. Konkret verfolgt sie zwei wesentliche Ziele – die Ermittlung der Möglichkeiten sowie die Bestimmung der Anzahl der Möglichkeiten. Die Kombinatorik bietet ein System, die Möglichkeiten geschickt abzuzählen. Da ein konkretes Zählen bei größeren Zahlen nicht realisierbar ist, gibt es diverse Berechnungsmöglichkeiten. Grundsätzlich wird in der Kombinatorik zwischen dem allgemeinen Zählprinzip und den speziellen Zählprinzipien unterschieden. Das allgemeine Zählprinzip impliziert die Produktregel und umfasst verschiedenen Stufen, wobei auf jeder Stufe betrachtet wird, wie viele Entscheidungsmöglichkeiten es auf dieser gibt. Grundsätzlich kann dieser Vorgang bei allen kombinatorischen Aufgaben angewendet werden, was jedoch bei vielen Aufgaben sehr zeitaufwendig werden kann. Deshalb lassen sich spezielle Zählprinzipien – die Permutation, die Kombination und die Variation – ableiten. Bei der Permutation entspricht die Gesamtzahl der möglichen Elemente genau der Anzahl der ausgewählten Elemente, während bei der Kombination die ausgewählten Elemente kleiner sind als jene der Gesamtanzahl. Zudem ist bei der Kombination die Reihenfolge der Elemente wesentlich. Bei der Variation ist ebenfalls die Anzahl der ausgewählten Elemente geringer als die Gesamtzahl, die Reihenfolge der Elemente ist jedoch irrelevant. Bei allen drei kombinatorischen Figuren wird weiters unterschieden, ob diese mit oder ohne Wiederholung zur Anwendung kommen. Bei einem speziellen Zählprinzip mit Wiederholung treten Elemente mehrfach auf, ohne Wiederholung nur einmalig. Die speziellen Zählprinzipien bringen einerseits sprachliche Probleme mit sich, andererseits können Aufgaben oft nur schwer einem Prinzip zugeordnet werden. Nach der Zusammenfassung der wesentlichen theoretischen Grundlagen der Kombinatorik wird im folgenden Kapitel der Fokus auf die Kombinatorik in der Primarstufe gelegt.

3 Kombinatorik in der Primarstufe

In diesem Kapitel wird die Kombinatorik in der Primarstufe thematisiert. Zunächst wird dazu auf den österreichischen Lehrplan der Volksschule eingegangen, ehe die Forschungslage zur Kombinatorik in der Grundschule näher erläutert wird. Des Weiteren wird das Potential der Kombinatorik für Kinder im Primarschulalter thematisiert. Zudem werden methodisch-didaktische Überlegungen angestellt und die Entwicklung kombinatorischen Könnens wird anhand verschiedener Modelle vorgestellt. Letztlich werden auch Herausforderungen thematisiert.

3.1 Lehrplan

Mit Beginn des Schuljahres 2023/2024 trat in Österreich der neue Lehrplan 2023 für die Volkschule in Kraft, welcher mit der ersten Klasse und Vorschulstufe beginnend nach oben aufsteigt. Bis die neuen Lehrpläne in allen weiteren Schulstufen wirksam werden, sind noch die alten Lehrpläne gültig (BMBWF, o. J.). Daher werden anbei die Inhalte beider Lehrpläne in Bezug auf die Kombinatorik in der Primarstufe näher erläutert.

3.1.1 Lehrplan der Volksschule 1986

Im alten Lehrplan der Volksschule, welcher noch auslaufend gültig ist, ist die Kombinatorik kein vorgesehenes Themengebiet (Wolf, 2018). Die Kombinatorik wurde in der Primarstufe bisher noch nicht thematisiert.

3.1.2 Lehrplan der Volksschule 2023

Im neuen Lehrplan der Vorschule wird in der Bildungs- und Lehraufgabe des Unterrichtsgegenstands der mathematischen Früherziehung angeführt, dass die Schüler*innen an kombinatorische Denkweisen herangeführt werden sollen (BMBWF, 2023, S. 28).

In der ersten und zweiten Schulstufe wird die Kombinatorik im neuen österreichischen Lehrplan nicht erwähnt. Für die dritte Schulstufe sieht dieser im Kompetenzbereich Zahlen und Daten vor, dass die Schülerinnen und Schüler „einfache kombinatorische Abzählaufgaben darstellen und lösen“ können (BMBWF, 2023, S. 75). „Einfache kombinatorische Abzählaufgaben (zB Wie viele zweigängige Menüs können aus 2 möglichen Vorspeisen und 3 möglichen Hauptspeisen zusammengestellt werden?), werden durch Probieren erkundet, zunehmend systematisch dargestellt und gelöst“ (BMBWF, 2023, S. 74).

3.2 Forschungen in der Primarstufe

Im folgenden Kapitel werden Forschungen aus dem Bereich der Kombinatorik in der Primarstufe näher erläutert.

3.2.1 Kombinatorik in der (Grund) Schule (Kipman, 2015)

Kipman (2015, S. 58 ff.) beschreibt eine Studie, in welcher anhand von drei unterschiedlichen Aufgabentypen zur Kombinatorik, die Problemlösefähigkeiten in Abhängigkeit von der Schulstufe, dem sozialen Hintergrund, dem Geschlecht sowie dem Interesse und den Fähigkeiten in Mathematik untersucht werden. Die Untersuchungen zielen darauf ab, aufzuzeigen, welche Strategien Schüler*innen in den unterschiedlichen Schulstufen beim Lösen von Kombinatorikaufgaben anwenden und ab welchem Alter es gelingt, Transferleistungen zu erbringen sowie korrekte Lösungen für bestimmte Typen von Aufgaben zu finden. Zudem wird auch analysiert, welche angewendeten Strategien zu einer Lösung führen. Gewählt werden Aufgabenstellungen zu den Themenbereichen des Kombinierens, der Variation und der Permutation. Die drei verschiedenen Typen bedürfen unterschiedlicher logischer Voraussetzungen, damit sie gelöst werden können. In einigen Fällen müssen auch Transferleistungen erbracht werden. Weiters werden Hintergrundvariablen der Schüler*innen erhoben. Erfragt werden das Geschlecht, die Schulstufe und der soziale Hintergrund, welcher über die Anzahl der Bücher im Haushalt erfasst wird. Zusätzlich werden die mathematischen Fähigkeiten und das mathematische Interesse anhand eines fünfstufigen Lehrerurteils sowie die Freude an Mathematik durch die Selbsteinschätzung der Lernenden erhoben. Insgesamt nehmen an der Studie 654 Schüler*innen zwischen fünf und 17 Jahren, von der Vorschule bis zur zwölften Schulstufe, teil. Diese werden in Einzelsettings und mit verschiedenen Materialien – mit Eis, Autos, Parkplätzen und Plastiktieren – spielerisch untersucht (Kipman, 2015, S. 60 ff.).

Die Ergebnisse zeigen, dass Schüler*innen, die unstrukturiert und unsystematisch vorgehen, an komplexeren Aufgaben scheitern, während Lernende, die bereits bei einfacheren Aufgaben Strategien entwickeln, schwierigere Aufgaben wahrscheinlicher lösen können. Gewisse Strategien, wie das Schieben oder Teilen der Materialien, helfen den Schüler*inne bei wenigen Möglichkeiten, bei komplexeren Aufgaben jedoch nicht mehr. Weiters zeigen die Ergebnisse, dass die Strategien nicht vom Geschlecht und kaum vom sozialen Hintergrund abhängen. Ein wichtiger Einflussfaktor ist jedoch die Schulstufe. Je älter die Schüler*innen sind, desto bessere Strategien werden verwendet und umso öfter können Transferleistungen erbracht werden. Auffällig ist auch, dass oft einfache Lösungswege nicht gesehen werden oder bereits Bekanntes bei weiterführenden Aufgaben wieder umgestellt wird.

Die Ergebnisse dieser Studie werden von Kipman (2018, S. 65 ff.) auch mit jenen einer Papier-Bleistift-Testung mit 617 beteiligten Schüler*innen verglichen. Hierbei zeigt sich, dass die Lösungshäufigkeit bei jener Studie, bei der Materialien verwendet wurden, fast neunmal höher ist als bei der Papier-Bleistift-Testung. Dies belegt, dass das Lösen von Aufgaben im Bereich der Kombinatorik mit Materialien zu einer deutlich höheren Lösungsrate führt. Beim Problemlösen ist wesentlich, anschaulich und mit einfachen Beispielen zu arbeiten, damit Lernende Strategien für komplexere Aufgaben entwickeln können. Materialien bieten die Möglichkeit, den Schüler*innen Strategien zu zeigen, gemeinsam zu reflektieren und die Problemlösekompetenz auf einer haptischen und spielerischen Basis zu erweitern.

3.2.2 Einflussfaktoren auf die Leistungen in Kombinatorik (Kipman, 2018)

Kipman (2018, S. 139 ff.) beschreibt auch eine Untersuchung, in welcher die Einflussfaktoren auf die Leistungen in der Kombinatorik untersucht werden. Erforscht wurden der Einfluss der Klassenstufe verglichen mit dem Alter der Lernenden und der Unterschied zwischen der Primarstufe und der Sekundarstufe. Es erfolgte eine spezielle Untersuchung, welche Auswirkungen die Persönlichkeitsmerkmale, das Alter, das Geschlecht und die Schulstufe auf die Leistungen in der Kombinatorik haben. Insgesamt wurde die Studie mit 704 Schüler*innen der Primarstufe sowie 198 Schüler*innen der Sekundarstufe eins aus Österreich, Deutschland und Ungarn durchgeführt. Erhobene Daten beziehen sich auf die Leistungen im Kombinatorikbereich, die Fähigkeiten in der Mathematik, den sozialen Hintergrund, das Interesse an der Mathematik, die Schulstufe, das Geschlecht, die Mathematiknote, das Alter sowie auf kognitive Fähigkeiten. Zur Erhebung der Kombinatorikfähigkeiten wurden Aufgaben aus den Bereichen des allgemeinen Zählprinzips, der Permutation, der Kombination und des synthetischen Problemlösens ausgewählt.

Bei genauerer Betrachtung der Ergebnisse zeigt sich, dass in der Primarstufe die Schulstufe, die mathematischen Fähigkeiten und das mathematische Interesse einen signifikanten Einfluss auf die Leistungen in der Kombinatorik haben – das Geschlecht, der sozioökonomische Status sowie die Mathematiknote jedoch nicht. Weiters wird aufgezeigt, dass die Leistungen im Bereich der Kombinatorik in der Primarstufe mit dem Alter beziehungsweise mit der Schulstufe steigen. In der Sekundarstufe eins hat nur das mathematische Interesse einen signifikanten Einfluss auf die Kombinatorikleistungen, gefolgt von den kognitiven Fähigkeiten. Die Ergebnisse passen zu den Erkenntnissen der Kognitionspsychologie, welche davon ausgeht, dass Lernende erst ab einem Alter von zwölf Jahren vollständig abstrakt denken können. Weiters zeigt die Studie, dass in der Primarstufe die Beschulung zu einer Leistungssteigerung in der Kombinatorik führt und nicht das Alter der Schüler*innen (Kipman, 2018, S. 141 ff.).

3.2.3 Kombinatorikaufgaben in der dritten Grundschulklasse (Herzog et al., 2017)

Herzog et al. (2017, S. 270 f.) untersuchen, wie Schüler*innen der Primarstufe kombinatorische Aufgaben lösen, welche Darstellungsformen sie verwenden, auf welchem Abstraktionsgrad sie arbeiten und welche Strategien zu erkennen sind. Die Studie wurde mit 548 Schüler*innen der dritten Schulstufe, welche alle keine Erfahrungen mit Kombinatorikaufgaben hatten, durchgeführt. Die Lernenden bearbeiteten sechs kombinatorische Aufgaben in einem Gruppentest.

Die Ergebnisse zeigen, dass Schüler*innen der dritten Schulstufe deutliche Schwierigkeiten haben, kombinatorische Aufgaben zu lösen. Im Durchschnitt können die Lernenden nur ein Viertel der Aufgaben lösen, keine einzelne Aufgabenstellung konnte von mehr als 50% der Teilnehmer*innen bewältigt werden und von einem Drittel wird keine adäquate Lösung angegeben. Werden die Darstellungsformen betrachtet, zeigt sich, dass hauptsächlich bildliche und typografische Formen verwendet werden, während organisierte Formen nur in einem begrenzten Ausmaß vorkommen. Mit den Darstellungen stellen die Lernenden hauptsächlich die inhaltlichen Elemente der Aufgabenstellung dar. Viele Schüler*innen wählen mal eine typografische und mal eine bildliche Darstellungsform, was in Abhängigkeit vom Aufgabeninhalt liegen dürfte. Es lässt sich also verzeichnen, dass der Inhalt der Aufgabe einen Einfluss auf die Art und Weise der Bearbeitung hat. Bezogen auf den Abstraktionsgrad zeigen die Auswertungen, dass die Lernenden hauptsächlich konkrete Darstellungen verwenden. Für sie sind die Elemente der möglichen Kombinationen sowie Variationen wesentlicher als die Struktur der Aufgabe. Kombinatorische Aufgaben werden von den Lernenden hauptsächlich analog zur Sachsituation dargestellt. Weiters benutzt ein Großteil der Schüler*innen keine Makrostrategien. Dies weist darauf hin, dass strukturierende Strategien nicht ohne eine entsprechende Instruktion verwendet werden (Herzog et al., 2017, S. 276 ff.).

Die Ergebnisse der Studie betonen die Notwendigkeit der Kombinatorik in der Primarstufe. Die Schüler*innen ohne Erfahrungen im Bereich der Kombinatorik haben deutliche Schwierigkeiten beim Lösen der Aufgaben. Zudem zeigt sich auch beim Verwenden von abstrakten Darstellungen ein deutlicher Lernbedarf. Der Abstraktionsgrad muss fokussiert werden, denn dieser ermöglicht, dass sich die Lernenden auf den eigentlichen Prozess der Lösung konzentrieren können. Die Wahl von passenden organisierten Darstellungen sowie Makrostrategien erweist sich als wesentlicher Faktor für die Bearbeitung von kombinatorischen Aufgaben. Jedoch sind hierbei nur Darstellungen und Strategien hilfreich, wenn diese zur Aufgabe passen. Daher müssen bei der Vermittlung dieser auch die Vorteile sowie Nachteile thematisiert werden. Dies zeigt, dass Kombinatorikaufgaben in der Grundschule einen flexiblen Zugang brauchen (Breiter et al., 2009, S. 286 f.).

3.2.4 Verbesserung der Kombinatorikleistung (Kipman, 2018)

Kipman (2018, S. 170) beschreibt eine Studie, welche die Verbesserungen der Kombinatorikleistungen untersucht. Berücksichtigt werden dabei die Interventionen eines Arbeitsblatt-Unterrichts sowie jene eines handlungsorientierten Unterrichts. Hierfür wurden Klassen in drei Gruppen unterteilt – eine erste Gruppe mit handlungsorientierter Förderung, eine Gruppe mit Förderung durch Arbeitsblätter und eine dritte Kontrollgruppe. Alle drei Gruppen waren hinsichtlich der Verteilung der Geschlechter, des Alters, dem sozialen Hintergrund, der Mathematiknote, den Fähigkeiten und dem Interesse an Mathematik ident.

Die Analysen zeigen, dass jegliche Beschäftigungen mit kombinatorischen Problemstellungen zu Leistungsverbesserungen führen. Am effektivsten ist dabei jedoch ein handlungsorientierter Unterricht. Weiters wird aufgedeckt, dass Buben sowie Kinder mit höheren Fähigkeiten von einem handlungsorientierten Unterricht mehr profitieren als Mädchen und Schüler*innen mit geringeren Fähigkeiten. Weiters wirkt sich ein großes Interesse positiv auf die Verbesserung der Leistungen aus (Kipman, 2018, S. 177).

3.2.5 Kombinatorik und Problemlösen (Kipman, 2018)

Laut Kipman (2018, S. 127 f.) sind erfahrungsgemäß gute Kombinatoriker*innen auch gute Problemlöser*innen, was sich bereits jahrelang an der Pädagogischen Hochschule in Salzburg zeigt. Werden die Prüfungsnoten einer Kombinatorikprüfung mit den Problemlösekompetenzen, welche durch Gesprächsprotokolle ausgewertet werden, sowie mit den Häufigkeiten der Lösungen bei klassischen Problemlöseaufgaben und bei Mehrzugaufgaben korreliert, ergibt sich ein Zusammenhang. Zudem zeigt sich beim Betrachten der PISA-Aufgaben aus dem Bereich des Problemlösens, dass für diese oftmals Kombinatorikaufgaben verwendet werden. Weiters wurde erkundet, dass jene Heuristiken, die für das Lösen von Problemaufgaben relevant sind, auch in der Kombinatorik eine Rolle spielen. Auch bei Kindern und Jugendlichen besteht ein positiv signifikanter Zusammenhang zwischen Kombinatorikaufgaben und systematischen Problemlöseaufgaben. Außerdem gibt es einen direkten Zusammenhang zwischen den Leistungen im Bereich der Kombinatorik und der Wahrscheinlichkeitsrechnung. „Nachdem Problemlösen eine Kette von ‚günstigen Entscheidungen‘ ist und günstige Entscheidungen oft dann getroffen werden, wenn es eine realistische Einschätzung der Wahrscheinlichkeit des Eintreffens/Nichteintreffens eines bestimmten Ereignisses gibt, ist ein Zusammenhang Kombinatorik – Problemlösekompetenz plausibel.“ (Kipman, 2018, S. 128)

3.2.6 Von den Schülern gewählten Strategien für die Lösung der Problemaufgaben in der Kombinatorik (Lace, 2008)

Lace (2008) stellt in ihrer Untersuchung fest, welche Strategien Schüler*innen unterschiedlicher Altersgruppen zum Lösen von Problemaufgaben wählen. Für die Forschung wurden Lernende ausgewählt, die nach dem lettischen Schulsystem in den Allgemeinkenntnissen sowie in Mathematik ein optimales Niveau haben. Insgesamt nahmen an der Studie 16 Kinder der sechsten Schulstufe, zwölf Schüler*innen der siebten Schulstufe und 16 Lernende der neunten Schulstufe teil, wobei alle keine Vorkenntnisse beim Lösen von Kombinatorikaufgaben hatten. Die Ergebnisse wurden einerseits durch eine Videoanalyse und andererseits durch Rückmeldungen der Lernenden über ihre Vorgehensweise beim Lösen gewonnen. Die Schüler*innen mussten herausfinden, wie viele unterschiedliche zweistellige Zahlen aus vorgegebenen Ziffern gebildet werden können. Hierbei gab es fünf verschiedene Aufgaben, bei denen jeweils eine zunehmende Anzahl an Ziffern vorgegeben war: Bei der ersten Aufgabe zwei, bei der zweiten drei, und bei der fünften Aufgabe schließlich sechs Ziffern. Die Untersuchungsteilnehmer*innen durften individuell und zeitlich unbegrenzt arbeiten.

Die Ergebnisse zeigen, dass viele Untersuchungsteilnehmer*innen davon ausgegangen sind, dass alle Ziffern in der Zahl unterschiedlich sein müssen. Hierbei wurde von der Untersuchungsleitenden eingegriffen. Trotzdem waren diese Zahlen eine Ausnahme und wurden zuletzt genannt. Weiters wird aufgezeigt, dass zunächst viele Lernende alle Zahlen aufgeschrieben haben, wobei etwa 20% erkannt haben, dass es bei den größeren Zahlen einen günstigeren Lösungsweg geben muss. Sechs Teilnehmer*innen haben zunächst nach einem solchen gesucht, letztlich aber alle Möglichkeiten aufgeschrieben, während vier Schüler*innen keine Zahlen angegeben und eine Anzahl an Kombinationen erfunden haben. Diese konnten ihre Lösungsmethode nicht begründen und führten lediglich an, dass sie davon überzeugt sind, dass ihre Lösung korrekt ist (Lace, 2008).

Werden die Lösungsstrategien genauer betrachtet, zeigt sich, dass nur acht Schüler*innen der sechsten und siebenten Schulstufe die Zahlen nacheinander aufgeschrieben haben und sieben Teilnehmer*innen die Zahlen der Reihe nach notiert, jedoch die Zahlen bestehend aus den gleichen Ziffern erst am Ende ergänzt haben. Weitere neun Lernende konnten immer die Lösung von der vorherigen Aufgabe heranziehen und die neuen Möglichkeiten ergänzen. Währenddessen gab es große Unterschiede bei den Lösungsstrategien in der neunten Schulstufe. Verwendet wurden hierbei ähnliche Lösungsansätze wie bei den jüngeren Kindern sowie allgemeine Strategien, welche im Kopf oder schriftlich gerechnet wurden. Alle haben sich bemüht, allgemeine Lösungen zu finden. Wenn ihnen dies nicht gelang, haben viele gar nicht probiert, alle einzelnen Zahlen aufzuschreiben (Lace, 2008).

Zusammengefasst zeigt diese Untersuchung, dass es sinnvoll ist, die Kombinatorik in den verschiedenen Schulstufen in den Unterricht zu integrieren. Die im Verhältnis schlechteren Ergebnisse der älteren Schüler*innen lassen sich darauf zurückführen, dass sich diese keine Lösungsstrategien für kombinatorische Aufgaben angeeignet haben und das Lösen durch Versuchen für sie keine Option mehr ist. Werden kombinatorische Aufgaben bereits früher im Mathematikunterricht thematisiert, haben Schüler*innen die Möglichkeit, Strategien zu entwickeln, da in diesem Alter Experimentieren vollkommen natürlich ist (Lace, 2008).

3.3 Potential der Kombinatorik

Für eine Thematisierung von kombinatorischen Aufgaben im Grundschulalter gibt es vielfältige Argumente (Neubert, 2019a, S. 22). Eine Förderung im Bereich der Kombinatorik bringt viele Vorzüge mit sich (Schipper et al., 2021a, S. 258) und eröffnet diverse Lernchancen (Schipper, 2023, S. 280). Auf diese wird anbei näher eingegangen.

3.3.1 Grundlagenvermittlung

Schüler*innen sollen in der Primarstufe grundlegende Kompetenzen zum systematischen Zählen erwerben, auf welchen in der Sekundarstufe aufgebaut wird (Büchter & Henn, 2007, S. 265). Besonders im Unterrichtsfach der Mathematik wird in der Primarstufe eine Basis für strukturiertes und systematisches Denken aufgebaut (Büchter & Padberg, 2019, S. 5). Zusätzlich geht von Aufgaben im Bereich der Kombinatorik eine hohe intrinsische Motivation aus. Wird spielerisch und experimentell vorgegangen, wird die Freude beim Lernen von Techniken des geistigen Arbeitens gefördert (Neubert, 2019a, S. 22).

3.3.2 Bezug zur Lebenswelt

Bereits vor der Thematisierung der Kombinatorik im Unterricht, bringen Schüler*innen wesentliche Kompetenzen bezogen auf das Lösen von kombinatorischen Anzahlbestimmungen mit. Außerhalb der Schule werden Kinder bereits früh mit kombinatorischen Überlegungen und Phänomenen konfrontiert, weshalb diese zu ihrer Erfahrungswelt gehören (Neubert, 2019a, S. 20 ff.). Die Frage nach dem Gewand, dass heute angezogen wird oder die Entscheidung, welche Eissorten ausgewählt werden, sind typische Problemaufgaben der Kombinatorik, die Schüler*innen in ihrem Alltag begegnen (Eichhorn, 2024, S. 5). Auf der anderen Seite helfen kombinatorische Aufgaben die Umwelt der Lernenden zu erschließen. Wesentlich ist, dass ein vollständiges Verständnis für die Kombinatorik Zeit braucht. Daher soll frühzeitig mit der Thematisierung begonnen werden, um Fehlauffassungen besser entgegenwirken zu können (Neubert, 2019a, S. 22).

3.3.3 Anfangsunterricht

Bereits im Anfangsunterricht bieten kombinatorische Aufgaben ein großes Potential (Neubert, 2019a, S. 20). Das Bestimmen von Anzahlen ist wesentlich und wird mit Operations-, Zahlen- und Mengenvorstellungen, bezogen auf Fertigkeiten im Bereich des Zählens, auf die Erfassung von Mengen sowie auf Rechenoperationen und -strategien, verbunden. Aus didaktischer Sicht werden nicht-zählende Möglichkeiten für die Anzahlbestimmung fokussiert (Herzog et al., 2017, S. 264). Rechnerische Anforderungen stützen sich somit auf systematischem Zählen und sind überschaubar, da in der Regel nur kleine Anzahlen verwendet werden (Schipper et al., 2021a, S. 258). Zudem werden zum Lösen von kombinatorischen Fragestellungen ausschließlich Rechnungen mit natürlichen Zahlen benötigt (Neubert, 2024, S. 89).

3.3.4 Differenzierung

Weiters bieten kombinatorische Aufgaben viele Möglichkeiten zur Differenzierung (Neubert, 2024, S. 90). In heterogenen Klassen ist es möglich, gleiche kombinatorische Probleme auf einem unterschiedlichen Niveau zu thematisieren, bearbeiten und lösen (Schipper et al., 2021a, S. 258). Dabei können alle Lernenden Wesentliches zur Lösung beitragen, auch wenn nur eine potentielle Möglichkeit gefunden wird (Schipper, 2023, S. 281). In diesem Zusammenhang können kombinatorische Aufgaben dazu dienen, Schüler*innen zu vermitteln, dass es verschiedene Interpretationen von Mathematikaufgaben gibt (Neubert, 2019a, S. 22). Auf das Potential der Differenzierung wird im Kapitel 3.4.3 noch näher eingegangen.

3.3.5 Lösungsprozess

Vorteil der Kombinatorik in der Primarstufe ist auch, dass die Schüler*innen keine Lösungsalgorithmen für kombinatorische Aufgaben haben. Dies kommt vor allem jenen Kindern zugute, die gerne knobeln und probieren (Schipper, 2023, S. 280 f.), denn auch von Lehrkräften bekommen die Lernenden keine fertigen Lösungsroutinen vermittelt. Durch selbstständiges Probieren müssen Lösungswege gefunden werden. Bei dieser Vorgehensweise erweitert sich die Erkenntnis, dass Mathematik nicht nur richtiges Ausrechnen, sondern das Finden von Lösungswegen bedeutet (Schipper et al., 2021a, S. 258). Bei kombinatorischen Aufgaben geht es somit nicht primär um korrekte oder falsche Lösungen, sondern um den Prozess des Lösens ohne abzurufende Lösungsroutinen. Mit der Zeit kann sich ein systematisches Vorgehen entwickeln (Schipper et al., 2019a, S. 291). Ein geschicktes Zählen, bei welchem eine Struktur sowie eine Systematik verwendet werden, ist ein wesentliches Ziel von Kombinatorikaufgaben in der Grundschule (Schipper et al., 2019b, S. 318).

Kombinatorikaufgaben können nur begrenzt prozedural und schematisch gelöst werden (Herzog et al., 2017, S. 266). Die Entwicklung des kombinatorischen Denkens ist vom Alter der Lernenden abhängig. Erst mit elf Jahren können Kinder systematisch alle möglichen Kombinationen erfassen. Zuvor sind die Strategien der Schüler*innen häufig noch instabil, wechselnd oder zum Teil aufgabenbezogen. Daher benötigen vor allem jüngere Lernende konkretes Material, welches ihnen beim Lösen von kombinatorischen Aufgaben hilft. Dadurch wird ein strukturiertes Herangehen ermöglicht (Neubert, 2019a, S. 20). Eichhorn (2024, S. 5) gibt an, dass Schüler*innen der Primarstufe noch nicht mit Formeln oder Fachausdrücken arbeiten sollten. Wesentlich ist laut Krauthausen (2018, S. 168), dass der Stand der Entwickelung des Denkens, die Vorerfahrungen, ein kind- sowie fachgerechter Zugang zur Thematik und realistische Unterrichtsziele beachtet werden. Schipper et. al (2021a, S. 258) schreiben, dass die Schüler*innen im Bereich der Kombinatorik voneinander lernen können. Die Lernenden vergleichen Lösungen miteinander und tauschen Argumente aus, wodurch ihnen ein systematisches Vorgehen sowie dessen Nützlichkeit vermittelt wird.

3.3.6 Mathematische Kompetenzen

Weiters können Kombinatorikaufgaben beim Erreichen von Zielen in anderen mathematischen Teilgebieten helfen sowie einen wesentlichen Beitrag zur Entwicklung von allgemeinen mathematischen Kompetenzen leisten (Neubert, 2019a, S. 22). Prozessbezogene[1] Kompetenzen, wie das Problemlösen, Kommunizieren, Argumentieren, Modellieren von Sachproblemen sowie das Darstellen mit konkreten Materialien, Zeichnungen oder Symbolen werden gefördert (Schipper, 2023, S. 281). Wird der Fokus weniger auf die Anzahl der Möglichkeiten und mehr auf den Lösungsweg gelegt, so rücken das Problemlösen, das Darstellen und das Argumentieren mehr in den Vordergrund. Ziel ist hier kein Anwenden von Algorithmen oder Schemata, sondern ein Entwickeln von systematischen Ansätzen und Strategien, mit welchen Lösungen gefunden werden können. Neben einer schlüssigen Erklärung, weshalb alle Möglichkeiten gefunden wurden, gehört auch eine passende Darstellung der Lösung dazu. Aus diesem Grund können die Kompetenzen des Darstellens sowie des Begründens auch mit der Kombinatorik geübt werden (Herzog et al., 2017, S. 266). Auf diesen Aspekt wird im Kapitel vier noch näher eingegangen.

Zusammenfassend ist das Ziel von kombinatorischen Grundsituationen ein geschicktes Abzählen (Eichhorn, 2024, S. 5). Im Vordergrund steht dabei der Lösungsprozess (Eichhorn, 2024, S. 5; Schipper et al., 2021a, S. 258), bei welchem handelnd oder zeichnend verschiedene Möglichkeiten erkundet werden. Gefordert und gefördert werden hierbei prozessbezogene[1] Kompetenzen. „Ziel ist es, ausgehend vom ersten noch sehr unsystematischen Finden einzelner Lösungen die Kinder allmählich hinzuführen zu systematischen Vorgehensweisen, die es ihnen erlauben, alle Lösungen zu finden“ (Schipper, 2023, S. 281). Gleiche Strukturen sollen erkannt und in verschiedenen Kontexten angewendet werden (Schipper et al., 2021b, S. 300).

3.4 Methodisch-Didaktische Überlegungen

Im folgenden Unterkapitel werden methodisch-didaktische Überlegungen im Bereich der Kombinatorik der Primarstufe dargelegt. Hierfür werden die Arbeit mit Material, das Differenzierungspotential, Lösungsstrategien sowie Darstellungsformen näher erläutert.

3.4.1 E-I-S-Prinzip

„Die kombinatorischen Beispiele und Aufgaben können auf drei Stufen, dem sogenannten E-I-S-Prinzip erschlossen werden.“ (Kipman, 2018, S. 136) Dieses geht auf den amerikanischen Psychologen Jerome Bruner zurück, welcher es zur Umwelterschließung eines Menschen beschreibt, weshalb es auch für das Lernen in der Schule wesentlich ist. Beim Lernen sollen Inhalte auf möglichst allen Ebenen geboten werden (Ulm, 2010, S. 9).

Beim E-I-S-Prinzip steht das E für die enaktive Ebene, auf welcher Aufgaben durch ein konkretes Handeln mit diversen Gegenständen erschlossen werden sollen. Die zweite Ebene wird als ikonische Ebene bezeichnet und wird durch das I repräsentiert. Auf dieser werden Aufgaben mithilfe von Bildern und Grafiken gelöst. Weiters steht das S für die dritte Ebene, die symbolische Ebene, bei welcher Schüler*innen Beispiele mithilfe von Zahlen erschließen (Kipman, 2018, S. 136). Die Abbildung anbei veranschaulicht das E-I-S-Prinzip.

Darstellungsebenen nach J. Bruner	
enaktive Ebene	Sachverhalte werden durch Handlungen mit konkreten Objekten erfasst.
ikonische Ebene	Sachverhalte werden durch Bilder und Grafiken erfasst.
symbolische Ebene	Sachverhalte werden durch Symbole (z. B. verbal oder durch mathematische Zeichen) erfasst.

Abbildung 3: Darstellungsebenen nach J. Bruner (Ulm, 2010, S. 9)

Konkret bedeutet das E-I-S-Prinzip, dass Schüler*innen beim Lösen von kombinatorischen Aufgaben zunächst mit verschiedenen Objekten experimentieren und anschließend die gefundenen Möglichkeiten zeichnerisch festhalten. Erst dann wird der Aufgabe eine Rechnung zugeordnet (Kipman, 2015, S. 136).

Wesentlich ist in der Primarstufe die Integration der ikonischen und der enaktiven Ebene. Konkretes Probieren und Verschieben von Materialien ist effektiv, damit später die Thematik auf einer symbolischen Ebene erschlossen werden kann (Bettner & Dinges, 2018, S. 4). Damit kombinatorische Aufgaben inhaltlich besser verstanden werden, ist es sinnvoll, kombinatorische Aufgaben im Sinne eines Spiralprinzips bereits im Anfangsunterricht oder vor dem Schulbeginn aufzugreifen (Neubert, 2019c, S. 22).

3.4.2 Arbeit mit Material

Neubert (2019b, S. 46) führt an, dass das Einsetzen von Materialien das Finden von Möglichkeiten unterstützt. Auch Kipman (2015, S. 66) betont, dass Lernende mit Materialien eine deutlich höhere Lösungsrate bei Kombinatorikaufgaben aufweisen. Gerade im Primarschulalter bietet es sich an, den konkret dinglichen und spielerischen Ansatz weiter zu vertiefen und verschiedene Materialien und Aufgaben anzubieten (Kipman, 2018, S. 167). Mit den bereitgestellten Objekten sollen Schüler*innen probieren kombinatorische Aufgaben zu lösen. Zunächst wird kein systematisches Vorgehen erwartet. Ist die Anzahl der Möglichkeiten größer als sechs, zeigt sich, dass Schüler*innen durch ein unsystematisches Herumprobieren kaum alle Möglichkeiten finden oder Lösungsmöglichkeiten doppelt zählen. Dies wird aufgegriffen, um ein systematisches Vorgehen zu vermitteln (Sill & Kurtzmann, 2019, S. 188). Empirische Untersuchungen mit Schüler*innen von dritten Schulstufen ohne Erfahrungen im Bereich der Kombinatorik zeigen, dass Lernende viele unterschiedliche Ideen zum Ermitteln von Lösungsmöglichkeiten entwickeln (Herzog et. al, 2017, S. 276 ff.). Weiters können Schwierigkeiten beim Finden aller Möglichkeiten sowie beim Entwickeln von systematischen Strategien ausfindig gemacht werden. Daher soll nach dem Probieren relativ bald zum systematischen Probieren übergeleitet werden (Sill & Kurtzmann, 2019, S. 189).

Durch die Arbeit mit Materialien können bereits früh Heuristiken für das Lösen von Problemen entwickelt werden. Die Lernenden erwerben spielerisch Kompetenzen im Problemlösen. Die Kombinatorik bietet vor allem für Schüler*innen in der Grundschule verschiedene und vielfältige Zugangsmöglichkeiten. Für leistungsstärkere Kinder eröffnen die Aufgaben eine Herausforderung und leistungsschwächere Lernende können Aufgaben auf ihrer Niveaustufe bewältigen. Außerdem bietet das Experimentieren mit Materialien die Möglichkeit, die Mathematik sowie die Kombinatorik zu erforschen. Es entsteht ein experimenteller Unterricht. Da Kombinatorikaufgaben vielfach gleiche formale Strukturen haben, entstehen dennoch gewisse allgemeine Muster, wodurch Lernende auch Erfahrungen bei allgemein typischen Arbeitsweisen sammeln (Kipman, 2018, S. 136).

Beim Einsatz von Materialien wird unterschieden, ob genug Material vorhanden ist, so dass damit alle Möglichkeiten auf einmal dargestellt werden können oder ob hierfür nicht genug Objekte zur Verfügung stehen, so dass nach dem Finden einer Möglichkeit diese notiert werden muss, bevor das Material zum Darstellen einer anderen genutzt wird (Neubert, 2019b, S. 46). Sofern nicht genug Materialien vorhanden sind, können als Alternative zwar Ersatzobjekte verwendet werden, für einige Schüler*innen kann dies jedoch ein wesentlicher Unterschied zur realen Sachsituation sein, was zu Problemen und Missverständnissen führt (Sill & Kurtzmann, 2019, S. 188).

3.4.3 Differenzierung

Da kombinatorische Aufgaben verschiedene Lösungsmöglichkeiten zulassen, haben sie einen sehr offenen Charakter (Sill & Kurtzmann, 2019, S. 171). Durch offene Aufgaben kann individualisiert und differenziert werden. Kombinatorische Aufgaben brauchen im Unterricht ein differenziertes Arbeiten (Neubert, 2019b, S. 54). Anbei werden einige Aspekte der Differenzierungsmöglichkeiten bei kombinatorischen Aufgaben angeführt.

3.4.3.1 Aufgabenstellungen

Zunächst können Schüler*innen durch Aufgabenvariationen verschieden gefördert werden. Grundsätzlich geht es in der Kombinatorik immer darum, zu ermitteln, welche Möglichkeiten es gibt, Elemente einer Menge nach bestimmten Kriterien anzuordnen und wie viele Möglichkeiten es hierfür insgesamt gibt. Hierbei können die Aufträge an die Schüler*innen bereits differenziert sein. Zunächst können Lernende aufgefordert werden, nur einige Möglichkeiten zu finden und erst später wird die Gesamtanzahl ermittelt (Neubert, 2019b, S. 54 f.). Auch für altersgemischte Klassen können kombinatorische Aufgaben gut differenziert werden (Kipman, 2018, S. 137). Während beispielsweise Kinder einer zweiten Schulstufe alle Lösungen finden sollen, können Schüler*innen der vierten Schulstufe Aufgaben bereits verallgemeinern oder eine höhere Anzahl an Möglichkeiten ermitteln (Klunter & Raudies, 2010, S. 32). Sofern bereits einige Beispiele intensiv auf der enaktiven und der ikonischen Ebene gelöst wurden, können sich leistungsstärkere Schüler*innen von diesen zwei Ebenen lösen und Probleme auf der systematischen Ebene erforschen. Hierfür braucht es Aufgaben mit größeren Zahlen, welche kaum handelnd oder zeichnend gelöst werden können (Ulm, 2010, S. 9). Weiters kann der Zahlenraum bei kombinatorischen Aufgaben relativ einfach vergrößert, aber auch verkleinert werden. Daher bietet die Kombinatorik vielfältige Möglichkeiten für eine individuelle Förderung, für die Arbeit im inklusiven Unterricht, aber auch für besonders begabte Schüler*innen (Herzog et al., 2017, S. 266).

Neubert (2019b, S. 55) gibt an, dass kombinatorische Aufgaben Schüler*innen Freude bereiten und zudem alle Lernenden den Eindruck haben, dass sie selbst etwas leisten können. Wesentlich ist, dass die Leistungsunterschiede der Schüler*innen nicht so sehr hervortreten wie bei Rechenaufgaben, bei welchen zumeist ein richtiges Ergebnis als Indikator für den Lernerfolg dient. In einzelnen Fällen lässt sich beobachten, dass Lernende, welche bei Arithmetikaufgaben einen erhöhten Förderbedarf aufweisen, bei Lösen von Kombinatorikaufgaben keine Schwierigkeiten haben.

3.4.3.2 Lösungswege

Viele kombinatorische Aufgaben bieten unterschiedliche Lösungswege an. Die Möglichkeit des Ermittelns von Lösungen findet auf verschiedenen Repräsentationsebenen statt. Es wird deutlich, dass Schüler*innen, unabhängig von ihren Vorkenntnissen, diverse Lösungswege verwenden, sofern ihnen dies gestattet wird (Neubert, 2019b, S. 55). Den Lernenden kann freigestellt werden, ob sie eine kombinatorische Aufgabe allein oder mit einem Partner lösen wollen und ob sie die Aufgabe auf einer enaktiven Ebene mit Materialien oder mit einer anderen Darstellungsform ermitteln möchten. Auch die Darstellungsformen können selbst gewählt werden (Klunter & Raudies, 2010, S. 32).

Lernende denken auf unterschiedliche Weisen – vielfältige Vorgehensweisen helfen, alle Möglichkeiten ausfindig zu machen. Diese zeigen verschiedene Richtungen des Denkens in der Strukturierung der Möglichkeiten auf. Aus diesem Grund ist wesentlich, dass die Schüler*innen eigene Wege zum Denken in Möglichkeiten finden, um ihre individuelle Entwicklung zu unterstützen (Huhmann, 2020, S. 7).

3.4.3.3 Interpretationen

Kombinatorische Beispiele bieten die Möglichkeit, Schüler*innen zu vermitteln, dass Aufgaben der Mathematik unterschiedlich interpretiert werden können (Neubert, 2019b, S. 55). Dies verdeutlicht Neubert (2019b, S. 55 f.) anhand eines Beispiels, bei welchem sich ein Kind täglich nach der Schule ein Eis, bestehend aus drei Kugeln, kauft. Zur Auswahl gibt es vier verschiedene Sorten. Der Bub möchte täglich eine andere Eistüte essen. Die Frage ist, wie viele unterschiedliche Tüten sich der Bub zusammenstellen kann. Abhängig von den Gewohnheiten beim Essen von Eis, gibt es bei dieser Aufgabe vier Möglichkeiten, diese zu interpretieren. Die Interpretationsmöglichkeiten basieren auf unterschiedlichen kombinatorischen Figuren. Zunächst kann die Aufgabe so aufgefasst werden, dass alle Kugeln immer von verschiedenen Sorten sind und die Reihenfolge unwichtig ist. Hierbei handelt es sich um eine Kombination ohne Wiederholung. Die zweite Interpretationsmöglichkeit bedenkt, dass Kugeln der gleichen Eissorte in der Eistüte sein können. Die Reihenfolge ist hier wieder nicht entscheidend. Diese

Aufgabe liegt der kombinatorischen Figur der Kombination mit Wiederholung zugrunde. Bei der dritten Möglichkeit, die Aufgabe zu interpretieren, sind alle Kugeln von unterschiedlichen Eissorten und die Reihenfolge der Anordnung spielt eine Rolle. Dies ist eine Aufgabe aus dem Bereich der Variation ohne Wiederholung. Als vierte Interpretationsmöglichkeit wird mitbedacht, dass Kugeln einer gleichen Eissorte in der Eistüte sein können und dass die Reihenfolge der Eiskugeln wesentlich ist. Diese Aufgabe lässt sich der kombinatorischen Figur der Variation mit Wiederholung zuordnen.

Neubert (2019b, S. 56) beschreibt, dass bei einer Untersuchung in der vierten sowie in der zweiten Schulstufe alle vier Interpretationsmöglichkeiten beobachtet werden konnten. Wichtig ist, dass die Aufgaben trotz verschiedenen Interpretationsmöglichkeiten dennoch nicht rechnerisch, sondern durch systematisches Probieren gelöst werden.

3.4.3.4 Zusatzaufgaben

Als weitere Differenzierungsmöglichkeit lässt sich verzeichnen, dass Kombinatorikbeispiele als zusätzliche Aufgaben in anderen stofflichen Gebieten des Mathematikunterrichts genutzt werden können. Aufgrund eines individuellen, vielfältigen Übungsbedarfes von Schüler*innen wird oft versucht, Aufgaben zu finden, welche neue Herausforderungen durch weitere Inhalte bieten, die sich aber dennoch mit dem Ausgangsthema beschäftigen. Hierfür können kombinatorische Aufgaben gut genutzt werden. Dies unterstützt die Auffassung, dass die Kombinatorik in der Primarstufe kein eigenständiges Stoffgebiet ist, sondern sich durch den gesamten Mathematikunterricht ziehen soll. So können etwa auch leistungsstarke Schüler*innen besonders gefordert werden (Neubert, 2019b, S. 56).

Neubert (2019b, S. 56 f.) verdeutlicht diese Form der Differenzierung durch ein Beispiel zum schriftlichen Rechnen. Eine häufige Übungsvariante ist hierbei, dass Schüler*innen einen Würfel mehrmals werfen, anschließend aus den Zahlen zwei dreistellige Zahlen bilden und die Differenz dieser ermitteln. So entstehen viele verschiedene Übungsaufgaben. Aufgrund des unterschiedlichen Übungsbedarfs sowie des Arbeitstempos müssen sinnvolle Zusatzaufgaben gefunden werden. Hier kann als kombinatorische Aufgabe die Frage nach der Anzahl der Aufgaben, die gebildet werden können, eingesetzt werden. Einige Schüler*innen sind dadurch angeregt, so viele Aufgaben wie möglich herauszufinden, ohne dabei an die Gesamtheit der Möglichkeiten zu denken. Andere Kinder hingegen werden sich auf die Suche nach der Gesamtanzahl machen. Durch Zusatzbedingungen wird eine Erhöhung der Vielfalt möglich. So kann etwa festgelegt werden, dass der Minuend immer aus den ersten drei gewürfelten Zahlen bestehen muss.

3.4.4 Lösungsstrategien

Schüler*innen entwickeln erst zwischen acht und neun Jahren systematische Ansätze für Probleme der Kombinatorik (Herzog et al., 2017, S. 270). Auch wenn die Kombinatorik der Primarstufe oft dem Bereich der Daten, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten zugeordnet wird, spielt diese dort kaum eine wesentliche Rolle, da Anzahlen zumeist durch ein Abzählen bestimmt und daher kombinatorische Strategien selten notwendig werden (Neubert, 2019b, S. 21). Wesentlich ist, dass jene Formeln, die im Kapitel 2.3 vorgestellt werden, keineswegs von Grundschüler*innen verstanden werden können und daher in der Volksschule auch keine Rolle spielen (Schipper et al., 2019b, S. 317).

Lösungsprozesse von Schüler*innen der Primarstufe bei kombinatorischen Aufgaben können unter verschiedenen Aspekten beleuchtet werden. So werden die verwendeten Strategien und Darstellungsmöglichkeiten betrachtet, welche oftmals in enger Verbindung zueinander stehen (Neubert, 2019b, S. 46). Anbei werden verschiedene Lösungsstrategien dargestellt, ehe im Kapitel 3.5. auf diverse Darstellungsformen eingegangen wird.

3.4.4.1 Systematische Abzählstrategie

Die systematische Abzählstrategie wird auch als „reguläre Strategie“ (Kipman, 2018, S. 153) bezeichnet. Bei dieser Strategie wird die Lösung durch ein systematisches Abzählen eruiert. Hierzu wird das erste Element gehalten, während die anderen Elemente systematisch rotiert werden. Wird etwa eine Kombinationsaufgabe, welche dem Typ *zwei aus vier* zugeordnet werden kann, betrachtet, könnten die sechs Möglichkeiten folgend systematisch abgezählt worden sein: eins-zwei, eins-drei, eins-vier, zwei-drei, zwei-vier, drei-vier (Kipman, 2018, S. 153).

3.4.4.2 Schieben

Bei der Strategie des Schiebens wird immer das letzte Element gehalten und in der nächsten Möglichkeit als erstes Element angeordnet. Eine kombinatorische Aufgabe vom Typ 2 aus 4 würde daher folgendermaßen gelöst werden: eins-zwei, zwei-drei, drei-vier, … (Kipman, 2018, S. 153 f.).

3.4.4.3 Teilen

Beim Teilen wird die Menge in unterschiedliche Untermengen aufgeteilt. Eine *2 aus 4* Aufgabe würde demnach so ermittelt werden: eins-zwei, drei-vier, eins-vier, zwei-drei (Kipman, 2018, S. 154).

3.4.4.4 Fixplatzstrategie

Bei der Fixplatzstrategie wird ein Element konstant gehalten und die anderen Elemente werden vertauscht. Wird diese Strategie beispielsweise bei einer Aufgabe aus dem Bereich der Permutation mit drei Elementen verwendet, sieht die Anwendung der Strategie folgendermaßen aus: eins-zwei-drei, eins-drei-zwei, zwei-eins-drei, zwei-drei-eins, drei-eins-zwei, drei-zwei-eins (Kipman, 2015, S. 154).

3.4.4.5 Raten

Es ist möglich, dass Personen ohne die Verwendung von Materialien eine Anzahl an Möglichkeiten angeben und diese auf Nachfrage auch nicht erläutern können. Es kann kein Rechenweg oder Denkweg angegeben werden. Es wird versucht, die Lösung durch Zufall richtig zu erraten (Kipman, 2018, S. 154).

3.4.4.6 Rechnen

Die Anzahl der Möglichkeiten kann durch einen gezielten Rechenweg ermittelt werden (Kipman, 2018, S. 154).

3.4.4.7 Spontan

Der Ausdruck spontan meint, dass eine Lösung, nachdem die Aufgabe gehört oder gelesen wurde, spontan geäußert wird. Die Lösung wird nicht rechnerisch ermittelt, sondern basiert oftmals auf Weltwissen. Im Rahmen eines *2-aus-4-Kombinationstasks* zeigt sich beispielhaft, dass die Anzahl der möglichen Kombinationen bekannt sein kann, weil etwa auch beim Fußball aus vier Mannschaften sechs mögliche Paarungen, die gegeneinander spielen, gebildet werden können (Kipman, 2018, S. 154).

3.4.4.8 Transfer

Bei der Strategie des Transfers erfolgt eine Transferleistung, eine Schlussfolgerung. Es kann beispielsweise die Lösung von einer Aufgabe aus dem Bereich der Kombination bekannt sein, welche auf eine gleichlautende Variation übertragen wird (Kipman, 2018, S. 154).

3.4.4.9 Drehen

Bei der Strategie des Drehens werden die Elemente umgedreht. Bei einer Variationsaufgabe kann die Lösung etwa so aussehen: eins-zwei, zwei-eins, eins-drei, drei-eins, … Bei einer Permutationsaufgabe werden die Elemente bei dieser Strategie nach vorne und nach hinten gestellt. Die Lösung kann folgendermaßen aussehen: eins-zwei-drei, zwei-drei-eins, drei-eins-zwei, … (Kipman, 2018, S. 154).

Laut Kipman (2018, S. 154) sind die reguläre Strategie, das Rechnen, die Fixplatzstrategie, die Weltwissensstrategie und jegliche Transferleistungen am günstigsten.

3.4.5 Darstellungsformen

Lösungsprozesse von Schüler*innen können auch unter dem Aspekt der Darstellungsformen betrachtet werden (Neubert, 2019b, S. 46). Im Kontext der Kombinatorik müssen im Bereich Darstellen Repräsentationsmöglichkeiten entwickelt werden, welche das kombinatorische Problem so darlegen, dass alle potenziellen Variationen oder Kombinationen aufgedeckt werden können. Die Darstellung des Lösungsprozesses bietet Rückschlüsse auf das Verständnis sowie auf die Vorstellungen der Lernenden. Wesentlich ist hierbei, welche Merkmale beziehungsweise Informationen in welchem Kontext als wichtig und welche als irrelevant wahrgenommen werden. Zu unterscheiden ist zwischen Darstellungsformen, welche in der Aufgabenstellung selbst enthalten sind und zwischen Darstellungen, die von Lernenden zur Darlegung des Lösungsweges illustriert werden (Herzog et al., 2017, S. 266 f.). Eine eindeutige Antwort auf die Frage, welche Darstellungsform sich für Schüler*innen der Primarstufe am besten eignet, gibt es nicht (Neubert, 2019b, S. 47). Daher werden anbei verschiedene Darstellungsformen aus dem Bereich der Kombinatorik näher erläutert.

3.4.5.1 Baumdiagramm

Baumdiagramme werden zur Erarbeitung von verschiedenen Kombinationen genutzt. Ein wesentliches Merkmal ist die verzweigte Struktur, anhand welcher die Problemstellung dargelegt werden kann (Herzog et al., 2017, S. 273). Baumdiagramme werden zur Visualisierung des Lösungsprozesses und zur Darstellung der Lösung verwendet. Jedes Stockwerk des Diagrammes entspricht hierbei einer Entscheidungsstufe (Höveler, 2014, S. 17). Somit zählt das Baumdiagramm als Hilfsmittel für ein systematisches Vorgehen (Sill & Kurtzmann, 2019, S. 199). Die Abbildung veranschaulicht den Entscheidungsprozess des Zusammenstellens eines Zuges (Sill & Kurtzmann, 2019, S. 201).

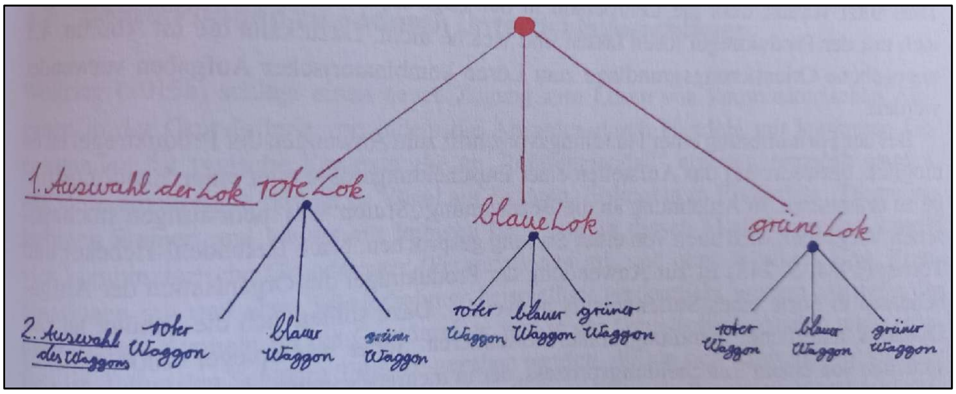


Abbildung 4: Baumdiagramm (Sill & Kurtzmann, 2019, S. 201)

3.4.5.2 Netzdarstellung

In der Netzdarstellung werden die anzuordnenden beziehungsweise auszuwählenden Elemente relativ frei verteilt angeordnet. Die Kombinationen dieser Elemente werden durch Verbindungslinien visualisiert, wodurch sich ein Netzwerk zwischen den Elementen ergibt (Herzog et al., 2017, S. 273).

3.4.5.3 Tabelle

Auch durch Tabellen können Elemente in eine Beziehung zueinander gesetzt werden. Wesentlich sind eine eindeutige Trennung in Zeilen und Spalten sowie die Nutzung von Tabellenlinien, anhand welchen Zellen eindeutig voneinander getrennt werden. Wichtig ist bei tabellarischen Darstellungen auch, dass diese nicht nur eine bloße Auflistungsform, sondern eine Steuerung des Lösungsprozesses sind (Herzog et al., 2017, S. 273). Die Tabelle anbei veranschaulicht alle Möglichkeiten, dass beim Würfeln von drei Würfeln die Augenzahl elf oder zwölf auftritt (Neubert, 2019c, S. 8).

Augensumme 11		Augensumme 12	
6 – 4 – 1	6	6 – 5 – 1	6
6 – 3 – 2	6	6 – 4 – 2	6
5 – 5 – 1	3	6 – 3 – 3	3
5 – 4 – 2	6	5 – 4 – 3	6
5 – 3 – 3	3	5 – 5 – 2	3
4 – 4 – 3	3	4 – 4 – 4	1

Tabelle 1: tabellarische Darstellung (in Anlehnung an Neubert, 2019c, S. 8)

3.4.5.4 Bilder

Kombinatorische Problemstellungen können auch durch Bilder dargestellt werden. Hierbei werden die Elemente entweder als Anordnung oder als Auswahl anhand von Bildern abgebildet, um die möglichen Kombinationen aufzuzeigen (Herzog et al., 2017, S. 273). Die Abbildung anbei veranschaulicht eine bildliche Darstellung auf der ikonischen Ebene. Das Mädchen verwendete Symbole zur Unterstützung ihres Lösungsprozesses bei der Aufgabe, alle Möglichkeiten eines *Drei-Gänge-Menüs* ausfindig zu machen (Neubert, 2019b, S. 48).

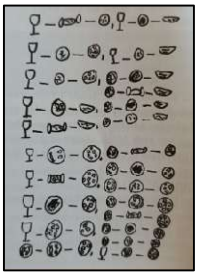


Abbildung 5: bildliche Darstellung (Neubert, 2019b, S. 48)

3.4.5.5 Zifferndarstellung

Zifferndarstellungen umfassen alle Darstellungsformen, bei welchen Einzelemente durch Ziffern abgelöst werden (Herzog et al., 2017, S. 273). Anbei wird veranschaulicht, wie eine Zifferndarstellung aussehen kann, wenn versucht wird, alle möglichen vierstelligen Zahlen aus den Ziffern eins, zwei, drei und vier zu bilden und dabei jede Zahl nur einmal verwendet werden darf (Neubert, 2019b, S. 49).

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

Abbildung 6: Zifferndarstellung (in Anlehnung an Neubert, 2019b, S. 50)

3.4.5.6 Typografie

Bei typografischen Darstellungen werden Worte und Buchstaben verwendet, um Elemente zu codieren, so dass diese zur Auswahl und Anordnung von kombinatorischen Problemstellungen verwendet werden können (Herzog et al., 2017, S. 273). Eine typografische Darstellung kann etwa bei einem Turm-Beispiel verwendet werden, bei welchem verschiedene Türme aus blauen, roten, gelben und weißen Bausteinen gebaut werden sollen und nach der Anzahl der Möglichkeiten der Türme gefragt wird. Für die Darstellung können die Anfangsbuchstaben der Farben verwendet werden (Neubert, 2019b, S. 50). Dies zeigt die Abbildung anbei:

brgw	rbgw	gbrw	wbrg
brwg	rbwg	gbwr	wbgr
bgrw	rgbw	grbw	wrbg
bgwr	rgwb	grwb	wrgb
bwrg	rwbg	gwbr	wgbr
bwgr	rwgb	gwrb	wgrb

Abbildung 7: typografische Darstellung (in Anlehnung an Neubert, 2019b, S. 50)

3.5 Entwicklung kombinatorischen Könnens

Im folgenden Kapitel wird vorgestellt, wie die Kombinatorik im Unterricht umgesetzt werden kann. Grundgedanke ist hierbei, dass die Schüler*innen nach der Vorstellung der Aufgabe durch konkretes Handeln selbstständig Lösungen sowie unterschiedliche Möglichkeiten finden und diese vergleichen können (Neubert, 2019b, S. 50). Es empfiehlt sich in allen Jahrgangsstufen eine methodische Progression (Eichhorn, 2024, S. 5), welche bereits im Kapitel

3.4.1. anhand des E-I-S-Prinzips thematisiert wurde. Es werden verschiedene Modelle von unterschiedlichen Autoren vorgestellt, wie sich das kombinatorische Können entwickeln kann.

3.5.1 Zwei Phasen nach Sill und Kurtzmann (2019)

3.5.1.1 Erste Phase

In einer ersten Phase sollen kombinatorische Aufgaben durch Probieren sowie systematisches Probieren gelöst werden. Vor der Einführung der Multiplikation können kombinatorische Aufgaben weder über das Kreuzprodukt noch mithilfe der Produktregel ermittelt werden. Eine Arbeit mit Baumdiagrammen wäre zwar möglich, ist jedoch eng mit dem Kreuzprodukt und der Produktregel verbunden, weshalb es nicht günstig ist. Das Lösen von kombinatorischen Aufgaben soll in der ersten Phase daher dadurch gekennzeichnet sein, dass nicht nach der Anzahl der Möglichkeiten gefragt wird, sondern danach, welche Möglichkeiten es gibt. Ziel ist nicht, dass alle Möglichkeiten gefunden werden, sondern dass Schüler*innen einige angeben können. Die Suche nach allen Möglichkeiten kann hierbei eine Differenzierung sein. Weiters sollen alle gefundenen Kombinationen durch die Schüler*innen gegenständlich dargestellt werden, so dass alle Möglichkeiten gleichzeitig zu sehen sind. Reale Objekte, welche im Unterricht verwendet werden können, sind etwa Bausteine, Perlen oder Stoffstreifen. Als Ersatzobjekte können jedoch auch Zetteln zum Einsatz kommen. Für alle Schüler*innen sollten genug Objekte vorhanden sein. Anschließend wird auf der ikonischen Ebene, zeichnerisch oder symbolisch, gearbeitet. Hierbei können auch Buchstaben einzelne Dinge oder Farben darstellen. Dies ist weniger aufwendig, da die Möglichkeiten durch Zeichnen oder Einfärben von entsprechenden Objekten hergestellt werden. Arbeitsblätter mit vorgezeichneten Objekten oder Figuren sind eine große Erleichterung beim Finden der Lösungen. Damit Arbeitsblätter jedoch erfolgreich ausgefüllt werden können, ist das Arbeiten auf der enaktiven sowie auf der ikonischen Ebene essenziell. Wesentlich ist in der ersten Phase, dass die Aufgaben nur durch Probieren oder ein systematisches Probieren gelöst werden. Zudem werden nur Aufgaben gewählt, bei denen maximal zwölf Möglichkeiten vorhanden sind. An diese Obergrenze sollen nur anspruchsvolle Aufgaben herankommen (Sill & Kurtzmann, 2019, S. 186 ff.).

3.5.1.2 Zweite Phase

In der zweiten Phase sollen kombinatorische Aufgaben mit weiteren Methoden gelöst werden. Diese beginnt erst nach der Einführung der Multiplikation. Zunächst werden Beispiele mit dem Kreuzprodukt, dem kombinatorischen Aspekt der Multiplikation, gelöst. In einem zweiten Schritt kann das Baumdiagramm eingeführt werden, um Möglichkeiten darzustellen, ehe in einem weiteren Schritt dann die Produktregel der Kombinatorik thematisiert wird. Wesentlich ist in der zweiten Phase, dass nur alle Möglichkeiten dargestellt werden, wenn die Anzahl der Möglichkeiten nicht größer als 16 ist. Zunehmend wird nicht das Finden der Möglichkeiten, sondern die Anzahl dieser fokussiert. Die Möglichkeiten sollen hauptsächlich ikonisch oder symbolisch dargestellt werden. Weiters sollen die Aufgaben so gewählt werden, dass die Reihenfolge der ausgewählten Objekte wesentlich ist (Sill & Kurtzmann, 2019, S. 187).

3.5.2 Fünf Schritte nach Breiter et. al (2009)

Breiter et al. (2009, S. 53 f.) beschreiben fünf Schritte der Entwicklung von kombinatorischem Können. Zunächst wird auf eine gemeinsame Erarbeitungsphase verwiesen, welche in einem Halbkreis vor der Tafel stattfinden kann, wo den Schüler*innen mit konkretem Material die Aufgabe nähergebracht wird. Im Anschluss folgen fünf Schritte. In einem ersten Schritt sollen die Kinder für die zuvor gestellte Aufgabe selbstständig eine Frage finden und durch eigenständiges Nachdenken das Problem verinnerlichen. Wesentlich ist, dass die Lernenden zu diesem Zeitpunkt noch kein Arbeitsblatt ausgehändigt bekommen. In einem zweiten Schritt werden anschließend in Einzelarbeit Möglichkeiten gefunden, Skizzen angefertigt und zeichnerische Lösungen gesucht. Idealerweise sind die Schüler*innen bereits mit dem Anfertigen von Skizzen vertraut, so dass dieser Schritt wenig abbildhafte oder zeitaufwendige Lösungsskizzen beinhaltet. In einem dritten Schritt findet ein Austausch statt, in welchem die Tischnachbar*innen sich gegenseitig ihre Lösungen erklären und begründen. Im Anschluss werden in einem vierten Schritt die Lösungswege vorgestellt, indem sich die Schüler*innen wieder in einem Sitzkreis versammeln und ihre zahlreichen Lösungen darlegen. Ziel des dritten und vierten Schrittes sind die Erweiterung der kindlichen Perspektiven beim Lösen von Kombinatorikaufgaben sowie die Schulung der sprachlichen Ausdrucksfähigkeit. Als fünften und letzten Schritt werden die Ergebnisse geprüft, indem die Anzahl der Möglichkeiten mit dem Material vom Einstieg an der Tafel bildlich festgehalten wird.

3.5.3 Fünf-Phasenmodell nach Schipper et al. (2021)

Auch Schipper et al. (2021, S. 258 ff.) beschreiben ein „Fünf-Phasenmodell als Unterrichtsprinzip“, anhand welchem die Erarbeitung von kombinatorischen Aufgaben erfolgen kann. Diese fünf Phasen werden anbei anhand eines Beispiels, welches Schüler*innen einer zweiten Schulstufe in Partnerarbeit lösten, beschrieben. Aufgabe war, dass die Lernenden aus einem Umschlag, in welchem sich sechs Münzen – je zwei 50-Centmünzen, 20-Centmünzen und zehn Centmünzen – befinden, jeweils drei Münzen herausziehen müssen. Die Lernenden sollen herausfinden, welche Geldbeträge sie mit welchen Münzen ziehen können, wobei alle Möglichkeiten gefunden werden sollen. In einer ersten Phase wird konkret gehandelt und die Lösungen werden notiert (Schipper et al., 2021a, S. 258 f.). Bei der Erklärung der Aufgabe bekommen die Schüler*innen bereits die Möglichkeit, die bevorzugten Zusammenstellungen anzugeben. Anschließend versuchen sie alle Möglichkeiten mit Material zu finden (Schipper et al., 2021b, S. 301). Beim beschriebenen Beispiel ließ sich beobachten, dass die Schüler*innen zunächst die Möglichkeiten konkret handelnd aus dem Umschlag zogen und dann aufschrieben oder aufmalten. Da jedoch zu viele Möglichkeiten doppelt gezogen wurden, lösten die Kinder im Weiteren ohne das Spielgeld und malten oder schrieben die Lösungen nur auf (Schipper et al., 2021a, S. 258 f.).

In einem zweiten Schritt werden die Lösungen vorgestellt, beschrieben und verglichen. Hierbei gibt es die Möglichkeit, dass Protokollant*innen die unterschiedlichen Kombinationen notieren (Schipper et al., 2021b, S. 301). Im beschriebenen Beispiel berichtet eine Schüler*innengruppe, dass sie sich die Arbeit aufgeteilt hatten, dabei jedoch die doppelten Lösungen nicht berücksichtigten, weshalb diese zum Schluss wieder gestrichen werden mussten. Ein anderes Schüler*innenpaar erklärte, dass sie nur Beträge, ohne Münzen, notierten. Abschließend verglich die Lerngruppe die zwei vorkommenden Lösungsvarianten, das Aufmalen des Geldes sowie das Notieren der Beträge, und kam zum Entschluss, dass beide Darstellungsformen schlecht abbilden, ob alle Möglichkeiten gefunden wurden (Schipper et al., 2021a, S. 258 f.).

In der dritten Phase werden die Lösungen geordnet dargestellt. Aufgrund der Erkenntnis im zweiten Schritt, mussten die Lernenden nun ihre Darstellungsform so wählen, dass alle Möglichkeiten auf einen Blick sichtbar werden. Während dieses Prozesses konnten Kommentare von Schüler*innen gehört werden, welche anschließend in der Großgruppe vorgestellt wurden, damit alle Lernenden davon profitieren und übliche Darstellungsformen kennenlernen konnten. In dieser Phase kann bewiesen werden, dass Schüler*innen einer zweiten Schulstufe bereits über systematische Vorgehensweisen reflektieren und ihre Erkenntnisse begründen können (Schipper et al., 2021a, S. 259 f.). In dieser Phase kann auch eine Strategiekonferenz stattfinden, in welcher die Schüler*innen ihre Ergebnisse vergleichen. In dieser Konferenz wird den Fragen nachgegangen, ob alle Gruppen alle Möglichkeiten gefunden haben und wie viele es sind, ob Lösungen doppelt vorgekommen sind, welche unterschiedlichen Darstellungsformen verwendet werden und ob die Kombinationen auch anders dargestellt werden können (Schipper et al., 2021b, S. 301).

Als vierten Schritt wird die Aufgabenstellung variiert. Die Schüler*innen sollen gleiche oder unterschiedliche Strukturen in Kombinatorikaufgaben erkennen. Verändert werden kann die Anzahl, der Kontext oder der Aufgabentyp (Schipper et al., 2021b, S. 302 f.). Dadurch wird eine weitere Reflexionsebene eröffnet. Die Lernenden denken über Konsequenzen der veränderten Aufgabenstellung nach. Durch das Begründen wird der Weg für Transferleistungen sowie für Verallgemeinerungen geebnet (Schipper et al., 2021b, S. 302 f.).

Zuletzt, in einer fünften Phase, wird reflektiert und verallgemeinert. Alle Lösungsmöglichkeiten werden nochmals sichtbar gemacht, um einerseits die Leistungen der Schüler*innen hervorzuheben und andererseits als Art Beweisführung. Zudem erfahren die Lernenden nochmals, wie die Lösungen geordnet und übersichtlich dargestellt werden können. All jene Phasen in diesem Modell, die nach dem konkreten Handeln folgen, sind wesentliche Stufen auf einem Weg zum Erlernen einer systematischen Vorgehensweise (Schipper et al., 2021b, S. 303).

3.5.4 Drei Schritte nach Eichhorn (2024)

Eichhorn (2024, S. 5 f.) gibt drei Schritte für die methodische Progression bei der Arbeit mit dem Themenfeld der Kombinatorik an. In einem ersten Schritt soll eine kombinatorische Fragestellung eingeführt werden und die Kinder äußern zunächst Vermutungen über die Anzahl der Möglichkeiten. Die Schüler*innen bekommen die Chance, sich spielerisch mit der Fragestellung auseinanderzusetzen sowie unterschiedliche Problemhandlungen zu erkunden. Legematerial hilft beim handelnden Vorgehen. Ikonische Darstellungsmöglichkeiten, wie etwa Arbeitsblätter, helfen, um gefundene Kombinationen schriftlich festzuhalten. In einem zweiten Schritt werden gefundene Möglichkeiten sowie Vorgehensweisen im Plenum besprochen. Anordnungen der Möglichkeiten werden verglichen und gemeinsam sortiert, so dass die Lernenden erfahren, welche Lösungen fehlen oder welche doppelt vorhanden sind. Als dritten Schritt werden verschiedene Darstellungsformen erarbeitet und abgeglichen. Hierfür können Bilder oder Symbole, wie etwa Buchstaben oder Abkürzungen, verwendet werden. Vielen Kindern helfen Farben beim systematischen Vorgehen, für andere Lernende sind diese verwirrend. Daher sollten verschiedene Angebote zur Verfügung stehen. Abhängig vom Lernstand der Schüler*innen sowie von der gestellten Aufgabe ist es auch möglich, Tabellen, Baumdiagramme oder geometrische Darstellungen zu wählen.

3.5.5 Vergleich von Modellen

Werden die Phasen zur Umsetzung der Kombinatorik von Sill und Kurtzmann (2019), Breiter et al. (2009), Schipper et al. (2021a) und Eichhorn (2024) verglichen, zeigt sich, dass Sill und Kurtzmann (2019) zwei Phasen beschreiben und Eichhorn (2024) drei Schritte angibt, während Breiter et al. (2009) und Schipper et al. (2021a) je fünf Phasen nennen. Die Benennungen und Einteilungen der Schritte aller Autoren unterscheiden sich zwar, die Inhalte der Umsetzung sind jedoch weithingehend ident – ein systematisches Vorgehen wird immer angestrebt. In allen vier Modellen sollen Schüler*innen durch konkretes Handeln Möglichkeiten finden und diese mit selbstgewählten Darstellungsformen notieren. Lediglich Eichhorn (2024) gibt an, dass die Darstellungsformen zunächst erarbeitet werden. Zudem findet außer bei Sill und Kurtzmann (2019) immer ein Austausch zwischen den Schüler*innen statt, in welchen Lösungen vorgestellt und verglichen werden. Sowohl bei Breiter et al. (2009) als auch bei Schipper et al. (2021a) werden die Ergebnisse in der letzten Phase nochmals mit Material veranschaulicht. Als Unterschied lässt sich noch verzeichnen, dass Breiter et al. (2009), Sill und Kurtzmann (2019) und Eichhorn (2024) auch ein Arbeitsblatt miteinbeziehen, während Schipper et al. (2021a) auch die Aufgabenstellungen variiert.

3.6 Herausforderungen und Lösungsansätze

Kombinatorische Aufgaben sind meist Sachaufgaben. Daher zeigen sich die Schwierigkeiten, welche Schüler*innen beim Lösen von Sachbeispielen haben auch beim Lösen von Kombinatorikaufgaben. Für das Lösen von kombinatorischen Beispielen können dieselben Strategien wie für das Lösen von Sachaufgaben herangezogen werden. Damit die Schüler*innen den Sachverhalt erschließen, sollen sie sich zunächst fragen, worum es in der Aufgabe geht. Ziel ist hierbei nicht, dass genaue Informationen zur Sachsituation gewonnen werden, sondern dass die Lernenden eine allgemeine Beschreibung der Situation erhalten, damit sie sich in diese hineinversetzen können. Eine Antwortmöglichkeit für diese erste Frage wäre etwa, dass es sich um das Bauen eines Turmes handelt. Zur Erschließung des Sachverhaltes können auch Fragen nach dem Verstehen des Textes und der Darstellung mit Gegenständen helfen. Wird bei kombinatorischen Aufgaben ein Sachverhalt analysiert, ist es sinnvoll, dass eine der gesuchten Möglichkeiten angegeben ist, damit überlegt werden kann, wie diese zustande gekommen ist (Sill & Kurtzmann, 2019, S. 173 f.).

Weiters ist oftmals problematisch, dass zum Lösen von Kombinatorikaufgaben zu wenig Material vorhanden ist, um alle Möglichkeiten gleichzeitig abzubilden. Dies kann jedoch dazu genutzt werden, den Schüler*innen Möglichkeiten beizubringen, ihre gefundenen Anordnungen festzuhalten. In diesem Zusammenhang gibt es die Möglichkeit, die Lernenden mit dem Baumdiagramm, welches als Lösungshilfe dienen kann, bekannt zu machen. Hierbei soll jedoch mit kleinen Anzahlen begonnen werden, da die Darstellung ansonst schnell unübersichtlich wird. Erst nachdem die Lernenden den Inhalt verstanden haben, können Aufgaben mit mehrstufigen Sequenzen gewählt werden (Neubert, 2019c, S. 96).

Als weitere Herausforderung lässt sich laut Sill und Kurtzmann (2019, S. 174) feststellen, dass bei näherer Betrachtung der Lehrbücher viele Aufgabenstellungen im Bereich der Kombinatorik kaum praxisrelevant sind. Oftmals werden reale Vorstellungen oder Einschränkungen beim Ermitteln der Anzahlen nicht bedacht. Eine möglichst große Lebensnähe sowie Praxisrelevanz haben etwa Sachverhalte zum Erstellen eines Menüs, zum Bekleiden von Puppen, Ermitteln von unterschiedlichen Wegen zu einem Ort, das Zusammensetzen von Türmen, Tieren oder Figuren, das Öffnen von einem Zahlenschloss oder das Zusammenstellen von Personengruppen.

Zudem beschreiben Sill und Kurtzmann (2019, S. 3) die Problematik, dass viele Lehrkräfte im Primarschulbereich eine unzureichende Ausbildung für solide Fachkenntnisse im Themengebiet der Stochastik aufweisen. Musilek et al. (2023, S. 87 ff.) untersuchten das Vorwissen von Studierenden an drei pädagogischen Hochschulen in Wien und Niederösterreich. Die Studie zeigt Mängel sowohl bei der Einschätzung des eigenen Wissens im Bereich der Daten, Wahrscheinlichkeiten und der Kombinatorik, als auch in unterrichtlichen Erfahrungen auf. Weder im eigenen Unterricht noch bei Hospitationen konnten viele Erfahrungen in diesem Themenbereich gesammelt werden. Vor allem in Hinblick auf die Implementierung des Themenbereichs im neuen Lehrplan (BMBWF, 2023) zeigen diese Ergebnisse die Notwendigkeit eines intensiven Inputs in der Ausbildung von Primarstufenlehrer*innen. Eine Thematisierung des Themenbereichs der Daten, Wahrscheinlichkeiten und der Kombinatorik im Studium ist notwendig, damit sowohl die Grundlagen als auch die Handlungskompetenzen von angehenden Lehrpersonen erweitert werden (Musilek et al., 2023, S. 93 f.). Außerdem sind auch Lehrpersonen gefordert, sich mit der Thematik auseinanderzusetzen (Apfler et al., 2023, S. 10). Daher muss diese bei Lehrerfortbildungen, Konferenzen und Tagungen angeboten werden. Zudem wäre es wünschenswert, dass hierbei praktische Umsetzungsmöglichkeiten für die Bearbeitung im Unterricht vorgestellt werden (Apfler et al., 2023, S. 5).

3.7 Resümee

Dieses Kapitel verfolgt das Ziel, die Kombinatorik in der Primarstufe näher zu beleuchten. Bis zur Lehrplanreform im Jahr 2023 war die Kombinatorik kein Themengebiet des Lehrplans aus dem Jahr 1986. Seit 2023 tritt der *neue Lehrplan* aufsteigend in Kraft, welcher für die dritte Schulstufe vorsieht, dass Schüler*innen kombinatorische Abzählfolgen durch Probieren erkunden, systematisch darstellen sowie lösen sollen. Dennoch wird im Bereich der Kombinatorik in der Grundschule bereits seit längerer Zeit geforscht. Eine Untersuchung von Herzog (2017) zeigt, dass Lernende der dritten Schulstufe Schwierigkeiten beim Lösen von kombinatorischen Aufgaben haben. Dies betont die Notwendigkeit der Thematisierung im Primarbereich. Weiters kommen Forschungen zu den Erkenntnissen, dass das Entwickeln von Strategien beim Lösen von Aufgaben hilft sowie dass die Lösungsrate bei der Arbeit mit Material höher ist als ohne. Einen signifikanten Einfluss auf die Leistungen im Kombinatorikbereich haben die mathematischen Interessen und Fähigkeiten. Verbessert werden können diese nur durch die Beschäftigung mit Problemstellungen aus der Kombinatorik. Weiters ist die Kombinatorik eng mit dem Problemlösen verbunden – Personen, die gut im Bereich der Kombinatorik sind, sind dies in der Regel auch beim Problemlösen.

Zudem gibt es weitere vielfältige Argumente für eine Thematisierung der Kombinatorik in der Primarstufe. Einerseits vermittelt diese Grundlagen für ein systematisches Denken, andererseits hat sie einen Bezug zur Lebenswelt von Kindern. Außerdem bringt die Kombinatorik im Anfangsunterricht durch das Bestimmen von Anzahlen Potential mit sich, bietet diverse Differenzierungsmöglichkeiten, legt einen Fokus auf den Lösungsprozess und trägt zur Förderung weiterer mathematischer Kompetenzen bei. Um all jene Potentiale in der Praxis umsetzen zu können, müssen methodisch-didaktische Überlegungen angestellt werden. Kombinatorische Beispiele können mithilfe eines dreistufigen Modells, dem E-I-S-Prinzip, erarbeitet werden. Bei diesem wird zunächst konkret mit Material gehandelt, ehe Bilder und Grafiken helfen, den Sachverhalt darzustellen und auf der dritten Stufe Aufgaben mit Zahlen erschlossen werden. In der Primarstufe ist die Arbeit mit Material wesentlich, da dieses beim Finden von Möglichkeiten mit einem spielerischen Ansatz sowie beim Entwickeln von systematischen Strategien hilft. Lernende erhalten einen experimentellen Unterricht mit vielschichtigen Zugangsmöglichkeiten. Kombinatorikaufgaben bieten oft verschiedene Lösungswege, weshalb sie sich gut für differenziertes Arbeiten eignen. Differenziert werden kann hierbei bei den Aufgabenstellungen selbst, beim Finden von Lösungswegen, beim Interpretieren von Beispielen sowie durch Zusatzaufgaben.

Werden die Lösungsprozesse von Schüler*innen der Primarstufe im Bereich der Kombinatorik betrachtet, zeigt sich, dass sowohl die Strategien als auch die Darstellungsformen vielfältig sind und oftmals in einer Verbindung zueinanderstehen. Bei den Lösungsstrategien wird zwischen der systematischen Abzählstrategie, dem Schieben, dem Teilen, der Fixplatzstrategie, dem Raten, dem Rechnen, der Spontanaussage, dem Transfer und dem Drehen unterschieden. Als Darstellungsformen können Baumdiagramme, Netzdarstellungen, Tabellen, Bilder, Zifferndarstellungen oder Typografien voneinander abgegrenzt werden. Wesentlich ist, dass es keine Verallgemeinerung der idealen Darstellungsform für Schüler*innen im Grundschulalter gibt. Kombinatorisches Können lässt sich idealerweise durch eine methodische Progression entwickeln. Die Entwicklung von kombinatorischen Kompetenzen stellen verschiedene Autoren anhand unterschiedlicher Modelle vor. Hierbei gibt es zwar Unterschiede in der Anzahl der Phasen, der Benennungen sowie der Einteilung der einzelnen Schritte, die Inhalte sind jedoch weithingehend gleich. Ziel ist immer die Entwicklung eines systematischen Vorgehens, welches Lernende durch konkretes Handeln mit Material entwickeln sollen. Auch die Darstellungsformen können Schüler*innen immer selbst wählen. Kombinatorische Aufgaben bringen jedoch auch Herausforderungen mit sich, wie etwa, dass diese häufig Sachaufgaben sind, weshalb Lernende zunächst Informationen aus einer Sachsituation erschließen müssen. Zudem haben Lehrkräfte im Primarbereich oft eine unzureichende Ausbildung für die Vermittlung von stochastischen Inhalten, weshalb es notwendig ist, dass dieser Bereich vermehrt Einzug in die Lehreraus- und -fortbildung findet. Im nun folgenden Kapitel wird näher darauf eingegangen, welche mathematische Teilbereiche durch die Kombinatorik gefördert werden, um einen umfassenden Blick zu erhalten und die Kombinatorik in den Mathematikunterricht der Primarstufe einzubetten.

4 Förderung durch Kombinatorik

Die Kombinatorik durchzieht einerseits viele Teilbereiche der Mathematik und andererseits kann sie gut mit anderen Unterrichtsfächern verknüpft werden (Neubert, 2019b, S. 37). Aus diesem Grund wird im folgenden Kapitel zunächst auf die Förderung allgemeiner mathematischer Kompetenzen durch die Kombinatorik eingegangen, ehe die inhaltlichen Kompetenzen in diesem Zusammenhang thematisiert werden. Auch der Zusammenhang zwischen der Kombinatorik und der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird dargelegt.

4.1 Förderung allgemeiner mathematischer Kompetenzen

Beim Lösen von kombinatorischen Aufgaben werden allgemeine mathematische Kompetenzen entwickelt (Breiter et al., 2009, S. 53). Die allgemeinen mathematischen Kompetenzen in den österreichischen Bildungsstandards sind das Modellieren, Operieren, Kommunizieren sowie Problemlösen (BIFI & BMUK, 2011, S. 8). Auch Schipper et al. (2021a, S. 258) betonen, dass durch kombinatorische Aufgaben Kompetenzen, wie das Modellieren, Argumentieren, Kommunizieren und Problemlösen gefordert und gefördert werden. Weber und Ott (2022, S. 12) beschreiben ebenfalls, dass prozessbezogene[1] Kompetenzen, besonders jene des Darstellens, durch kombinatorische Aufgaben fokussiert werden. Aus diesem Grund wird anbei auf die Förderung einiger allgemeiner Kompetenzen durch die Kombinatorik näher eingegangen.

4.1.1 Kommunizieren

In den österreichischen Bildungsstandards ist das Kommunizieren eine allgemeine mathematische Kompetenz, welche das Verbalisieren, Begründen und Darstellen von mathematischen Sachverhalten beinhaltet (BIFI & BMUK, 2011, S. 8). Neubert (2019b, S. 53) führt an, dass das Kommunizieren darauf abzielt, die eigenen Vorgehensweisen sowie Prozesse des Denkens für Außenstehende verständlich zu machen. Zudem sollen andere Lösungswege verstanden, zusammen erarbeitet, diskutiert und reflektiert werden. Auch Herzog et al. (2017, S. 267) führen an, dass die kommunikative Komponente dazu dient, die verschiedenen Darstellungsformen in einen Austauschprozess zu bringen, wodurch bereits bestehendes Wissen der Schüler*innen vertieft werden kann, aber auch neue Ideen angeregt werden. Schlussfolgernd ist laut Neubert (2019b, S. 53) das Kommunizieren mit dem Darstellen eng verbunden.

Das Kommunizieren kann besonders durch Sozialformen wie Partner- oder Gruppenarbeiten gefördert werden. Diese bedürfen Arbeitsformen, welche die Schüler*innen zum Austauschen ihrer Erkenntnisse anregen oder ein gemeinsames Ausarbeiten der Aufgabe bedingen. Gerade die Kombinatorik bietet sich für solche Aufgaben an, da verschiedene Lösungsstrategien verwendet werden und diese Anlass für Gespräche bieten. Lernende können sich ihr Vorgehen erläutern und über Vorteile sowie Nachteile sprechen. Zudem werden auch gemeinsam Lösungsmöglichkeiten für kombinatorische Aufgaben entwickelt. Möglich wäre, dass ein Kind handelnd Möglichkeiten sucht und ein anderes diesen Vorgang zu Protokoll bringt und überprüft, ob Doppelungen vorkommen. Wesentlich ist hierbei das Darlegen des eigenen Denkprozesses für andere. Sowohl jüngere als auch ältere Schüler*innen können oft Lösungswege finden, diese jedoch nicht erklären. Grund hierfür ist, dass die Begründungskompetenz oft in keinem Zusammenhang mit der Problemlösekompetenz steht. Schüler*innen können Aufgaben lösen, aber die Lösung nicht verbal ausdrücken (Neubert, 2019b, S. 53). Neubert (2019a, S. 21) führt als Herausforderung an, dass es für Kinder oft schwierig ist, den eigenen Lösungsweg zu erläutern sowie zu argumentieren, warum alle Lösungsmöglichkeiten ausfindig gemacht wurden. Die Begründungskompetenz hängt hierbei oft nicht mit der Problemlösekompetenz zusammen. Konkret bedeutet dies, dass die Schüler*innen zwar die kombinatorische Aufgabe lösen, den Prozess jedoch nicht verbalisieren können. Daraus resultierend lässt sich nach Neubert (2019b, S. 53) der Schluss ziehen, dass die Fachsprache zunehmend im Unterricht miteinbezogen werden soll, damit sich die Verbalisierungsfähigkeit entwickeln kann.

Kombinatorische Aufgaben haben auch ein hohes Potential für die Entwicklung von Kompetenzen im Bereich des Darstellens (Neubert, 2019b, S. 52). Im Praxishandbuch für Mathematik für die vierte Schulstufe (2011, S. 8) wird Darstellen als Unterbereich der allgemeinen mathematischen Kompetenz Kommunizieren angeführt. Darstellen meint „das Übertragen mathematischer Inhalte in eine andere Form der Repräsentation“ (BIFI & BMUK, 2011, S. 12). Beim Bearbeiten von mathematischen Aufgaben sollen sinnvolle Repräsentationsformen erschaffen, gewählt oder verwendet werden (BIFI & BMUK, 2013, S. 12). Im Kontext der Kombinatorik bedeutet dies die Entwicklung einer Repräsentation von kombinatorischen Problemen, welche alle möglichen Kombinationen sowie Variationen aufzeigt. Unterschieden wird hierbei zwischen Darstellungen, welche die Aufgabenstellungen selbst enthalten und Darstellungen, die Schüler*innen helfen, den Lösungsweg darzulegen (Berger, 2023, S. 266), da über diesen leicht der Überblick verloren wird (Schipper et al., 2021a, S. 263).

Die meisten kombinatorischen Aufgaben bieten diverse Darstellungsformen für den Prozess der Lösung an. Lehrkräfte müssen für ihren Unterricht entscheiden, ob sie den Schüler*innen eine bestimmte Darstellungsform anbieten und wenn ja, welche, oder ob sie den Lernenden selbst eine Form der Abbildung finden lassen. Haben Schüler*innen den entsprechenden Freiraum, ist das Vergleichen von gefundenen Wegen sowie der dazugehörigen Darstellung wesentlich. Es empfiehlt sich, den Lernenden nach der Formulierung der Fragestellung die

Chance zu geben, Darstellungsformen selbstständig zu suchen und diese sowie ihre Lösung zu präsentieren. Sollen jedoch spezielle Formen der Darstellung, wie etwa das Baumdiagramm thematisiert werden, muss dies explizit Unterrichtsinhalt sein (Neubert, 2019b, S. 52 f.).

Allgemein bietet die Darstellung der Lösungsprozesse von Schüler*innen einen Einblick in das mathematische Verständnis sowie in die grundlegenden Vorstellungen der Lernenden. Durch die Art und Weise, wie Lösungen dargestellt werden, können diese Vorstellungen sichtbar werden. Von großer Bedeutung ist hierbei, welche Informationen die Lernenden als relevant und welche als irrelevant einschätzen und darlegen (Herzog et al., 2017, S. 267).

4.1.2 Modellieren

Das Modellieren ist ebenfalls eine allgemeine mathematische Kompetenz der österreichischen Bildungsstandards. Es umfasst jene Fähigkeit, bei der Schüler*innen Sachsituationen in ein Modell der Mathematik übersetzen müssen (BIFI & BMUK, 2011, S. 12). Bearbeiten Lernende kombinatorische Aufgaben, so muss eine reale in eine mathematische Situation gebracht werden. Werden die Schritte des Vorgehens bei kombinatorischen Aufgaben mit jenen bei üblichen Sachaufgaben verglichen, zeigen sich jedoch einige Besonderheiten. Kombinatorische Aufgaben sind oftmals nur ein kurz formulierter Text, weshalb das Verstehen der Aufgabe sowie das Begreifen der Handlungsaufgabe nur selten Schwierigkeiten hervorrufen. Zudem brauchen Lernende zum Lösen kein mathematisches Modell oder keine Rechenaufgabe, sondern müssen passende Strategien sowie Darstellungen finden. Daher gestalten sich weitere Vorgehensschritte als schwierig. Das Validieren ist bei Aufgaben der Kombinatorik zumeist ein Überprüfen, ob alle Möglichkeiten gefunden wurden. Zusammenfassend bleibt die Schlussfolgerung, dass der Weiterentwicklung der Modellierungskompetenzen durch Aufgaben der Kombinatorik Grenzen gesetzt sind (Neubert, 2019b, S. 54).

4.1.3 Problemlösen

In der Mathematik ist ein Problem eine Aufgabe, welche gelöst werden muss, bei der jedoch die Lösung nicht offensichtlich ist (Reiss & Hammer, 2013, S. 56). Kipman (2018, S. 9) vergleicht verschiedene Definitionen des Begriffs *Problem* und fasst zusammen, dass alle Definitionen eine nicht offensichtliche Lösung suchen und dass die Suche von einem Anfangszustand zu einem Zielzustand kognitiv sowie kreativ anspruchsvoll ist. Es gibt eine Barriere zwischen dem Ist und dem Soll und diese soll durch produktives Denken überwunden werden. Für das Überwinden dieser werden jedoch keine Lösungsalgorithmen angewendet. Auch Reiss und Hammer (2013, S. 56) beschreiben, dass ein Problem in der Mathematik eine Aufgabe ist, welche gelöst werden muss, bei der jedoch die Lösung nicht offensichtlich ist. „Problemlösen bedeutet also insbesondere die intensive Beschäftigung mit einer Aufgabe, ohne dass von Anfang an klar ist, welche Mechanismen, Algorithmen, Inhalte oder Sätze zum Erfolg führen.“ (Reiss & Hammer, 2013, S. 56)

Das Problemlösen als allgemeine mathematische Kompetenz umfasst das Erkennen und Anerkennen von innermathematischen Problemen sowie das Entdecken und Nutzen von Strategien, um eine Aufgabe zu lösen (BIFI & BMUK, 2011, S. 8). Der Mathematikunterricht der Primarstufe verfolgt das Ziel, dass Schüler*innen durch vielfältige Tätigkeiten Zusammenhänge erkunden, Strukturen herauslösen und untersuchen können. Damit eng verbunden ist die Entwicklung von Problemlösekompetenzen, da die Lernenden selbstständig mathematische Problemstellungen lösen sollen. Bei Problemaufgaben müssen Schüler*innen auf mathematische Grundlagen zurückgreifen, dieses Wissen neu ordnen und strukturieren, um auf einen Lösungsweg zu kommen. Im Gegenzug gibt es auch Routineaufgaben, bei welchen ein bekanntes Verfahren abgerufen wird und zu einer Lösung führt (BIFI & BMUK, 2013, S. 5).
Laut Kipman (2018, S. 127 f.) sind erfahrungsgemäß gute Kombinatoriker*innen auch gute Problemlöser*innen. Dieser Zusammenhang wurde bereits in einer vorgestellten Studie im Kapitel 3.2.5 näher erläutert. Aufgaben aus der Kombinatorik eignen sich für Schüler*innen zum Problemlösen. Kombinatorische Aufgaben mit kleinen Zahlen können mit einfachen heuristischen Hilfsmitteln gelöst werden (Kipman, 2018, S. 34). Vorteil ist hierbei, dass Problemstellungen aus dem Kombinatorikbereich meist einfach verstanden und dargestellt werden können (Ulm, 2010, S. 17). „Kombinatorikunterricht ist per se ein Problemlöseunterricht (Kipman, 2018, S. 136). Kombinatorische Aufgaben brauchen keine Algorithmen, die auswendig gelernt werden müssen, sondern sie erfordern mathematische Situationen, welche exemplarisch bearbeitet werden. Hierfür braucht es geeignete Strategien (Ulm, 2010, S. 17). Ein handlungsorientierter Unterricht ermöglicht den Schüler*innen Heurismen kennenzulernen. Dies ist der effektivste Weg, um das Lösen von Problemen zu erlernen und zu verbessern (Kipman, 2018, S. 169).

4.2 Förderung inhaltlicher mathematischer Kompetenzen

Kombinatorisches Denken bezieht sich auf viele mathematische Teilgebiete. In der Primarstufe ist die Kombinatorik kein eigenständiges Stoffgebiet, sondern primär ein Aspekt, welcher sich durch den gesamten Unterricht der Mathematik zieht (Neubert, 2019b, S. 37). Neben den allgemeinen mathematischen Kompetenzen führen die österreichischen Bildungsstandards auch inhaltliche mathematische Kompetenzen an, welche sich in die Kompetenzbereiche des

Arbeitens mit Zahlen, mit Operationen, mit Größen und mit der Ebene und dem Raum untergliedern (BIFI & BMUK, 2011, S. 17 f.). Auch diese können durch Kombinatorik gefördert werden. Im folgenden Kapitel werden Beispiele beschrieben, wie kombinatorische Problemstellungen in anderen Inhaltsfeldern der Mathematik thematisiert werden können.

4.2.1 Zahlen und Operationen

Die Kombinatorik lässt sich gut mit der Leitidee der Zahlen und Operationen im Bereich der Arithmetik verknüpfen, da Aufgaben der Kombinatorik selbst Teil dieser sind. Wesentlich ist hierbei der Aspekt der Multiplikation (Neubert, 2019b, S. 37), auf welchen bereits in Kapitel 2.3.1. hingewiesen wurde.

Diesem Bereich lassen sich besonders Aufgaben zur Zahlenzerlegung zuordnen, welche besonders im Anfangsunterricht zur Vorbereitung der Addition fokussiert werden. Hierfür werden oft Materialien herangezogen, welche Zahlenzerlegungen zufällig erzeugen, wie etwa Schüttelboxen, das Werfen von Wendeplättchen oder auch Zahlenhäuser. In diesem Zusammenhang ergibt sich eine kombinatorische Aufgabe, wenn etwa Schüler*innen zehn Wendeplättchen werfen und daraus eine Rechnung bilden. Anschließend wird nochmals geworfen und wieder eine Rechnung gesucht. Die Lernenden müssen verschiedene Möglichkeiten suchen, was sich auf das erste wesentliche Ziel der Kombinatorik bezieht. Weiterführend kann die Aufgabe gestellt werden, alle Möglichkeiten zu finden, was das zweite Ziel der Kombinatorik anspricht (Neubert, 2019b, S. 37 f.).

Ein weiteres Beispiel aus dem Bereich der Zahlen und Operationen ist das Finden von Zahlen aus Ziffernkärtchen. Um Zahlenbereiche zu üben, wird Schüler*innen häufig die Aufgabe gestellt, aus vorgegebenen Ziffern nach bestimmten Kriterien Zahlen zu bilden. Hierbei wird oft nach der größten oder kleinsten möglichen Zahl gefragt. Diese Aufgaben können dem Bereich der Permutation oder der Variation, abhängig davon, ob eine Ziffer mehrmals vorkommen darf, zugeordnet werden (Neubert, 2019b, S. 39).

4.2.2 Größen

Auch im Bereich der Größen und des Messens können kombinatorische Überlegungen wesentlich sein. Dies bezieht sich hauptsächlich auf das Bilden von einer Größe aus anderen Größen auf verschiedene Arten. Oftmals wird dies genutzt, wenn Geldbeträge mit verschiedenen Scheinen und Münzen zusammengesetzt werden. Ein Beispiel hierzu kann etwa sein, dass 13 Cent mit verschiedenen Münzen aufgelegt werden müssen. Ziel ist, dass alle Möglichkeiten gefunden werden. Neben Kenntnissen in der Kombinatorik sind hierbei jedoch auch Vorkenntnisse im Bereich des Währungssystems notwendig. Eine solche Übung kann auch in anderen Größenbereichen eingesetzt werden (Neubert, 2019b, S. 41).

4.2.3 Ebene und Raum

Inhalte der Kombinatorik können auch mit jenen der Geometrie verknüpft werden. Ein Beispiel hierfür kann etwa die Bestimmung der kürzesten Wege entlang der Kanten eines Quaders oder Würfels sein. Bei einer Thematisierung der Körper im Unterricht werden geometrische Eigenschaften und die Entwicklung von Begriffen, wie etwa jene der Fläche, des Winkels, der Ecke oder der Kante, vorwiegend angestrebt. Aufgaben aus dem Bereich der Kombinatorik, wie das Finden des kürzesten Weges entlang der Kanten, können vor allem für leistungsstärkere Lernende gut integriert werden. Dies ermöglicht eine Forderung auf einer anderen Ebene (Neubert, 2024, S. 99).

Neubert (2024, S. 99 f.) führt ein Beispiel an, welches Schüler*innen der zweiten sowie der vierten Schulstufe gestellt wurde, bei dem ein Marienkäfer und eine Blume auf einem Würfel wohnen. Die Würfelecken sind dabei mit den Ziffern von eins bis acht markiert. Der Marienkäfer, der in der ersten Ecke wohnt, möchte am kürzesten Weg zur Blume, welche in der Ecke sieben lebt. Wesentlich ist, dass sich der Käfer nur auf den Kanten bewegen kann. Gefragt wird bei dieser Aufgabenstellung einerseits nach der Anzahl der Kanten, welche der Käfer mindestens zurücklegen muss und andererseits nach der Anzahl der verschiedenen Wege. Die beiden Punkte liegen auf einer Raumdiagonale durch den Körper. Als Material stehen Würfel aus Styropor zur Verfügung, auf welchen gefundene Wege mit Faserstiften markiert werden können. Nahezu alle Schüler*innen fanden so den kürzesten Weg sowie auch die Anzahl der Möglichkeiten. Für die jüngeren Kinder waren die Begriffe der Kante sowie der Ecke noch schwierig, konnten jedoch schnell geklärt werden. Jene Schüler*innen, die die zweite Schulstufe besuchen, brauchten länger für das Lösen der Aufgabe und konnten nicht direkt die Vollständigkeit aller kürzesten Wege erkennen. Zwei Kinder der vierten Schulstufe erkannten im Gegensatz jedoch sogar, dass jeder der kürzesten Wege aus zwei voneinander unterscheidbaren waagrechten sowie einer senkrechten Kante besteht. Aufgrund dessen, dass im Lösungsprozess auch geometrische Begriffe verwendet werden, trägt die Aufgabe zum Festigen des Begriffsverständnisses sowie zur Raumvorstellung bei.

4.3 Förderung durch Wahrscheinlichkeitsaufgaben

Der Zusammenhang zwischen der Kombinatorik und der Wahrscheinlichkeit wird im Kapitel 2.1.2 näher thematisiert. Oft wird das Denken in Wahrscheinlichkeiten isoliert vom Denken in

Möglichkeiten betrachtet. Die Verknüpfung der beiden Inhalte hat aber ein hohes Potential. Kombinatorische Fragestellungen ermöglichen viele Lernanlässe, welche helfen, das Denken in Möglichkeiten zu einem Denken in Wahrscheinlichkeiten weiterzuentwickeln (Sturm & Huhmann, 2022, S. 2). „Ein entscheidender Vorteil liegt darin, dass durch ein vorgeschaltetes Denken in Möglichkeiten die Menge aller möglichen Ergebnisse bereits ermittelt und dargestellt wurde-“ (Sturm & Huhmann, 2022, S. 2) Zudem verwenden Kinder der Primarstufe häufig Darstellungsformen, welche ermöglichen, durch Strukturieren, Sortieren und Ordnen alle Möglichkeiten ausfindig zu machen und somit die Bestimmung der Ergebnismenge vereinfachen (Sturm & Huhmann, 2022, S. 2).

Haben Schüler*innen beispielsweise zuvor die kombinatorische Aufgabe gelöst, welche Möglichkeiten es gibt, einen Dreierturm aus einem roten, blauen und einem gelben Legostein zu bauen, kann dieses Beispiel zum Ermitteln von Eintrittswahrscheinlichkeiten verwendet werden. Als Anschlussaufgabe können sich die Schüler*innen vorstellen, dass sie mit zugebundenen Augen in eine Kiste mit allen möglichen Dreiertürmen greifen. Die Lernenden gewinnen, wenn sie einen Turm ziehen, der einen blauen Legostein in der Mitte hat. Ziel ist, dass die Eintrittswahrscheinlichkeit ermittelt wird. Dazu braucht es die Identifikation aller möglichen Dreiertürme sowie aller Türme, bei denen ein blauer Stein in der Mitte ist. Alle Möglichkeiten sollten gesondert, beispielweise auf einem Blatt Papier, dargestellt sein. Erstellen die Schüler*innen nun merkmalsorientierte Mengenbilder, so ermöglicht ihnen dies ein Umordnen und Umstrukturieren. Auf Basis dieser kann ermittelt werden, wie wahrscheinlich ein Ergebnis eintreten wird (Sturm & Huhmann, 2022, S. 4 f.).

Damit Wahrscheinlichkeitsaufgaben auf einem klassisch-kombinatorischen Weg gelöst werden können, müssen Anzahlen bestimmt werden. In der Grundschule sind die Anzahlen jedoch üblicherweise so klein, dass ein systematisches Bestimmen der Anzahlen kaum von Bedeutung ist. Werden jedoch die Häufigkeiten von möglichen Würfelsummen beim Würfeln von zwei Würfeln bestimmt, ist ein systematisches Vorgehen auch in der Primarstufe sinnvoll. Zunächst müssen unterschiedliche Häufigkeiten bestimmter Würfelsummen erforscht werden. Ab der zweiten Schulstufe können anschließend alle Zahlenzerlegungen der Zahlen von zwei bis zwölf systematisch aufgelistet, analysiert sowie begründet werden. Die Möglichkeiten können unterschiedlich dargestellt werden. Entweder sie werden mit Ziffern oder Würfelbildern veranschaulicht, in einem Baumdiagramm dargestellt oder in einer Additionstabelle abgebildet (Neubert, 2019b, S. 44). Die Abbildung anbei zeigt die Darstellungsform der Additionstabelle für das in diesem Kapitel beschriebene Beispiel.

+	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

Tabelle 2: Additionstabelle (Neubert, 2019b, S. 44)

4.4 Resümee

Ziel des Kapitels *Förderung durch Kombinatorik* ist es, aufzuzeigen, welche Teilbereiche der Mathematik durch die Kombinatorik gefördert werden können. Durch kombinatorische Aufgaben werden die allgemeinen mathematischen Kompetenzen der österreichischen Bildungsstandards, das Kommunizieren, Modellieren, Operieren und Problemlösen, gefördert. Durch das Kommunizieren über kombinatorische Aufgaben können Schüler*innen ihr Vorgehen sowie ihre Entscheidungen für andere Lernende verständlich machen. In Gruppen- oder Partnerarbeiten können Lösungswege verglichen, gemeinsam erarbeitet, diskutiert und reflektiert werden. Dabei ist es oft eine Herausforderung den eigenen Lösungsweg zu verbalisieren, weshalb die Fachsprache im Unterricht gezielt gefördert werden soll. Mit dem Kommunizieren eng verbunden ist das Darstellen. Im Bereich der Kombinatorik wird beim Darstellen zwischen Repräsentationen, welche die Aufgabe selbst enthalten, und Darstellungen, welche zur Darlegung des Lösungsweges dienen, unterschieden. Stellen Schüler*innen Lösungsprozesse dar, bieten diese einen Einblick in deren mathematisches Verständnis. Weiters ist das Modellieren für kombinatorische Aufgaben entscheidend, da beim Lösen Lernende reale in mathematische Situationen bringen müssen. Aufgrund dessen, dass Aufgabenstellungen von Kombinatorikaufgaben oft sehr kurz formuliert sind, bringt das Begreifen der Handlungsaufgabe oft Schwierigkeiten mit sich. Selbiges gilt auch für das Lösen, da bei diesem oftmals keine Rechnungen, sondern vielmehr Strategien und Darstellungen notwendig sind. Des Weiteren wird durch die Kombinatorik auch die Problemlösefähigkeit gefördert. Als Vorteil lässt sich hierbei verzeichnen, dass kombinatorische Problemstellungsaufgaben zumeist leicht verständlich sind und mit einfachen heuristischen Mitteln gelöst werden können. Der Unterricht im Bereich der Kombinatorik ist eigentlich ein Problemlöseunterricht, da dieser keine auswendig gelernten Algorithmen, sondern vielmehr exemplarische mathematische Situationen braucht, welche durch einen handlungsorientierten Unterricht kennengelernt werden können. Neben der

Förderung der allgemeinen mathematischen Kompetenzen bezieht sich kombinatorisches Denken auch auf inhaltliche mathematische Kompetenzen, zu welchen in den österreichischen Bildungsstandards die Kompetenzbereiche der Operationen, Größen, Ebenen und Räume sowie das Arbeiten mit Zahlen gehören. Aufgaben der Kombinatorik sind selbst Aufgaben der Arithmetik, weshalb sie sich gut mit der Leitidee der Zahlen und Operationen verknüpfen lassen. Zentral ist hierbei der Aspekt der Multiplikation, aber auch Aufgaben aus dem Bereich der Zahlenzerlegung oder zum Finden von Zahlen aus bestimmten Ziffernkärtchen können in diesem Bereich eingegliedert werden. Im Bereich der Größen wird die Kombinatorik hauptsächlich beim Bilden von Größen aus anderen Größen zentral, während sie im Kompetenzbereich der Ebene und des Raums hauptsächlich mit der Geometrie verknüpft wird, wenn etwa der kürzeste Weg bestimmt werden soll. Zusätzlich zu den allgemeinen und inhaltlichen Kompetenzen ist die Kombinatorik auch eng mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung verknüpft. Damit Wahrscheinlichkeitsaufgaben handelnd gelöst werden können, muss zuerst die Anzahl der Möglichkeiten ermittelt werden. In der Primarstufe wird hierbei mit kleinen Zahlen vorgegangen. Nach dem Ermitteln der Möglichkeiten wird das Denken in Wahrscheinlichkeiten angebahnt. Im nächsten Kapitel wird der Fokus auf praktische Umsetzungsbeispiele der Kombinatorik für die Primarstufe gelegt.

5 Konkrete Umsetzung

Im folgenden Kapitel werden konkrete Unterrichtsbeispiele für die Kombinatorik in der Primarstufe vorgestellt. Die Aufgaben werden nach den Typen kombinatorischer Probleme in das allgemeine Zählprinzip, die Permutation, die Variation sowie die Kombination unterteilt.

Gute Aufgaben aus dem Bereich der Kombinatorik in der Primarstufe sollen Situationen thematisieren, welche Schüler*innen emotional ansprechen. Zudem sollen Lernende selbst praktisch arbeiten, damit sie Erfahrungen sammeln und ordnen können. Sie brauchen Möglichkeiten, das Ziel durch verschiedene Wege zu erreichen. Lösungen müssen dabei auf diversen Repräsentationsebenen möglich sein. Außerdem sollen die Aufgaben so gewählt werden, dass diese in andere Stoffgebiete übertragen werden können und die Entwicklung von allgemeinen Kompetenzen im Bereich der Mathematik fördern (Neubert, 2024, S. 90). Wesentlich ist aber, dass Grundschulkinder noch nicht mit den Fachtermini oder mit Formeln zur Berechnung der möglichen Anzahlen konfrontiert werden (Klunter et al., 2020a, S. 19).

Die Bearbeitung von kombinatorischen Aufgaben in der Primarstufe verfolgt das Ziel, dass die Schüler*innen zunehmend ihre Fähigkeit, Probleme systematisch anzugehen, weiterentwickeln. Daher müssen nicht immer neue Aufgaben zur Verfügung gestellt werden. Im Laufe der Volksschulzeit können Aufgaben wiederholend aufgegriffen werden, um eine Systematisierung der Lösungsprozesse hervorzurufen, indem bekannte Strukturen von den Schüler*innen erkannt werden (Schipper et al., 2021a, S. 264). Schipper et al. (2019b, S. 320) gehen darauf ein, dass im Unterricht ausgewählte Aufgabentypen der Kombinatorik intensiv und mehrfach mit verschiedenen Variationen der Beispiele gelehrt werden sollen, anstatt die Vielfalt der verschiedenen Aufgabentypen abzudecken.

Neubert (2019c, S. 97) empfiehlt, dass mit Permutationsaufgaben begonnen wird. Dennoch sollen die Schüler*innen auch mit Aufgaben der Kombination und der Variation Erfahrungen sammeln, wenngleich diese den Lernenden schwerer fallen.

5.1 Allgemeines Zählprinzip

Im folgenden Kapitel werden Beispielaufgaben vorgestellt, welche sich dem Typus des allgemeinen Zählprinzips zuordnen lassen.

5.1.1 Was kann der Nikolaus anziehen?

Bei der Aufgabe *Was kann der Nikolaus anziehen* wird den Schüler*innen zunächst ein Brief vom Nikolaus vorgelesen, in welchem dieser den Kindern erklärt, dass ihm Knecht Ruprecht heuer mehr Gewand in den Koffer eingepackt hat. Da ihm alle Mützen und Mäntel in seinem Koffer gut gefallen, möchte er gerne auch alle verwenden. Er fragt die Kinder, welche Möglichkeiten es gibt, dass er einen roten, blauen und braunen Mantel anziehen sowie eine rote, blaue, gelbe und braune Mütze aufsetzen kann (Breiter et al., 2009, S. 54 f.).

Abbildung 8: Was kann der Nikolaus anziehen? (Breiter et al., 2009, S. 56)

Breiter et al. (2009, S. 55) beschreiben die Umsetzung der Aufgabe in einer zweiten Schulstufe. Beim Vorlesen des Nikolausbriefes wurden eine Abbildung vom Nikolaus sowie die bunten Mützen und Mäntel aus Tonpapier aufgelegt. Im Anschluss konnten die Schüler*innen die verschiedenen Möglichkeiten der Bekleidung ausprobieren. Zunächst wählten sie die für sie schönste Kombination. Im Anschluss wurde die Aufgabe selbstständig bearbeitet. Grundsätzlich könnte dies mit der Produktregel und der Malaufgabe $3 \cdot 4 = 12$ ausgerechnet werden. Eine rechnerische Lösung ist jedoch nicht von den Kindern zu erwarten, da erst im Verlauf der zweiten Schulstufe die Multiplikation eingeführt wird. Das Beispiel muss daher zählend gelöst werden. Trotz einer größeren Anzahl an Möglichkeiten konnte etwa die Hälfte der Schüler*innen alle Lösungsmöglichkeiten finden. Viele Kinder arbeiteten hierbei systematisch. Etliche Schüler*innen dachten sich Symbole für den Mantel und die Mütze aus, um zeitsparender alle Möglichkeiten abzubilden.

5.1.2 Schneemann

Die Aufgabe *Schneemann* eignet sich für Schüler*innen der ersten sowie zweiten Schulstufe und lässt sich dem kombinatorischen Aspekt der Multiplikation zuordnen. Es bietet sich an, diese Aufgabe im Rahmen der Einführung der Multiplikation mit den Schüler*innen zu lösen. Zunächst kann über den Winter gesprochen werden. Die Schüler*innen sollen weiterführend darüber nachdenken, was für das Bauen eines Schneemannes benötigt wird. Ziel ist, dass verschiedene Schneemänner gebaut werden. Zur Auswahl stehen drei Kübeln in rot, gelb und blau sowie zwei Besenborsten in gelb und braun. Die Lernenden müssen ermitteln, wie viele verschiedene Schneemänner gebaut werden können. Zur Hilfe dient ein Arbeitsblatt, auf welchem die Kinder die Eimer sowie Besenborsten ausmalen können (Klunter et al., 2020a, S. 23). Dieses veranschaulicht die Abbildung anbei:

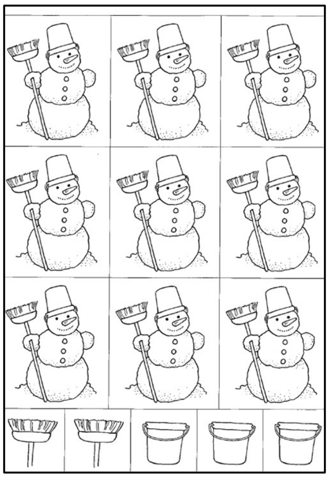


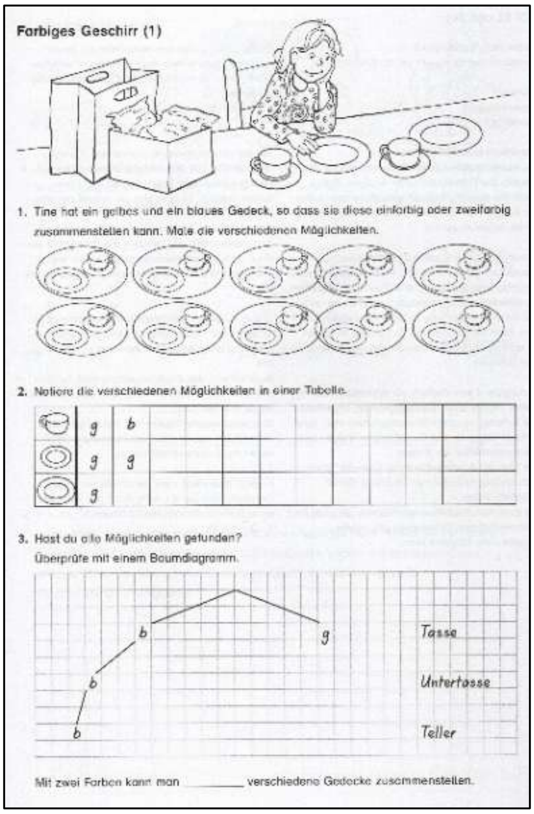
Abbildung 9: Der Schneemann (Klunter et al., 2020a, S. 24)

In einem ersten Schritt sollen die Schüler*innen selbstständig erkunden. Einige Lernende werden dabei wild herumprobieren, andere geordnet vorgehen. Systematisch kann entweder zunächst die Farbe der Kübel gleichbleiben und jene der Besenborsten wechselt oder umgekehrt. In beiden Fällen gibt es gesamt sechs Möglichkeiten. Drei verschiedene Kübel und zwei unterschiedliche Besenborsten ergeben $3 \cdot 2 = 6$ Möglichkeiten. Beide systematische Vorgehensweisen sollen auch weiterführend mit den Lernenden besprochen werden. Sofern Schüler*innen alle Schneemänner am Arbeitsblatt ausgemalt haben, werden Doppelungen auftreten, welche die Lernenden in einem nächsten Schritt finden sollen. Diese Aufgabe regt ein systematisches Vorgehen an (Klunter et al., 2020a, S. 23).

Für besonders leistungsstarke Schüler*innen kann die Aufgabe erweitert werden, indem zusätzlich die Frage nach der Anzahl der Möglichkeiten gestellt wird, welche es gibt, wenn der Schneemann nicht nur Steine als Knöpfe trägt, sondern auch Kastanien zur Auswahl stehen. Hierbei verdoppeln sich die Möglichkeiten. Weiters können beispielsweise neben den zwei verschiedenen Besenborstenfarben auch vier verschiedene Kopfbedeckungen zur Auswahl stehen (Klunter et al., 2020a, S. 23).

5.1.3 Farbiges Geschirr

Die Aufgabe *Farbiges Geschirr* lässt sich ebenfalls dem kombinatorischen Aspekt der Multiplikation zuordnen und eignet sich für die dritte und vierte Schulstufe. Zunächst kann über das Decken eines Frühstückstisches gesprochen werden. Wichtig ist, dass dabei der Begriff *Gedeck* erläutert wird. Im Anschluss können die Schüler*innen ein erstes Arbeitsblatt bearbeiten, bei welchem verschiedene Gedecke zu sehen sind. Die erste Aufgabe lautet: „Tine hat ein gelbes und ein blaues Gedeck, so dass sie diese einfarbig oder zweifarbig zusammenstellen kann. Male die verschiedenen Möglichkeiten.“ (Klunter et al., 2020b, S. 52) In einem zweiten Auftrag müssen die Möglichkeiten in einer Tabelle eingeschrieben werden. Bei beiden Aufgaben gibt es zunächst nur blaues und gelbes Geschirr. Die acht verschiedenen Möglichkeiten können durch Anmalen oder mit der Tabelle gefunden werden. Anschließend werden die Ergebnisse verglichen, wobei darauf geachtet wird, dass keine Möglichkeiten doppelt vorkommen oder ausgelassen wurden. Aus diesem Grund wird in der dritten Aufgabe ein systematisches Vorgehen angestrebt. Es soll ein Baumdiagramm erstellt werden, was die Konzentration der Kinder fordert. Insgesamt gibt es bei dieser Aufgabe acht verschiedene Möglichkeiten. Werden zwei unterschiedliche Tassen mit zwei verschiedenen Untertassen kombiniert, ergeben sich 2 · 2 = 4 Möglichkeiten. Werden diese noch jeweils mit den zwei verschiedenen Tellern kombiniert, gibt es 2 · 2 · 2 = 8 Möglichkeiten (Klunter et al., 2020b, S. 51). Dieses Arbeitsblatt veranschaulicht die Abbildung anbei.



Farbiges Geschirr (1)

1. Tine hat ein gelbes und ein blaues Gedeck, so dass sie diese einfarbig oder zweifarbig zusammenstellen kann. Male die verschiedenen Möglichkeiten.

2. Notiere die verschiedenen Möglichkeiten in einer Tabelle.

	g	b										
	g	g										
	g											

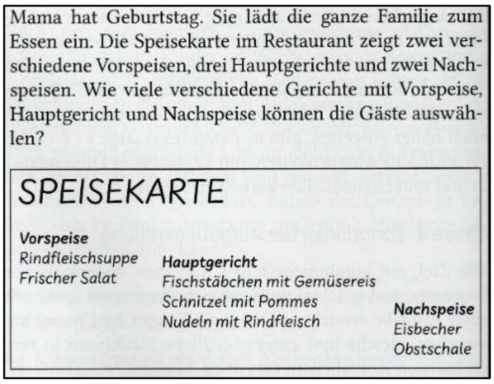
3. Hast du alle Möglichkeiten gefunden?
Überprüfe mit einem Baumdiagramm.

Mit zwei Farben kann man ________ verschiedene Gedecke zusammenstellen.

Abbildung 10: Farbiges Geschirr (Klunter et al., 2020b, S. 52)

In einer weiterführenden Aufgabe werden das gelbe und blaue Gedeck durch ein rotes ergänzt. Es erhöht sich somit die Anzahl der Möglichkeiten. Hierbei muss nun systematisch vorgegangen werden, um alle Möglichkeiten ausfindig zu machen (Klunter et al., 2020b, S. 51).

5.1.4 Speisekarte


Mama hat Geburtstag. Sie lädt die ganze Familie zum Essen ein. Die Speisekarte im Restaurant zeigt zwei verschiedene Vorspeisen, drei Hauptgerichte und zwei Nachspeisen. Wie viele verschiedene Gerichte mit Vorspeise, Hauptgericht und Nachspeise können die Gäste auswählen?

SPEISEKARTE

Vorspeise
Rindfleischsuppe
Frischer Salat

Hauptgericht
Fischstäbchen mit Gemüsereis
Schnitzel mit Pommes
Nudeln mit Rindfleisch

Nachspeise
Eisbecher
Obstschale

Abbildung 11: Speisekarte (Schipper et al., 2019b, S. 320)

„Wie viele verschiedene Gerichte mit Vorspeise, Hauptgericht und Nachspeise können die Gäste auswählen?“ (Schipper et al., 2019b, S. 320) Das erste Ziel dieser Aufgabe, welches sich für die dritte Schulstufe eignet, ist es, ein grundlegendes Verständnis für die Produktregel zu schaffen. Wesentlich ist, dass, wie bei allen kombinatorischen Aufgaben, zunächst geklärt wird, welche Auswahlen getroffen werden können und dass bei diesem Beispiel keine Wahlmöglichkeit ausgelassen werden darf. Jedes Menü besteht aus einer Vor-, einer Haupt- und einer Nachspeise. Bereits beim Besprechen der Aufgabe sollen die Schüler*innen Beispiele für mögliche Anordnungen finden. Anschließend können die verschiedenen Menüs in Einzel- oder Gruppenarbeiten mit Materialien, beispielsweise mit Fotos oder Kärtchen, ausfindig gemacht werden. Anschließend kann eine Rechenkonferenz stattfinden, in welcher alle Möglichkeiten geordnet dargestellt werden. Hierfür eignet sich die Struktur eines Baumdiagramms (Schipper et al., 2019b, S. 320 f.).

Durch eine Veränderung der Anzahl der Speisen lässt sich die Aufgabe gut variieren. Als Zusatz kann gestellt werden, dass es keine Nachspeise gibt, dass ein viertes Hauptgericht angeboten wird oder dass es je drei Vor-, Haupt- und Nachspeisen gibt. Ermittelt wird immer die Anzahl der Möglichkeiten, ein Menü zusammenzustellen (Schipper et al., 2019b, S. 321).

5.2 Permutation

Im Folgenden werden Beispiele vorgestellt, welche sich dem kombinatorischen Problemtyp der Permutation zuordnen lassen.

5.2.1 Fenster schmücken

Abbildung 12: Fenster schmücken (Breiter et al., 2009, S. 56)

Der Aufgabe *Fenster schmücken*, welche die vorliegende Abbildung veranschaulicht, liegt ein Anordnungsproblem zugrunde. Sie lässt sich als kombinatorische Aufgabe der Permutation ohne Wiederholung einordnen. Entscheidend ist hierbei nur die Anordnung der Sterne. Es handelt sich um eine Aufgabe ohne Wiederholung, da ein Stern innerhalb einer Möglichkeit nur einmal angeordnet werden kann (Breiter et al., 2009, S. 53 f.).

Breiter et. al (2009, S. 54) berichten über eine Durchführung dieser Aufgabe, bei welcher die Schüler*innen Moosgummisterne verwenden konnten. Zunächst trat die Anzahl der Möglichkeiten in den Hintergrund, da die Aufgabe als Einstieg in eine Sequenz zur Kombinatorik verwendet wurde. Die Lernenden sollten zunächst ihre schönste Anordnung präsentieren. Ziel war, dass die Kinder einer zweiten Schulstufe die Aufgabe verstehen und verschiedene Möglichkeiten ausfindig machen. Das Anordnungsproblem war jedoch für viele Schüler*innen keine Schwierigkeit. Mehr als die Hälfte der Lernenden konnte alle sechs Möglichkeiten finden. Die Schüler*innen wählten zum Großteil eine ikonische Darstellung, indem sie die farbigen Sterne aufzeichneten. Die Möglichkeiten wurden durch intuitives Probieren ermittelt.

5.2.2 Türme bauen

Neubert (2024, S. 91) beschreibt eine Aufgabe aus dem Bereich der Permutation, bei welcher aus drei verschiedenfarbigen Steinen ein Turm gebaut werden muss. In der ersten Schulstufe bekommen die Lernenden Bausteine in drei Farben und erhalten die Aufgabe: „Versucht, so viele verschiedene Türme mit drei Etagen wie möglich zu bauen! Dabei müsst ihr beachten, dass jede der drei Farben in jedem Turm einmal vorkommt!“ (Neubert, 2024, S. 91).

Zunächst ist wesentlich, dass die Lernenden die Aufgabenstellung verstehen und unterschiedliche Türme bauen. Es wird bewusst auf die Frage nach der Gesamtanzahl aller möglichen Türme verzichtet. Zu Beginn war es für einige Lernende herausfordernd, einige Turmmöglichkeiten zu bauen. Andere Schüler*innen konnten erst durch das Finden aller Möglichkeiten gefordert werden. Für die Kinder der ersten Schulstufe erwies es sich als schwierig, Strategien zum Finden der vollständigen Lösung zu entwickeln. Auch wenn letztlich nahezu alle Lernenden die sechs Möglichkeiten finden konnten, wurden im Lösungsprozess gleiche Türme mehrmals gebaut. Die Aufgabe wurde ebenfalls auch Kindern der vierten Schulstufe gestellt. Es zeigte sich, dass diese ein planmäßigeres Vorgehen hatten. Es waren weniger Versuche notwendig, alle Möglichkeiten ausfindig zu machen (Neubert, 2024, S. 91).

Laut Neubert (2024, S. 91) eignet sich diese Permutationsaufgabe für den Einstieg in die Kombinatorik. Vor allem jüngere Schüler*innen erfassen den Sachverhalt gut, da sie mit dem Bauen von Türmen vertraut sind. Zudem können die Lernenden selbst handeln und das dafür benötigte Material kann einfach besorgt werden. Werden etwa Steckwürfel verwendet, können alle Möglichkeiten gleichzeitig dargestellt werden. Zudem können Lösungen auf unterschiedlichem Niveau gefunden werden.

Weiterführend kann Schüler*innen einer vierten Schulstufe die Aufgabe gestellt werden, dass ein Kind blaue, gelbe und rote Bausteine hat und daraus Türme aus je drei Bausteinen bauen will. Dabei soll jeder Turm drei verschieden Farben haben, diese sollen jedoch in unterschiedlicher Reihenfolge angeordnet werden. Nachdem dieses Beispiel gelöst wurde, wird den Kindern eine weitere Aufgabe gestellt, bei der nun eine vierte Farbe hinzukommt und Türme aus vier unterschiedlichen Farben gebaut werden sollen. Die zweite Aufgabe ermöglicht einigen Lernenden bereits ein systematisches Vorgehen (Neubert, 2024, S. 93 f.).

5.2.3 Tiere

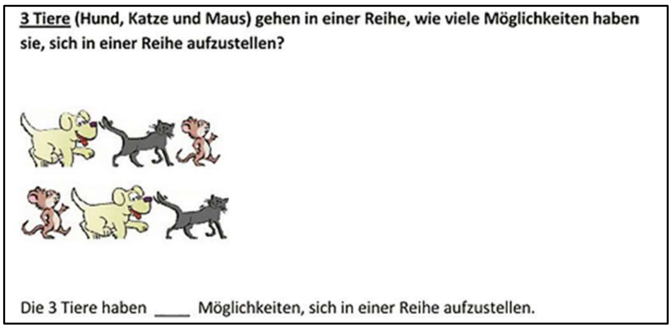


Abbildung 13: Tiere (Kipman, 2018, S. 144)

Bei dieser Permutationsaufgabe bekommen die Schüler*innen die Angabe, dass drei Tiere spazieren gehen. Gefragt wird danach, wie viele Möglichkeiten die Tiere haben, sich aufzustellen. Als Material stehen Plastiktiere zur Verfügung. In einem weiteren Schritt kommt noch ein Tier hinzu, welches mit den anderen Tieren spazieren gehen möchte. Die Schüler*innen sollen nun ermitteln, wie viele Möglichkeiten es jetzt gibt, dass sich die Tiere aufstellen. Zunächst soll selbstständig probiert werden. Erst in weiterer Folge werden die Schüler*innen gefragt, ob sie bereits alle Möglichkeiten gefunden haben und gegebenfalls durch Hilfestellungen unterstützt werden müssen (Kipman, 2015, S. 61).

Neubert (2024, S. 94 f.) führt eine ähnliche Aufgabe an, bei welcher vier Tiere gemeinsam auf einer Mauer balancieren und überlegen, wie viele Möglichkeiten es für eine Reihenfolge gibt. Zur Verfügung stehen Plüschtiere, von welchen nicht genügend vorhanden sind, so dass bereits gefundene Anordnung wieder auseinandergenommen werden müssen. Daher ist es wichtig die Möglichkeiten zu notieren. Diese Aufgabe kann noch schwieriger gestaltet werden, indem es Zusatzbedingungen gibt, wie etwa, dass beschlossen wird, dass die Schnecke nicht als letzte aufgereiht werden darf. Weiters wäre auch möglich, dass die Maus nicht vor der Katze laufen möchte oder dass der Rabe nicht hinter der Katze geht, damit er sie nicht mit dem spitzen Schnabel zwickt.

5.2.4 Bunte Drachen

Zwei Kinder bauen einen Drachen, dessen Schwanz mit Schleifen verschönert wird. Zur Verfügung stehen drei Schleifen – eine rote, eine blaue und eine grüne. Die Kinder überlegen, in welcher Reihenfolge diese an den Schwanz des Drachen gebunden werden sollen und wie viele Möglichkeiten es hierfür gibt (Eichhorn, 2024, S. 15). Diese Aufgabe eignet sich für Schüler*innen der dritten und vierten Schulstufe. Grundgedanke ist eine Permutation ohne Wiederholung. Insgesamt gibt es $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Möglichkeiten, die drei Schleifen anzuordnen. Zur Unterstützung kann farbiges Legematerial dienen. Wesentlich ist, dass erklärt wird, dass jede Schleife beziehungsweise jede Farbe nur einmal vorkommen darf und dass die Reihenfolge der Schleifen wichtig ist. Der Vorgang der Schüler*innen wird entsprechend deren Kompetenzstand sein (Eichhorn, 2024, S. 14).

In einer ersten Aufgabe können die Schüler*innen vorgegebene Schleifen rot, blau und grün anmalen, ausschneiden und auflegen. Auf einem Arbeitsblatt können anschließend die gefundenen Reihenfolgen aufgemalt werden. Diese Aufgabe veranschaulicht die Abbildung anbei.

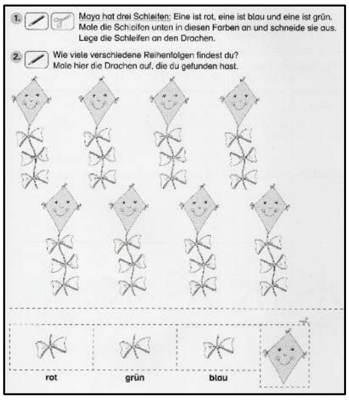


Abbildung 14: Bunte Drachen 1 (Eichhorn, 2024, S. 15)

Die Lernenden finden zunächst auf einer enaktiven Ebene mit Legematerial verschiedene Reihenfolgen. Diese werden in einer ikonischen Auflistung festgehalten. Da das Legematerial immer nur die Darstellung einer Reihenfolge ermöglicht, ist ein Festhalten wesentlich (Eichhorn, 2024, S. 14).

In einer weiteren Aufgabe kommt noch eine lila Schleife hinzu. Nun soll die Anzahl der Möglichkeiten der Anordnung für alle vier Schleifen gesucht werden. Es steht wieder Legematerial zur Verfügung. Leistungsstärkere Schüler*innen können bereits ohne diesem systematisch auf einem Arbeitsblatt alle Möglichkeiten aufzeichnen. Bei diesem zweiten Arbeitsblatt sollen die Möglichkeiten entweder aufgezeichnet oder mit Farben und Buchstaben notiert werden. Systematisch würde etwa vorgegangen werden, wenn die Lernenden immer eine Farbe festhalten und die anderen Farben vertauschen. Wesentlich ist, dass die Lösungsansätze beziehungsweise die Ergebnisse im Anschluss sortiert und besprochen werden. Doppelte Möglichkeiten werden gestrichen und fehlende Anordnungen ergänzt (Eichhorn, 2024, S. 14 ff.). Die Abbildung anbei veranschaulicht ein passendes Arbeitsblatt zu dieser Aufgabe.

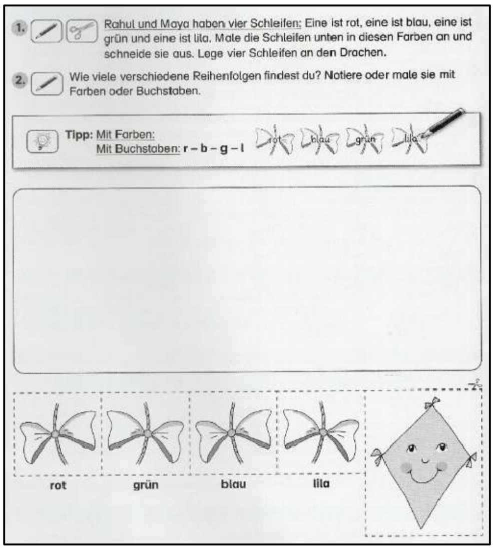


Abbildung 15: Bunte Drachen 2 (Eichhorn, 2024, S. 16)

In weiteren Aufgaben können die Möglichkeiten in einem Baumdiagramm veranschaulicht werden. Hierbei ist jedoch empfohlen, dass dieses gemeinsam erarbeitet wird. Zunächst können in einem vorgefertigten Diagramm die Schleifen in der richtigen Farbe angemalt werden. Etwas schwieriger wird es, wenn das Baumdiagramm zum Teil bereits ausgefüllt wurde und der Rest noch ergänzt werden muss. In einer schwierigeren Variante müssen die Reihenfolgen selbst übersichtlich dargestellt werden (Eichhorn, 2024, S. 14 ff.).

5.3 Kombination

Anbei werden Beispiele, welche dem kombinatorischen Problemtyp der Kombinatorik zugeordnet werden können, vorgestellt. Alle Beispiele eignen sich für den Mathematikunterricht der Primarstufe.

5.3.1 Schlittenrennen

Abbildung 16: Schlittenrennen (Breiter et al. 2009, S. 56)

„Anna, Marie, Felix und Stefan wollen mit zwei Schlitten Rennen fahren. Auf jedem Schlitten sitzt ein Kind. Welche Rennen müssen stattfinden, damit jedes Kind gegen jedes Kind gefahren ist?“ (Breiter et al., 2009, S. 56)

Bei diesem Beispiel handelt es sich um eine kombinatorische Grundaufgabe der Kombinatorik ohne Wiederholung. Die Anzahl der Möglichkeiten ist für Schüler*innen überschaubar. Bei vier Kindern können insgesamt sechs Rennen stattfinden. Aufgrund dessen, dass die Namen der Lernenden vorgegeben sind, wird erwartet, dass die Schüler*innen zum Großteil symbolische Lösungen finden werden (Breiter et al., 2009, S. 54).

Breiter et al. (2009, S. 54) beschreiben die Durchführung dieser Aufgabe und stellen fest, dass der Austausch mit anderen Kindern sinnvoll ist. Für einige Lernende war nicht klar, dass die Anordnung der Elemente keine Rolle spielt. Ein Bub hat notiert, dass es zwölf Möglichkeiten gibt, ehe er in einer Diskussion mit einem anderen Kind darauf hingewiesen wurde, dass er einige Rennen doppelt aufgeschrieben und diese anschließend gestrichen hat. Die beschriebene Lösung sollte jedoch nicht als falsch gewertet werden. Vielmehr ist sie eine weitere mögliche Interpretation der Aufgabe. Ein Großteil der Schüler*innen veranschaulichte die Lösungen symbolisch. Es wurden entweder die gesamten Namen oder nur die Anfangsbuchstaben notiert (Breiter et al., 2009, S. 54).

5.3.2 Eiskugeln

Bei einem Eisverkäufer gibt es die Sorten **Vanille, Schokolade, Erdbeere** und **Nuss**.
Du darfst Dir **2 Kugeln** aussuchen, möchtest aber **keine Sorte doppelt** kaufen.

Wie viele Möglichkeiten hast Du?

Abbildung 17: Eiskugeln (Kipman, 2018, S.142)

Kipman (2018, S. 153 ff.) beschreibt eine Aufgabe zur Kombination, bei der den Schüler*innen vier Eissorten zur Auswahl stehen, von denen sich die Kinder zwei Sorten aussuchen sollen. Gefragt wird nach der Anzahl der Möglichkeiten. Wichtig ist, dass hierbei die Reihenfolge zunächst keine Rolle spielt. Sollten die Lernenden nachfragen, ob eine Sorte mehrmals verwendet werden kann, so ist diese Frage zu verneinen. Zum Lösen der Aufgabe stehen Materialien – Eiskugeln sowie eine Eiswaffel aus Plastik – zur Verfügung. Im Anschluss kann den Schüler*innen jene Aufgabe erneut gestellt werden, nur dürfen diesmal drei Sorten ausgesucht werden. Die Reihenfolge wird zunächst wieder nicht berücksichtigt. Auch hier darf wieder keine Sorte doppelt verwendet werden.

5.3.3 Hände schütteln

Dieses Beispiel eignet sich für die dritte und vierte Schulstufe. Ein Mädchen namens Annika feiert Geburtstag und lädt vier Freundinnen namens Biggi, Christina, Dörte und Elena ein. Bei der Begrüßung geben sich alle die Hände. Gefragt wird danach, wie oft die Hände geschüttelt werden. Bei diesem Beispiel ist das Bilden von Paaren aus Elementen einer Menge, aus den Gästen mit sich selbst, wesentlich. Hierbei kann eine Tabelle beim Finden der Lösung helfen (Quak, 2010, S. 63).

begrüßt	Annika	Biggi	Christina	Dörte	Elena
Annika	AA	AB	AC	AD	AE
Biggi	BA	BB	BC	BD	BE
Christina	CA	CB	CC	CD	CE
Dörte	DA	DB	DC	DD	DE
Elena	EA	EB	EC	ED	EE

Tabelle 3: Hände schütteln, eigene Darstellung, in Anlehnung an Quak (2010, S. 63)

Insgesamt ergeben sich 25 Begrüßungen. Da sich jedoch niemand selbst begrüßt, fällt die diagonale Reihe, welche mit grün markiert wurde, weg. Somit verbleiben 20 Begrüßungen. Wenn sich jedoch Annika und Biggi die Hand reichen, hat bereits auch Biggi Annika begrüßt, weshalb die Anzahl der Möglichkeiten noch halbiert werden muss. Somit gibt es 10 Begrüßungen (Quak, 2010, S. 63). Die Doppelungen sind in der Tabelle orange markiert.

5.3.4 Gärtnerei

In einer Gärtnerei gibt es Primeln in rot, blau, weiß und gelb. Je drei Blumen werden in eine Schale gesetzt, wobei diese einfärbig, zweifärbig oder dreifärbig sein kann. Gefragt wird nach der Anzahl der verschiedenen Farbkombinationen, die die Gärtnerei potenziell anbietet. Durch Probieren sollen die Schüler*innen möglichst alle Farbkombinationen ausfindig machen. Beim Vergleichen wird sich zeigen, ob Kombinationen von den Schüler*innen ausgelassen oder doppelt aufgezeichnet wurden. In einer weiteren Aufgabe soll ermittelt werden, wie viele Möglichkeiten es für einfarbige, zweifarbige und dreifarbige Schalen gibt. Die Möglichkeiten werden in einer Tabelle eingetragen. Diese Aufgabe regt zu einem systematischen Vorgehen an. Die Reihenfolge wird hierbei nicht berücksichtigt, da die Anordnung der Primeln in den Schalen nicht wesentlich ist. Gemeinsam wird nach entsprechenden Farbkombinationen gesucht. Mit Buchstaben oder mit Farbkreide kann nebenbei ein Tafelbild entwickelt werden. So erhalten Kinder einerseits einen Überblick und andererseits wird ein systematisches Vorgehen gefördert (Klunter et al., 2020b, S. 54 f.). Das Arbeitsblatt anbei zeigt diese Aufgabe.

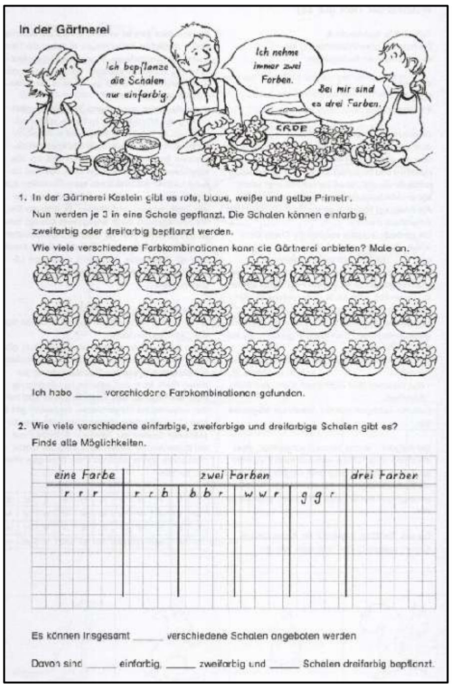


Abbildung 18: In der Gärtnerei (Klunter et al., 2020b, S. 55)

5.4 Variation

Anbei werden Kombinatorikbeispiele der Primarstufe vorgestellt, welche dem kombinatorischen Problemtyp der Variation zugeordnet werden können.

5.4.1 Eiskugeln

Die Aufgabe *Eiskugeln* verknüpft Kipman (2015) mit der Kombinationsaufgabe, welche im Kapitel 5.3.2 bereits erläutert wurde. Grundsätzlich sollte hier mit der Variationsaufgabe begonnen werden, ehe die Kombinationsaufgabe durchgeführt wird. Sollten die Lernenden bei dieser Aufgabe zunächst mit der Kombinationsaufgabe beginnen, muss die Variationsaufgabe im Anschluss noch erfragt werden (Kipman, 2018, S. 155).

Bei dieser Aufgabe sind wieder vier Eissorten vorgegeben, von welchen sich die Schüler*innen zwei Sorten aussuchen dürfen. Gefragt wird nach der Anzahl der Möglichkeiten. Die Reihenfolge spielt nun eine wesentliche Rolle. Vanille-Mango und Mango-Vanille sind somit zwei unterschiedliche Möglichkeiten. Zunächst sollen die Schüler*innen selbstständig probieren, anschließend können aber auch Hilfestellungen gegeben werden, indem darauf hingewiesen wird, dass noch etwas fehlt oder gefragt wird, ob bereits alle Möglichkeiten gefunden wurden. Im Anschluss wird die Aufgabe erweitert und es müssen drei aus vier Sorten gewählt werden. Die Reihenfolge ist wieder wichtig (Kipman, 2015, S. 60 f.).

Auch Schipper et al. (2019b, S. 325) beschreiben eine Aufgabe aus dem Bereich der Variation, bei der zwei von vier Eissorten ausgewählt werden. Da das Mädchen, welche die Sorten auswählt, eine Feinschmeckerin ist, ist es für sie wichtig, ob sie zuerst Vanille und anschließend Schokolade isst oder umgekehrt. Diese Aufgabenstellung veranschaulicht die Abbildung anbei.

> Die Eisdiele bietet vier verschiedene Eissorten an. Klara möchte zwei Kugeln Eis unterschiedlicher Sorten in einem Hörnchen haben. Als Feinschmeckerin ist es für sie ein großer Unterschied, ob sie z.B. zuerst Vanille, dann Schokolade schlecken kann oder umgekehrt. Wie viele verschiedene Auswahlmöglichkeiten hat sie?

Abbildung 19: Eiskugeln (Schipper et al., 2019b, S. 325)

Gefragt wird nach der Anzahl der Möglichkeiten, um sich ein Eis auszusuchen. Die Aufgabe kann im Unterricht spielerisch erarbeitet werden, indem ein Kind Eisverkäufer*in spielt und die vier Sorten mit Plättchen unterschiedlicher Farben dargestellt werden. Die Anfangsbuchstaben der Sorten können in einer Vorlage eingetragen werden. Im Anschluss suchen die Kinder in Partnerarbeit die weiteren Möglichkeiten, ehe diese in einer Mathematikkonferenz vorgestellt und an der Tafel notiert werden. Bei einer systematischen Auflistung ist es leichter zu erkennen, ob alle Kombinationen gefunden wurden (Schipper et al., 2019b, S. 325).

5.4.2 Weihnachtsbasteln

In der Schule findet ein Weihnachtsbasar statt, für welchen Anhänger gebastelt werden. Hierfür wurden Sterne, Kugeln sowie Glocken ausgeschnitten. Je zwei dieser Elemente werden zu einem Anhänger zusammengefügt. Aufgabe ist es herauszufinden, wie viele verschiedene Weihnachtsanhänger gestaltet werden können (Eichhorn, 2024, S. 22).

Die Aufgabe *Weihnachtsbasteln* kann der kombinatorischen Figur der Variation mit Wiederholung zugeordnet werden. Insgesamt gibt es $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$ Möglichkeiten. Mit Legematerial können gemeinsam verschiedene Möglichkeiten gefunden werden. Wesentlich ist hierbei die Reihenfolge. Eine Glocke oben und ein Stern unten ergeben einen anderen Anhänger als ein Stern oben und eine Glocke unten. Zudem können auch Doppelungen vorkommen.

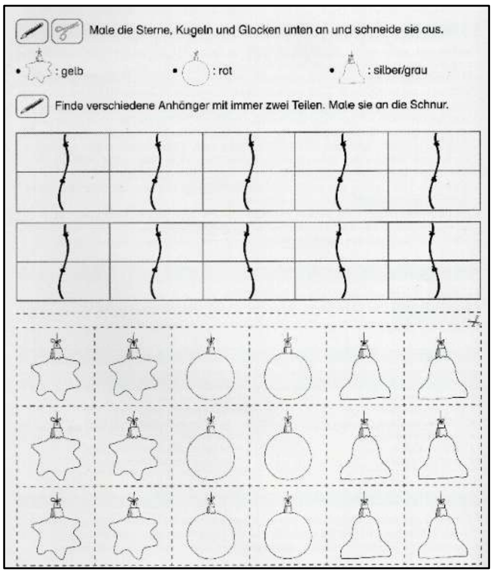


Abbildung 20: Weihnachtsbasteln (Eichhorn, 2024, S. 22)

In einem ersten Schritt finden die Schüler*innen enaktiv verschiedene Möglichkeiten mit Material und halten diese auf der ikonischen Ebene in einer Auflistung fest. Als Differenzierung können Lernende auch ohne Legematerial am Arbeitsblatt strukturiert arbeiten. Systematisch vorgegangen wird, wenn etwa ein Element immer für oben gewählt wird und mit allen weiteren Elementen kombiniert wird. Es können aber auch immer zwei Elemente ausgewählt und jeweils verschieden angeordnet werden. Wesentlich ist, dass die Ergebnisse sowie die Lösungsansätze im Anschluss besprochen und verglichen werden. Doppelte Anhänger müssen dabei erkannt und gestrichen werden. Als Darstellungsmöglichkeit können auch ein Baumdiagramm oder Tabellen verwendet werden. Für eine weitere Differenzierung ist eine Erweiterung der Anhängerelemente möglich (Eichhorn, 2024, S. 21).

5.4.3 Fahrradschloss

Die vierte Schulstufe hat demnächst Fahrradprüfung. Deshalb hat Tanja zum Geburtstag ein neues Fahrrad mit einem Zahlenschloss bekommen. Das Schloss benötigt eine Kombination aus vier Zahlen, um es zu öffnen. Tanja kann sich aber nur mehr an die erste und die zweite Zahl erinnern – die erste Zahl war eine null und die zweite Zahl eine fünf. Sie weiß noch, dass die restlichen beiden Zahlen größer als fünf waren. Gefragt wird nach der Anzahl der Möglichkeiten, welche sie probieren kann (Eichhorn, 2024, S. 37).

Jene Aufgabe ist der Variation mit Wiederholung zuzuordnen. Aus einer Menge, in diesem Fall aus Ziffern, werden je zwei gewählt und so angeordnet, dass die Reihenfolge wichtig ist. Sowohl für die dritte als auch für die vierte Zahl gibt es vier Möglichkeiten. Die Ziffern sechs, sieben, acht oder neun können probiert werden. Daher ergeben sich gesamt $4^2 = 4 \cdot 4 = 16$ Möglichkeiten. Wichtig ist, dass Ziffern doppelt vorkommen können und dass geklärt wird, warum nur die Ziffern von sechs bis neun verwendet werden (Eichhorn, 2024, S. 37).

In einem ersten Schritt können Ziffern ausgeschnitten, aufgelegt und gefundene Kombinationen notiert werden. Auf der enaktiven Ebene werden mithilfe von Legematerialien verschiedene Reihenfolgen ausfindig gemacht. Da mit dem Material nur eine Möglichkeit aufgelegt werden kann, ist es notwendig, die Zahlenkombinationen zu notieren. Als Differenzierung ist möglich, dass die Schüler*innen ohne Legematerial arbeiten und die Möglichkeiten sofort strukturiert notieren. Systemtisch vorgegangen wird beispielsweise, wenn eine Ziffer festgehalten und durch jeweils eine andere ergänzt wird. Im Anschluss können die Lösungsansätze verglichen werden (Eichhorn, 2024, S. 37).

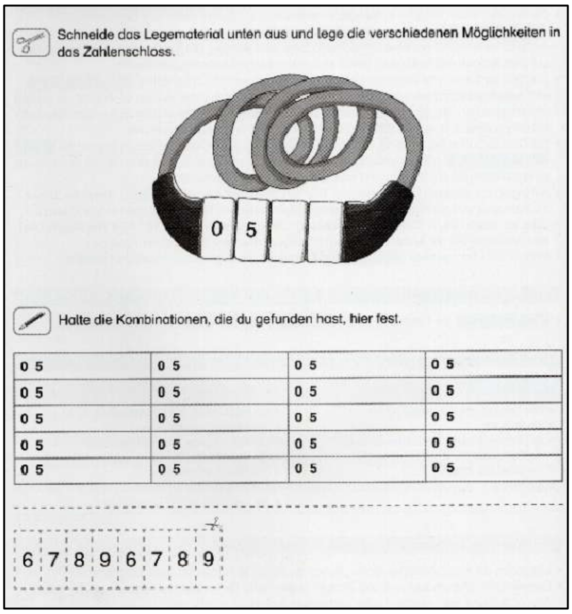


Abbildung 21: Fahrradschloss (Eichhorn, 2024, S. 38)

Weiterführend können ein Baumdiagramm oder eine Tabelle verwendet werden. Hierfür empfiehlt sich jedoch eine gemeinsame Arbeit mit Legematerial oder etwa mit dem Smartboard. Als Differenzierung können die Lernenden überlegen, wie sich ihre Darstellung verändert, wenn jede Ziffer nur einmal verwendet werden darf oder wie viele Möglichkeiten es gibt, wenn die Ziffern von null bis neun eingesetzt werden können. Je nach dem gewünschten Maß der Differenzierung kann die Anzahl der Ziffern variiert werden (Eichhorn, 2024, S. 37).

5.4.4 So viele Zahlen

Das Beispiel *So viele Zahlen* soll das Wissen über natürliche Zahlen ausbauen und Zusammenhänge des Zahlenraums erschließen. Es eignet sich für Schüler*innen der dritten und vierten Schulstufe und besteht aus fünf Aufgaben. Die Erste fragt danach, wie viele zweistellige Zahlen es gibt. Gedankengänge der Lernenden können hierbei etwa sein, dass auf der Hundertertafel alle Zahlen mit Ausnahme der Zahlen bis zehn sowie die 100 gestrichen werden und somit 90 Zahlen übrigbleiben. Weiters können die Schüler*innen daran denken, dass an der Zehnerstelle die Ziffern von eins bis neun stehen können und an der Einerstelle jene von null bis neun. Somit gibt es an der Zehnerstelle neun und an der Einerstelle zehn Möglichkeiten, woraus sich $9 \cdot 10 = 90$ Möglichkeiten ergeben. Als dritten Gedankengang kann so vorgegangen werden, dass die erste zweistellige Zahl die zehn ist und 19 die letzte zweistellige Zahl, die eine eins an der Zehnerstelle hat. Insgesamt gibt es also zehn Möglichkeiten mit der eins an der Zehnerstelle. Mit der zwei an der Zehnerstelle gibt es erneut zehn Möglichkeiten. Somit ergeben sich $9 \cdot 10 = 90$ Möglichkeiten. Es ist jedoch auch denkbar, dass Schüler*innen alle Zahlen aufschreiben und zählen, was jedoch sehr lange dauern wird. Wesentlich ist, dass alle Herangehensweisen erläutert und besprochen werden (Klunter et al., 2020b, S. 70 ff.).

In einer zweiten Aufgabe sollen alle dreistelligen Zahlen, welche aus Ziffernkärtchen mit den Ziffern eins, zwei, sechs und sieben gelegt werden können, gefunden werden. Diese Aufgabe lässt sich der kombinatorischen Figur der Variation ohne Wiederholung zuordnen, da jede Ziffernkarte nur einmal verwendet werden kann. Der Lösungsweg steht frei. Aufgrund einer geringen Anzahl können alle dreistelligen Zahlen aufgelistet werden. Steht die Ziffer eins an der Hunderterstelle, gibt es sechs Möglichkeiten. Dies wird anschließend mit den drei weiteren Ziffern wiederholt. Somit ergeben sich $4 \cdot 6 = 24$ Möglichkeiten (Klunter et al., 2020b, S. 70 ff.).

Die dritte Aufgabe fragt nach der kleinsten und nach der größten dreistelligen Zahl. Diese Frage sollte für die Lernenden relativ einfach zu beantworten sein. Weiters müssen die Lernenden angeben, wie viele dreistellige Zahlen es insgesamt gibt und ihr Vorgehen hierfür erklären. Für die Lösung dieser Aufgabe ist eine Verallgemeinerung der ersten Aufgabe notwendig. Jede Ziffer kann auch mehrmals in der Zahl vorkommen, weshalb es sich um eine Variation mit Wiederholung handelt. Für die Hunderterstelle ergeben sich insgesamt neun Möglichkeiten, da die Ziffer null an dieser nicht stehen kann. Für die Zehnerstelle und für die Einerstelle gibt es je zehn Möglichkeiten, woraus sich $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ Möglichkeiten für das Bilden von dreistelligen Zahlen ergeben. Zuletzt wird nachgefragt, wie oft die Ziffer drei bei dreistelligen Zahlen vorkommen kann. Für diese Aufgabe ist ein strategisches Vorgehen notwendig. Die Aufgabe ist sehr komplex und wird nicht von allen Schüler*innen gelöst werden können. Daher sollten auch Teilerfolge positiv bewertet werden (Klunter et al., 2020b, S. 70 ff.).

5.5 Resümee

Ziel dieses Kapitels ist es praktische Unterrichtsbeispiele und ihre konkrete Umsetzung aus dem Bereich der Kombinatorik in der Volksschule näher darzulegen. Wesentlich ist, dass gute Beispiele Schüler*innen emotional ansprechen, von ihnen handelnd und auf verschiedene Weisen bearbeitet werden können und dass Lösungen auf verschiedenen Ebenen dargelegt werden können. In der Primarstufe zielt der kombinatorische Unterricht darauf ab, die Fähigkeit der Schüler*innen zur systematischen Problemlösung zu fördern, indem Aufgaben wiederholt und bekannte Strukturen erkannt werden. Statt eine große Vielfalt an Aufgabentypen einzusetzen, sollte der Fokus auf einer intensiven und variantenreichen Bearbeitung ausgewählter Beispiele liegen. Durch vielfache Veränderungen, etwa durch das Hinzufügen von weiteren Ziffern oder Bausteinen, können Aufgabenbeispiele in ihrem Schwierigkeitsgrad angepasst werden. Allgemein wird empfohlen, mit Permutationsaufgaben zu beginnen, wenngleich Schüler*innen auch in den Bereichen der Kombination und der Variation Erfahrungen sammeln sollen. Nach der theoretischen Auseinandersetzung mit der Kombinatorik in der Primarstufe in den vorherigen Abschnitten, wird im folgenden Kapitel die empirische Untersuchung näher beschrieben.

6 Empirische Untersuchung

Das folgende Kapitel beschäftigt sich mit der empirischen Forschung der vorliegenden Arbeit. Zunächst werden das Setting sowie die zentralen Forschungsfragen vorgestellt. Anschließend folgt eine Erläuterung der Forschungsmethoden – der quantitativen Methode mittels Testbogens sowie der qualitativen Methode des *lauten Denkens*. Darüber hinaus wird das Forschungsinstrument der empirischen Untersuchung, der Testbogen, dargelegt und mit Literatur verknüpft, ehe eine Beschreibung der Auswertungsmethode folgt. Zum Abschluss dieses Kapitels werden die Durchführung der Untersuchung sowie ihre Besonderheiten genauer ausgeführt.

6.1 Setting

Um die zwei zentralen Forschungsfragen „**Wie lösen Schülerinnen und Schüler der vierten Schulstufe kombinatorische Aufgaben? Welche Lösungsstrategien und Darstellungsformen treten bei Schülerinnen und Schüler der vierten Schulstufe beim Lösen von kombinatorischen Aufgabenstellungen auf?**“ beantworten zu können, wird eine empirische Untersuchung mit vierten Schulstufen an gesamt sieben Volksschulen in den Bezirken Horn, Waidhofen an der Thaya und Zwettl durchgeführt. Nach dem Einholen der Zustimmung für die Forschung bei den jeweiligen Schulleitungen und Klassenlehrpersonen, nach der Bewilligung der Forschung vonseiten der Bildungsdirektion Niederösterreich (siehe Anhang) sowie nach dem Einsammeln von Einverständniserklärungen der Erziehungsberechtigten (siehe Anhang), fand die Untersuchung an sieben separaten Vormittagen im Februar und März 2025 statt. Insgesamt nahmen 65 Schüler*innen, darunter 35 Mädchen und 30 Buben, im Alter von neun bis zehn Jahren an der Untersuchung teil. Die Tabelle anbei veranschaulicht die Geschlechterverteilung der Teilnehmer*innen.

Geschlecht	Anzahl
weiblich	35
männlich	30
keine Angabe	0
Gesamt	65

Tabelle 4: Geschlechterverteilung

Für die Untersuchung wurden ganze Schulklassen aufgrund ihres Standortes ausgewählt. Daher fand im Vorfeld keine Selektion der Schüler*innen statt. Alle Kinder, deren Eltern die Einverständniserklärung unterzeichneten, nahmen an der Untersuchung teil. Die Erziehungsberechtigten hatten hierbei die Auswahl anzukreuzen, ob ihr Kind nur den Testbogen ausfüllen darf oder ob es berechtigt ist, sowohl beim Testbogen als auch beim *lauten Denken* Teil der Forschung sein zu dürfen.

6.2 Forschungsmethoden

Um die Forschungsfragen umfassend beantworten zu können, wird mit dem Ansatz der *Mixed-Methods* gearbeitet. „Mixed Methods bezeichnet eine Forschungsmethode, die eine Kombination von Elementen qualitativer und quantitativer Forschungstraditionen beinhaltet, typischerweise […] innerhalb einer Untersuchung.“ (Hussy et al., 2013, S. 290) Bei den Mixed Methods werden qualitative und quantitative Forschungsinstrumente kombiniert, um spezifische Schwächen einzelner Methoden zu kompensieren und so das vielschichtige und komplexe Feld der Schule weitreichend zu erforschen. Vorgegangen wird in der vorliegenden Forschung nach dem Triangulationsmodell, bei welchem in der Analyse die beiden Forschungsmethoden verschränkt werden und die Forschungsfrage aus verschiedenen Blickwinkeln betrachtet wird. Ziel ist hierbei, dass sich die Erkenntnisse der beiden Untersuchungen gegenseitig stützen und ergänzen (Gläser-Zikuda et al., 2012, S. 7 ff.). Verknüpft wird die quantitative Methode des *Testbogens* mit der qualitativen Methode des *lauten Denkens*.

6.2.1 Quantitative Untersuchung mittels Testbogen

Bei einer quantitativen Untersuchung wird die Erfahrungsrealität numerisch dargelegt. Es werden also numerische Daten statistisch analysiert (Bortz & Döring, 2006, S. 296 ff.). In der vorliegenden Masterarbeit wird ein Testbogen als quantitative Untersuchungsmethode verwendet. Ein Test ist ein standardisiertes wissenschaftliches Verfahren, welches eines oder mehrere Merkmale, die empirisch unterschieden werden können, erfasst. Dabei wird das Ziel verfolgt, möglichst präzise quantitative Aussagen über den relativen Ausprägungsgrad der Merkmale zu treffen (Hussy et al., 2013, S. 81). Tests konzentrieren sich dabei auf Inhalte und nicht etwa auf den Persönlichkeitsbereich (Bortz & Döring, 2006, S. 191). Ein Testbogen besteht aus verschiedenen Aufgaben oder Fragen, welche auch Items genannt werden. Diese werden von Personen mit unterschiedlichen Eigenschaften sowie Fähigkeiten auf verschiedene Weisen gelöst oder beantwortet (Hussy et al., 2013, S. 81). In der vorliegenden Masterarbeit handelt es sich dabei um einen Leistungstest, da die Aufgaben als *richtig* oder *falsch* gewertet werden. Konkret bedeutet dies, dass ein Beurteilungsmaßstab vorliegt (Bortz & Döring, 2006, S. 190).

6.2.2 Qualitative Untersuchung mittels *Lauten Denken*

Bei qualitativen Untersuchungen wird die Erfahrungsrealität verbalisiert aufgezeigt und nicht-numerische, verbale Daten, werden interpretiert (Bortz & Döring, 2006, S. 296 ff.). In der vorliegenden Arbeit wird die qualitative Methode des *lauten Denkens* verwendet. „Das *laute Denken* dient der Erfassung kognitiver Prozesse. Die Befragten werden aufgefordert, alles laut zu verbalisieren, was ihnen bei der Bearbeitung einer vorgegebenen Aufgabe durch den Kopf geht." (Hussy et al., 2013, S. 236) So wird ermöglicht, dass „Einblicke in die Gedanken, Gefühle und Absichten einer lernenden und/oder denkenden Person" (Konrad, 2020, S. 374) erhalten werden. Daher findet das *laute Denken* hauptsächlich Anwendung bei der Analyse von Lern-, Denk- oder Problemlöseprozessen sowie auch bei der Kompetenzmodellierung und beim Analysieren von Unterricht (Sandmann, 2014, S. 179). Es zielt darauf ab, Denk- sowie Bearbeitungsprozesse während dem Lösen von Aufgaben besser zu verstehen (Konrad, 2020, S. 373). Im Rahmen sämtlicher Formen der Verbalisation ist das *laute Denken* die offenste Form, welche ihren Ursprung in der Denkpsychologie hat. Unerfahrene äußern ihre Gedanken, ohne diese dabei zu reflektieren. Vorteil ist hierbei, dass die Befragten eine konkrete Situation selbst erleben und somit ihre Überlegungen verbalisieren können (Bilandzic, 2017, S. 406 f.).

Beim *lauten Denken* werden also Gedanken parallel zu einer sogenannten Primäraufgabe, etwa einer Rechenaufgabe, verbalisiert. Unterschieden wird hierbei zwischen einem *gleichzeitigen lauten Denken,* welches während der Primäraufgabe stattfindet, und einem *nachträglichen lauten Denken* (Bilandzic, 2017, S. 406), welches Hussy et al. (2013, S. 237) auch als *postaktives lautes Denken* bezeichnen. In der vorliegenden Arbeit wird die Methode des *postaktiven lauten Denkens* verwendet. Die teilnehmenden Schüler*innen sollen zunächst die Aufgabe bearbeiten und anschließend ihre Gedanken verbal ausdrücken, die ihnen beim Bearbeiten der Aufgabe durch den Kopf gingen (Hussy et al., 2013, S. 237). Bei dieser Form des retrospektiven *lauten Denkens* werden die Gedanken der Teilnehmer*innen direkt nach der Handlung verbal ausgedrückt (Sandmann, 2014, S. 179). Hierbei spielt die Instruktion der interviewenden Person eine wesentliche Rolle. Diese ist beim *lauten Denken* eher einfach gehalten. Die befragten Personen werden durch einfache Instruktionen explizit zum *lauten Denken* angehalten (Bilandzic, 2017, S. 407), wie etwa durch die Aufforderung, dass laut gedacht oder alles ausgesprochen werden soll, was durch den Kopf geht (Sandmann, 2014, S. 180; Bilandzic, 2017, S. 407). Fragen nach dem Warum oder eine Anweisung, dass ein Sachverhalt näher erläutert werden soll, sind nicht angebracht, da diese einen Reflexionsprozess initiieren. Vielmehr ist es sinnvoll, die Befragten bereits zu Beginn darauf hinzuweisen, alle Gedanken laut auszusprechen (Bilandzic, 2017, S. 407 f.).

Während der Erhebung entstehen Video- oder Audioaufnahmen, welche anschließend transkribiert werden (Sandmann, 2014, S. 179). Jene Verbalprotokolle, die dabei entstehen, sind valide, sofern diese den gesamten Prozess wiedergeben (Bilandzic, 2017, S. 408). Die verbalen Daten werden in einem weiteren Schritt mithilfe von theoretischen Konzepten kategorienbasiert analysiert und unter Einbeziehung weiterer Datenquellen und statistischer Verfahren evidenzgestützt interpretiert (Sandmann, 2014, S. 179).

6.3 Forschungsinstrument

Grundlage der empirischen Forschung ist ein Testbogen, welcher von allen an der Studie teilnehmenden Schüler*innen selbstständig bearbeitet wird. Der Testbogen besteht aus acht unterschiedlichen Aufgaben aus dem Bereich der Kombinatorik, wobei jeweils zwei Aufgaben in verschiedenen Schwierigkeitsstufen – eine mit niedrigerem und eine mit höherem Schwierigkeitsgrad – der kombinatorischen Figuren der Variation, Kombination, Permutation sowie dem Aspekt der Multiplikation zuzuordnen sind. Es wurden Aufgaben aus allen kombinatorischen Figuren gewählt, zumal diese beim Lösen unterschiedliche logische Voraussetzungen brauchen und so die Gesamtheit der Kombinatorik abgedeckt werden soll. Weiters sollen eventuelle Unterschiede bei den Lösungsstrategien und Darstellungsformen der Schüler*innen zu den verschiedenen kombinatorischen Figuren ausfindig gemacht werden.

Alle acht Aufgaben sind einheitlich aufgebaut und enthalten eine Angabe, ein freies Lösungsfeld, einen Lösungssatz und oftmals auch eine Visualisierung. Die Angaben wurden altersgerecht und klar formuliert und die Fragestellungen so gestaltet, dass sie aus der Lebenswelt der Schüler*innen stammen, die Lernenden ansprechen und einen Bezug zur Grundlagenliteratur haben. Außerdem unterstützen kleine Bilder einige Beispiele, um den Schüler*innen beim Vorstellen der Aufgabe behilflich zu sein und den Kontext der Aufgabenstellung zu verdeutlichen. Das freie Lösungsfeld steht zum Eintragen der Lösung zur Verfügung. Dieses Feld bietet die Möglichkeit, Einblicke in die individuellen Darstellungsformen sowie Lösungsstrategien der Lernenden zu erhalten.

Zudem beinhaltet jede der acht Aufgaben einen Lösungssatz, in welchen die Schüler*innen die ermittelte Anzahl an Möglichkeiten eintragen sollen. Diese Vorgabe hilft den Lernenden beim Strukturieren der Ergebnisse. Außerdem wird die eingetragene Anzahl zur Auswertung der Testbögen benötigt. Jene im Lösungssatz eingesetzte Lösung wird als *richtig* oder als *falsch* bewertet. Für jede korrekte Angabe erhalten die Teilnehmenden einen Punkt, für falsche Antworten keinen Punkt. Zwischenpunkte gibt es bei keiner der acht Aufgaben. Nicht gelöste Beispiele werden als *falsch* gewertet.

Ziel des Testbogens ist es, die Testteilnehmer*innen nicht nur zum Lösen der Aufgaben anzuregen, sondern auch Einsicht in deren Denkprozesse durch die Darlegung der Lösungsstrategien und Darstellungsformen zu ermöglichen. Durch die freie Möglichkeit, das Lösungsfeld zu gestalten, können bei der Auswertung Rückschlüsse auf Strategien, Darstellungen, Fehlerquellen oder Schwierigkeiten gezogen werden.

In den folgenden Unterkapiteln wird zunächst die Erhebung der persönlichen Daten genauer beschrieben, ehe auf die einzelnen Aufgaben näher eingegangen wird.

6.3.1 Persönliche Daten

Zunächst erfolgt eine Erhebung der persönlichen Daten der Testteilnehmer*innen. Hierbei wird nach dem Geschlecht (Mädchen, Bub), nach dem Alter (Ich bin … Jahre alt), sowie nach der Selbsteinschätzung in Mathematik (In Mathematik bin ich sehr gut, gut, mittelmäßig oder nicht so gut) gefragt.

Kombinatorik		
Ich bin … o ein Mädchen. o ein Bub.	Ich bin ____ Jahre alt.	In Mathematik bin ich … o sehr gut. o mittelmäßig. o gut. o nicht so gut.

Abbildung 22: Persönliche Daten

Die Abfrage der persönlichen Daten dient dazu, potenzielle Unterschiede in der Bearbeitung der Kombinatorikaufgaben aufzuzeigen und die Untersuchungsergebnisse differenziert analysieren zu können. Die Erhebung des Geschlechts zielt darauf ab, mögliche geschlechtsspezifische Disparitäten beim Lösen der Aufgaben oder bei der Verwendung der Strategien und Darstellungsweisen hervorzuheben. Hierbei könnten tendenzielle unterschiedliche Herangehensweisen von Mädchen und Buben ausfindig gemacht werden. Weiters hat die Dokumentation des Alters der Schüler*innen den Zweck, potenzielle entwicklungsbedingte Unterschiede innerhalb der vierten Schulstufe darzulegen. Die Selbsteinschätzung der Leistungen in Mathematik wird erhoben, um Vergleiche mit den Erkenntnissen der Studie *Einflussfaktoren auf die Leistungen in der Kombinatorik* von Kipman (2018), welche bereits im Kapitel 3.2.2 näher dargelegt wurde und zum Ergebnis kommt, dass sowohl die mathematischen Fähigkeiten als auch das Interesse einen signifikanten Einfluss auf die Leistungen in der Kombinatorik haben (Kipman, 2018, S. 141 ff.), ziehen zu können.

Somit schafft die Erhebung der persönlichen Merkmale der Teilnehmer*innen eine Grundlage, anhand welcher die Ergebnisse nicht nur allgemein, sondern auch in Hinblick auf gruppenspezifische oder individuelle Unterschiede dargelegt und interpretiert werden können.

6.3.2 Aspekt der Multiplikation

Im Folgenden werden jene zwei Testaufgaben – *Schneemann* und *Speisekarte* – vorgestellt, welche dem Aspekt der Multiplikation zugeordnet werden können. *Schneemann* ist hierbei das leichtere Beispiel, *Speisekarte* jenes mit einem höheren Schwierigkeitsgrad. Bei Aufgaben aus dem Bereich des Aspektes der Multiplikation erfolgt ein geschicktes Abzählen in verschiedenen Stufen, wobei auf jeder Stufe die Frage nach der Anzahl der Entscheidungsmöglichkeiten geklärt werden muss (Neubert, 2019c, S. 9).

6.3.2.1 Schneemann

Das Testbeispiel *Schneemann* wurde in Anlehnung an jene im Kapitel 5.1.2 beschriebene Aufgabe von Klunter et al. (2020a, S. 23) erstellt.

1a) Schneemann

Endlich hat es geschneit. Die Kinder bauen Schneemänner. Sie haben einen **roten**, einen **orangen** und einen **blauen** **Topf** für den Kopf und einen **braunen** und einen **gelben** **Besen**.

Wie viele verschiedene Schneemänner können die Kinder damit bauen?

Meine Lösung:

Die Kinder können ______ verschiedene Schneemänner bauen.

Abbildung 23: 1a) Schneemann

Die Aufgabe 1a kann als *richtig* angesehen werden, wenn im Antwortsatz eingesetzt wird, dass sechs verschiedene Schneemänner gebaut werden können. Wesentlich ist bei dieser Aufgabe, dass es für die Wahl der Kopfbedeckung drei (rot, orange, blau) und für den Besen zwei verschiedene Möglichkeiten (braun, gelb) gibt. Jede Kombination eines Topfs und eines Besens ist möglich, weshalb sich $3 \cdot 2 = 6$ Möglichkeiten ergeben.

6.3.2.2 Speisekarte

Die Testaufgabe *Speisekarte* basiert auf dem im Kapitel 5.1.4 beschriebenen Beispiel von Schipper et al. (2019b, S. 320). Während die Aufgabe 1a) ein Beispiel mit einem zweistufigen Entscheidungsprozess ist, ist in der Aufgabe 1b) ein dreistufiger Entscheidungsprozess notwendig, weshalb diese Aufgabe einen höheren Schwierigkeitsgrad hat.

1b) Speisekarte

Beim Mittagessen im Wirtshaus gibt es **zwei Suppen**, **drei Hauptspeisen** und **zwei Nachspeisen** zur Auswahl. Es muss immer eine Suppe, eine Hauptspeise und eine Nachspeise gewählt werden. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es das Mittagessen auszuwählen?

Suppen	**Hauptspeisen**	**Nachspeisen**
Knoblauchsuppe	Schnitzel	Schokokuchen
Frittatensuppe	Spaghetti	Himbeertorte
	Pizza	

Meine Lösung:

Es gibt ____ Möglichkeiten, eine Suppe, eine Hauptspeise und eine Nachspeise auszuwählen.

Abbildung 24: 1b) Speisekarte

Die Aufgabe 1b) kann als *richtig* gewertet werden, wenn die Schüler*innen einsetzen, dass es zwölf Möglichkeiten gibt, eine Suppe, eine Hauptspeise und eine Nachspeise auszuwählen. Zur Auswahl stehen zwei Suppen (Knoblauchsuppe, Frittatensuppe), drei Hauptspeisen (Schnitzel, Spaghetti, Pizza) und drei Nachspeisen (Schokokuchen, Himbeertorte). Aufgrund dessen, dass kein Gang ausgelassen werden darf, werden die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten aus den drei Entscheidungsprozessen multipliziert, weshalb sich $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ Möglichkeiten ergeben.

6.3.3 Permutation

Die Aufgaben *Spaziergang der Tiere* und *Fenster schmücken* gehören dem Bereich der Permutation an, wobei das erste Beispiel die leichtere und die zweite Aufgabe, aufgrund einer größeren Anzahl an Möglichkeiten, die schwierigere ist. Bei Permutationsaufgaben werden immer alle Elemente angeordnet (Schmidt, 2015, S. 56).

6.3.3.1 Spaziergang der Tiere

Das Testbeispiel *Spaziergang der Tiere* wurde in Anlehnung an die Aufgabe *Tiere* aus dem Kapitel 5.2.3 von Kipman (2015, S. 61) und Neubert (2024, S. 94 f.) erstellt. Zur Auswahl stehen drei Elemente, wobei ein Element fixiert wird, indem ein Tier immer das erste sein möchte. Daher können nur zwei Elemente vertauscht werden. Für ein besseres Verständnis steht hier eine Visualisierung zur Verfügung.

2a) Spaziergang der Tiere

Die **Giraffe**, der **Elefant** und das **Zebra** machen einen Spaziergang.

??

Dazu stellen sich die Tiere in einer Reihe hintereinander auf. Der **Elefant** möchte unbedingt das **erste Tier** sein. Wie viele Möglichkeiten haben die anderen zwei Tiere sich dahinter aufzustellen?

Meine Lösung:

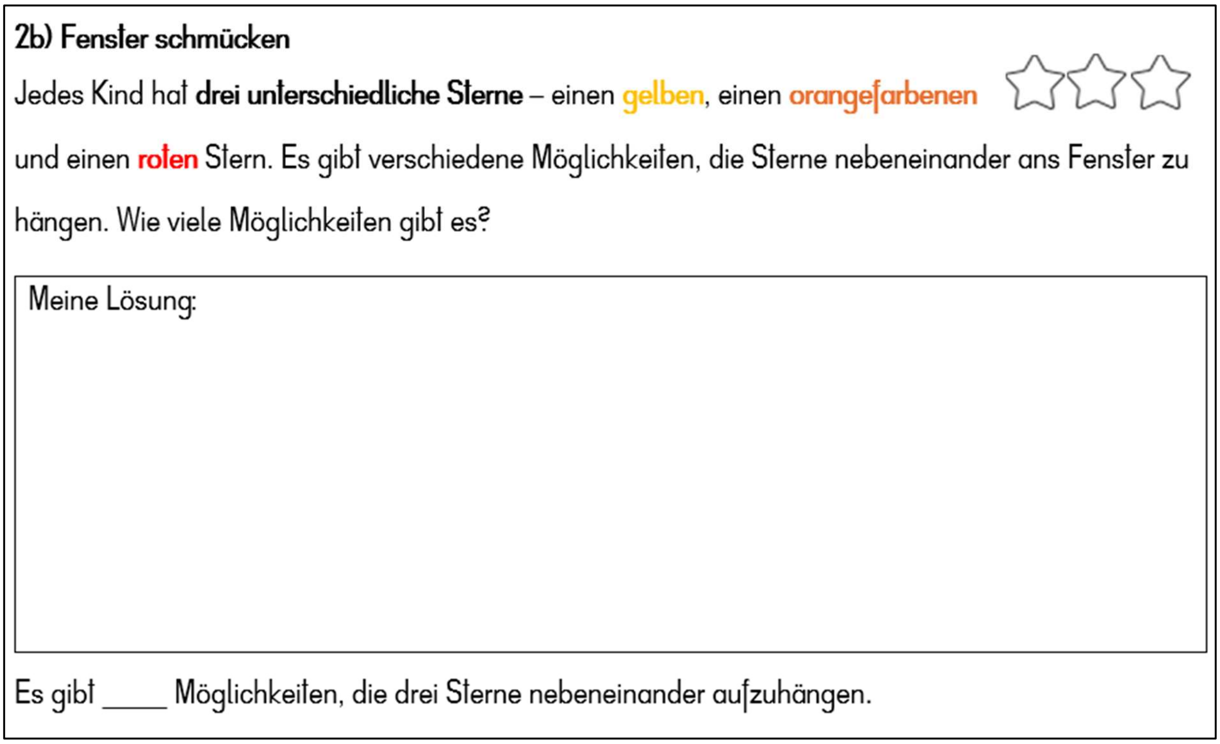
Es gibt ___ verschiedene Möglichkeiten, dass sich die Tiere in einer Reihe aufstellen.

Abbildung 25: 2a) Spaziergang der Tiere

Die Aufgabe *Spaziergang der Tiere* wird als *richtig* bewertet, wenn die Teilnehmer*innen der Untersuchung zur Lösung kommen, dass es zwei verschiedene Möglichkeiten gibt, wie sich die Tiere in einer Reihe aufstellen. Da der Elefant der Erste sein möchte, steht seine Position fest und muss beim Ermitteln der Möglichkeiten nicht mehr berücksichtigt werden. Wesentlich ist daher nur die Anordnung des Zebras und der Giraffe, wobei es zwei Möglichkeiten gibt: Das Zebra steht vor der Giraffe. Die Giraffe steht vor dem Zebra.

6.3.3.2 Fenster schmücken

Die Testaufgabe 2b), *Fenster schmücken*, basiert auf dem von Breiter et al. (2009, S. 56) im Kapitel 5.2.1. beschriebenen Beispiel und kann als schwierigere Permutationsaufgabe beschrieben werden. Bei dieser Aufgabe werden drei Elemente angeordnet. Zur Visualisierung steht ein Bild zur Verfügung.



2b) Fenster schmücken

Jedes Kind hat **drei unterschiedliche Sterne** – einen gelben, einen orangefarbenen und einen roten Stern. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Sterne nebeneinander ans Fenster zu hängen. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

Meine Lösung:

Es gibt ____ Möglichkeiten, die drei Sterne nebeneinander aufzuhängen.

Abbildung 26: 2b) Fenster schmücken

Die Aufgabe 2b) wird als *richtig* angesehen, wenn die Schüler*innen angeben, dass die Sterne auf sechs verschiedene Weisen nebeneinander angeordnet werden können. Es gibt drei unterschiedliche Sterne (gelb, orange, rot), welche alle aufgehängt werden müssen. Die Aufgabe zielt somit darauf ab, die Reihenfolge der Sterne zu bestimmen, weshalb die Anzahl der Permutationen dieser ermittelt werden müssen. Rechnerisch kann diese von drei unterschiedlichen Sternen mit $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ angegeben werden.

6.3.4 Kombination

Schlittenrennen und *Hände schütteln* sind jene zwei Testaufgaben, die der kombinatorischen Figur der Kombination zugeordnet werden können, bei welcher nicht alle Elemente angeordnet werden (Schmidt, 2015, S. 56) und auch die Reihenfolge nicht wichtig ist (Kipman, 2018, S. 133).

6.3.4.1 Schlittenrennen

Die Aufgabe 3a), das *Schlittenrennen*, wurde für den Testbogen in Anlehnung an Breiter et al. (2009, S. 56) erstellt und bereits im Kapitel 5.3.1 genauer beschrieben. Wesentlich ist, dass es sich hierbei um eine Kombination ohne Wiederholung handelt (Breiter et al., 2009, S. 56). Außerdem ist wichtig, dass immer nur ein Kind auf einem Schlitten sitzt.

3a) Schlittenrennen

Julian, Sophie, Laura und **Melanie** wollen mit **zwei Schlitten** Rennen fahren.

Auf jedem Schlitten sitzt immer ein Kind. Wie viele Rennen muss es geben, damit jedes Kind gegen jedes Kind gefahren ist?

Meine Lösung:

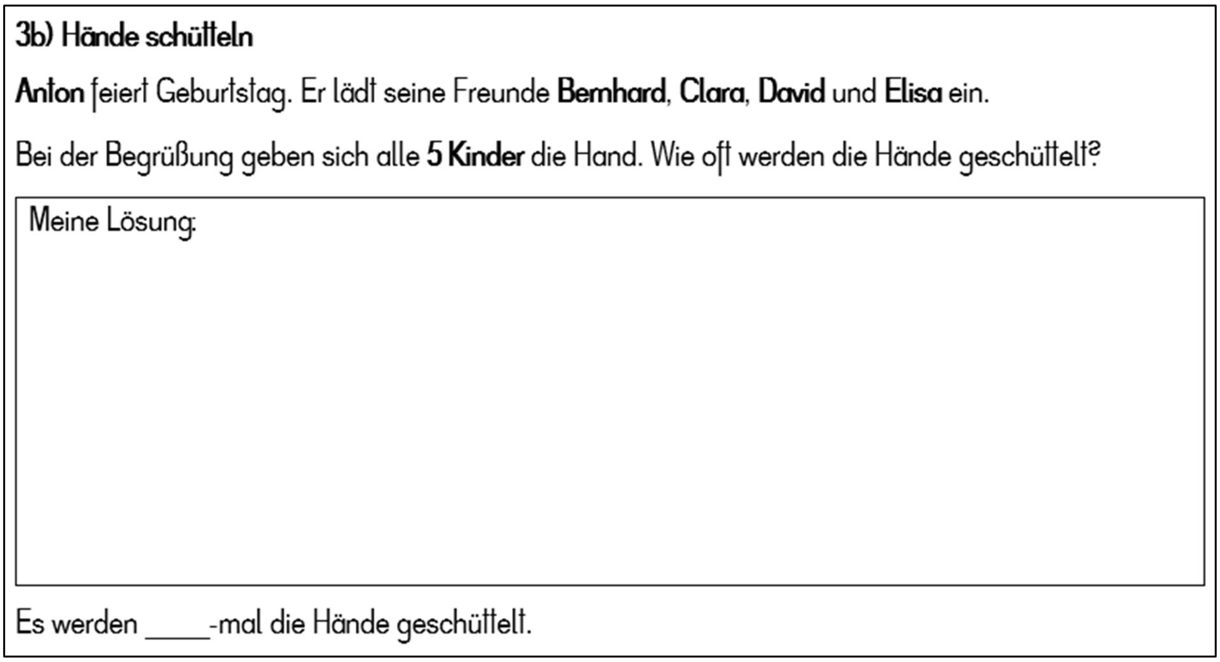
Es gibt ____ Rennen, wenn jedes Kind gegen jedes Kind fährt.

Abbildung 27: 3a) Schlittenrennen

Die Aufgabe 3a) wird als *richtig* gewertet, wenn die Testteilnehmer*innen angeben, dass es sechs Rennen geben muss, wenn jedes gegen jedes Kind fährt. Vier Kinder haben zwei Schlitten zur Verfügung, wobei immer nur ein Kind auf einem Schlitten sitzen kann, weshalb immer nur zwei Kinder gleichzeitig fahren. Ermittelt werden muss, wie viele verschiedene Paare aus den Vieren gebildet werden können. Die Reihenfolge dieser spielt keine Rolle, weshalb es sich um eine Kombination handelt. Eine Kombination ohne Wiederholung liegt vor, da beispielsweise das Rennen Julian gegen Sophie das gleiche Rennen ist, wie Sophie gegen Julian. Rechnerisch kann das Aufgabenbeispiel mit $\binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$ ermittelt werden.

6.3.4.2 Hände schütteln

Die Aufgabe *Hände schütteln* orientiert sich an jenem Beispiel von Quak (2010, S. 63), welches im Kapitel 5.3.3 näher thematisiert wurde. Wesentlich ist, dass aus einer Elementmenge Paare gebildet werden (2010, S. 63). Die große Herausforderung liegt darin, Doppelungen zu streichen.



3b) Hände schütteln

Anton feiert Geburtstag. Er lädt seine Freunde **Bernhard**, **Clara**, **David** und **Elisa** ein.

Bei der Begrüßung geben sich alle **5 Kinder** die Hand. Wie oft werden die Hände geschüttelt?

Meine Lösung:

Es werden _____-mal die Hände geschüttelt.

Abbildung 28: 3b) Hände schütteln

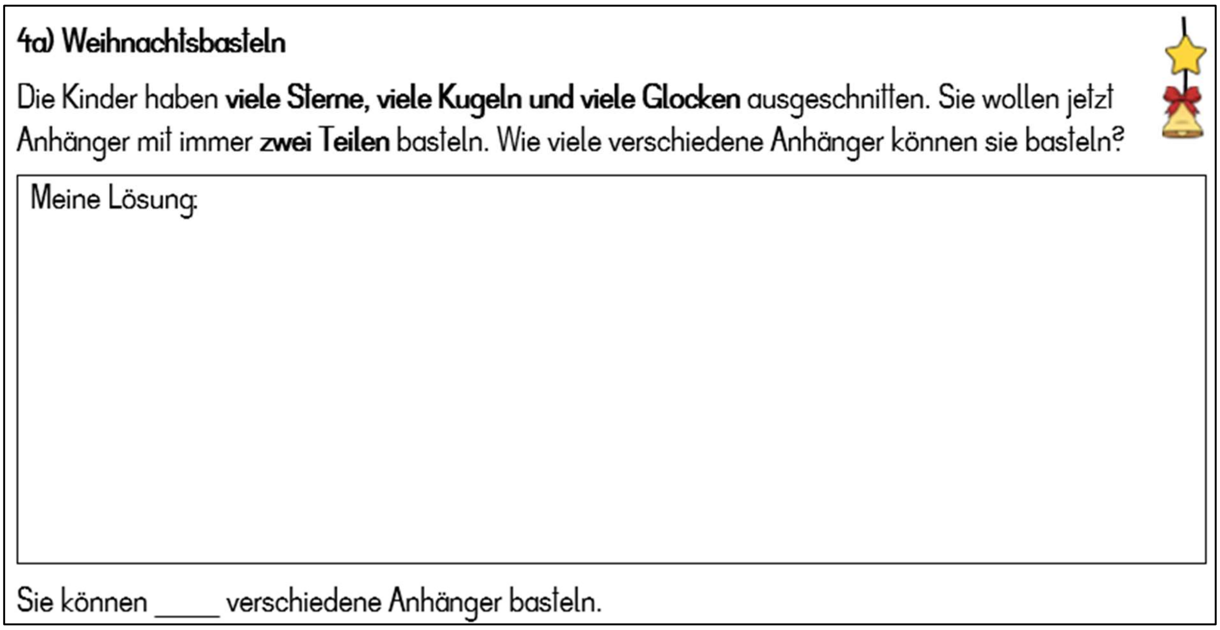
Das Beispiel kann als *richtig* gewertet werden, wenn die Schüler*innen zur Erkenntnis kommen, dass sich die Kinder zehnmal die Hände geben können. Da sich alle fünf Kinder die Hände geben, werden immer Zweierpaarungen ermittelt. Daher ist es Aufgabe, die Anzahl der Paarungen aus fünf Personen zu ermitteln. Aufgrund dessen, dass es keine Rolle spielt, wer zuerst die Hand reicht, handelt es sich um eine Aufgabe, bei der die Reihenfolge unwesentlich ist. Daher ist es eine Kombinationsaufgabe. Weiters müssen Doppelungen gestrichen werden, weshalb es eine Kombination ohne Wiederholung ist. Rechnerisch kann die Aufgabe mit $\binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-2)! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$ ermittelt werden.

6.3.5 Variation

Weihnachtsbasteln und *Fahrradschloss* sind jene Aufgaben am Testbogen, die der Variation zugeschrieben werden können, wobei die erste Aufgabe jene mit einem niedrigeren Schwierigkeitsgrad ist und die zweite jene mit einem höheren. Bei Aufgaben der Variation handelt es sich immer um ungeordnete Stichproben, wobei die Reihenfolge der Anordnung wesentlich ist (Mende, 2020, S. 1). Weiters werden weniger Elemente ausgewählt als zur Verfügung stehen (Kipman, 2018, S. 133).

6.3.5.1 Weihnachtsbasteln

Die Erstellung der Aufgabe Weihnachtsbasteln erfolgte in Anlehnung an Eichhorn (2024, S. 22), welche bereits im Kapitel 5.4.2 vorgestellt wurde.



4a) Weihnachtsbasteln

Die Kinder haben **viele Sterne, viele Kugeln und viele Glocken** ausgeschnitten. Sie wollen jetzt Anhänger mit immer **zwei Teilen** basteln. Wie viele verschiedene Anhänger können sie basteln?

Meine Lösung:

Sie können _____ verschiedene Anhänger basteln.

Abbildung 29: 4a) Weihnachtsbasteln

Die Aufgabe kann als *richtig* bewertet werden, wenn die Schüler*innen zum Ergebnis kommen, dass neun verschiedene Anhänger gebastelt werden können. Aufgrund dessen, dass viele Elemente (Sterne, Kugeln, Glocken) zur Verfügung stehen, handelt es sich um eine Variation mit Wiederholung. Gesucht werden die möglichen Zweierkombinationen aus den drei Teilen. Die Reihenfolge der Anordnung ist wesentlich, da beispielsweise zuerst eine Glocke und dann ein Stern einen anderen Anhänger darstellt als zuerst ein Stern und dann eine Glocke. Zudem gibt es auch die Möglichkeit, dass zwei Sterne einen Anhänger bilden. Rechnerisch kann die Anzahl der Möglichkeiten $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$ berechnet werden.

6.3.5.2 Fahrradschloss

Die Aufgabe *Fahrradschloss* ist die schwierigere Variationsaufgabe am Testbogen. Sie orientiert sich an der im Kapitel 5.4.3 beschrieben Aufgabe von Eichhorn (2024, S. 37). Die bildliche Visualisierung soll den Lernenden helfen, die Angabe zu verstehen.

4b) Fahrradschloss

Bei einem Fahrradschloss müssen vier Zahlen eingestellt werden,

damit es geöffnet werden kann. Leider hat Nina einige Zahlen vergessen.

Sie weiß noch, dass die erste Zahl eine 0 war und die zweite Zahl war eine 4.

Die **dritte und vierte Zahl ist jeweils größer als 5**. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

Meine Lösung:

Es gibt ___ Möglichkeiten.

Abbildung 30: 4b) Fahrradschloss

Die Aufgabe ist *richtig*, wenn angegeben wird, dass es 16 Möglichkeiten gibt. Da die ersten zwei Zahlen des Fahrradschlosses bekannt sind, spielen sie bei dieser Aufgabe keine Rolle. Die Konzentration muss auf die dritte und vierte Zahl gelegt werden. Hierbei ist bekannt, dass diese größer als fünf sind, daher können diese sechs, sieben, acht oder neun sein. Die dritte und vierte Zahl sind unabhängig voneinander. Daher gibt es vier mögliche Werte für jede der beiden unbekannten Zahlen. Rechnerisch ergeben sich daher $4^2 = 4 \cdot 4 = 16$ Möglichkeiten.

6.4 Auswertungsmethode

Die Auswertung der empirischen Untersuchung findet, wie bereits im Kapitel 6.2. näher erläutert, unter einem *Mixed-Methods*-Ansatz statt. Hierfür werden zunächst die schriftlich gesammelten Daten der Testbögen quantitativ ausgewertet und deskriptiv dargestellt.

Aufgrund dessen, dass sich Lösungsprozesse von Schüler*innen der Primarstufe unter verschiedenen Aspekten beleuchten lassen (Neubert, 2019b, S. 46) und eine umfassende Analyse angestrebt wird, werden weiters die verbalen Daten, welche beim *lauten Denken* gesammelt und anschließend handschriftlich transkribiert wurden, sowie die Begründungen, Darstellungsformen und Lösungswege, welche die Teilnehmer*innen am Testbogen im leeren Lösungsfeld eingetragen haben, einer qualitativen Inhaltsanalyse unterzogen und mit Hilfe eines zuvor festgelegten Kategoriensystems ausgewertet und interpretiert. Die qualitative Inhaltsanalyse zielt darauf ab, dass Material analysiert wird, welches aus irgendeiner Form von Kommunikation kommt (Mayring, 2015, S. 11), im Falle der vorliegenden Arbeit vom *lauten Denken* sowie von den Eintragungen im Lösungsfeld am Testbogen. Es erfolgt eine Textanalyse nach zuvor festgelegten Regeln, welche an die Fragestellung angepasst werden. Wesentlich ist bei der Analyse ein Kategoriensystem, welches die Aspekte der Auswertung in Kurzform darstellt und genau definiert wurde. Textstellen werden Kategorien zugeordnet, weshalb sich eine regelgeleitete Interpretation ergibt. Kategorien können deduktiv und theoriegeleitet vor der Untersuchung, oder induktiv nach der Forschung, festgelegt werden (Mayring, 2020, S. 498).

Für die vorliegende Arbeit wurden deduktiv folgende Kategorien theoriegeleitet festgelegt:

Kategorie 1: Lösungsstrategien

Kategorie 2: Darstellungsformen

Kategorie 3: Fehleranalyse

Jene vier Kategorien wurden operationalisiert, um die frei eingetragenen Daten des Testbogens und die verbalen, transkribierten Daten der Methode des *lauten Denkens* zu analysieren. Für eine genauere Analyse erfolgte das Bilden von Unterkategorien. Wesentlich ist, dass sich alle Kategorien auf alle Aufgaben des Testbogens beziehen, weshalb zunächst für jede einzelne Aufgabe eine Einbettung in das Kategoriensystem stattfindet, ehe im Fazit der Arbeit die Ergebnisse der einzelnen Aufgaben zusammen interpretiert werden. Zunächst werden anbei die gebildeten Kategorien sowie ihr Literaturbezug näher erläutert.

6.4.1 Kategorie 1: Lösungsstrategien

Kategorie eins beschreibt verschiedene Lösungsstrategien, welche von den Teilnehmer*innen am Testbogen schriftlich festgehalten oder beim *lauten Denken* verbal geäußert wurden. Diese Kategorie bezieht sich auf einen Teilbereich der Forschungsfrage: „Welche Lösungsstrategien und Darstellungsformen treten bei Schülerinnen und Schüler der vierten Schulstufe beim Lösen von kombinatorischen Aufgabenstellungen auf?“

Lösungsstrategien zum Lösen von kombinatorischen Aufgaben wurden bereits im Kapitel 3.4.4 näher erläutert. Diese werden bei der qualitativen Inhaltsanalyse in vier Unterkategorien zusammengefasst: *Systematisches Probieren, Rückgriff auf Vorwissen, intuitiver Lösungsweg und Versuch und Irrtum*

Die Unterkategorie *Systematisches Probieren* fasst systematische Abzählstrategien, bei welchen meist ein Element konstant gehalten wird, während die weiteren Elemente nach einem System rotieren (Kipman, 2018, S. 153), die Strategie des Schiebens, bei der immer das letzte

Element einer Kombination bei der nächsten Möglichkeit als vorderstes Element angereiht wird (Kipman, 2018, S. 153), das Teilen, bei dem Untermengen gebildet werden (Kipman, 2018, S. 154), das Drehen, bei dem Elemente strategisch verdreht werden (Kipman, 2018, S. 154), sowie die Fixplatzstrategie, bei der ein Element einen fixen Platz hat und alle anderen Elemente rotieren, (Kipman, 2015, S. 154) zusammen.

Der Unterkategorie *Rückgriff auf Vorwissen* werden Lösungsstrategien zugeordnet, bei welchen die Anzahl der Möglichkeiten durch eine gezielte Rechnung ermittelt wurde (Kipman, 2018, S. 154) oder ein Transfer, eine Schlussfolgerung, (Kipman, 2018, S. 154) von bisher bekannten Aufgaben stattfindet.

Die Unterkategorie *intuitiver Lösungsweg* beschreibt Äußerungen, welche von den Teilnehmer*innen spontan geäußert werden. Dies meint, dass eine Lösung spontan geäußert oder aufgeschrieben wird, nachdem eine Aufgabe gehört oder gelesen wurde (Kipman, 2018, S. 154). Wenn Schüler*innen das Lösungsfeld am Testbogen freilassen, wird dies ebenfalls der Unterkategorie des intuitiven Lösungsweges zugeschrieben, sofern nicht beim *lauten Denken* ein anderer Lösungsweg erläutert wurde.

Unter *Versuch und Irrtum* werden geratene Lösungen zusammengefasst. Es besteht die Möglichkeit, dass Untersuchungsteilnehmer*innen ohne Angabe eines Lösungsweges eine Lösung angeben, welche auf Nachfrage beim *lauten Denken* nicht erläutert werden kann (Kipman, 2018, S. 154). Weiters werden ein sichtlich erkennbar wahlloses Vorgeben, bei dem unterschiedliche Möglichkeiten ohne Systematik ausprobiert werden, sowie ein falsches Verstehen der Angabe (Sill & Kurtzmann, 2019, S. 173), in diese Unterkategorie eingeordnet.

Die Tabelle anbei verdeutlicht die Zuordnung der Lösungsstrategien zu den Unterkategorien:

Unterkategorie	**Zuordnung der Lösungsstrategie**
Systematisches Probieren	systematische Abzählstrategie, Schieben, Teilen, Drehen, Fixplatzstrategie
Rückgriff auf Vorwissen	Transfer, Rechnung, Weltwissen
Intuitiver Lösungsweg	Spontane Äußerung, unsystematische Strategie
Versuch und Irrtum	Nicht erklärbare Strategie, inkorrekte Strategie

Tabelle 5: Unterkategorien Lösungsstrategien

6.4.2 Kategorie 2: Darstellungsformen

In der Kategorie zwei werden all jene Darstellungsformen, welche Schüler*innen am Testbogen aufzeichnen sowie beim *lauten Denken* anführen, zusammengefasst. Auch diese Kategorie hat einen Bezug zur Forschungsfrage: „Welche Lösungsstrategien und Darstellungsformen treten bei Schülerinnen und Schüler der vierten Schulstufe beim Lösen von kombinatorischen Aufgabenstellungen auf?“

Verschiedene Darstellungsformen beim Lösen von kombinatorischen Aufgaben wurden bereits im Kapitel 3.4.5. genauer thematisiert. Bei der qualitativen Inhaltsanalyse werden für die Darstellungsformen folgende Unterkategorien gebildet: *mathematische Darstellung, visuelle Darstellung, verbale Darstellung und keine Darstellung*

Die Unterkategorie *mathematische Darstellung* fasst alle Darstellungsformen zusammen, welche auf einem mathematischen Hintergrund basieren. Hierzu gehören Rechnungen jeglicher Art, welche von Lernenden in ihrem Lösungsfeld angeführt oder beim *lauten Denken* erläutert werden sowie Baumdiagramme, bei welchen verschiedene Stockwerke die einzelnen Entscheidungsstufen symbolisieren (Sill & Kurtzmann, 2019, S. 199). Weiters werden auch systematische Vorgehen dieser Unterkategorie zugeordnet. Diese bekamen zunächst eine eigene Unterkategorie, während dem Auswertungsprozess wurden diese jedoch in die mathematische Darstellung integriert, aufgrund dessen, dass Testteilnehmer*innen kaum eindeutig systematische Darstellungen anführten. Dazu gehören tabellarische Darstellungen, welche zur Steuerung der Lösung dienen (Herzog et al., 2017, S. 273), sowie Netzdarstellungen, bei welchen die möglichen Kombinationen der Elemente durch Verbindungslinien visuell veranschaulicht werden (Herzog et al., 2017, S. 273). Auch Zifferndarstellungen wurden induktiv der mathematischen Darstellung zugewiesen. Bei diesen werden die einzelnen Elemente der Möglichkeiten anhand von Ziffern dargestellt (Herzog et al., 2017, S. 273).

Weiters beschreibt die Unterkategorie der *visuellen Darstellungen* alle visuellen Abbildungen, welche zur Lösung führen. Verwenden Schüler*innen Bilder, um die Elemente als Anordnung oder als Auswahl zu verdeutlichen (Herzog et al., 2017, S. 273), werden diese bei der qualitativen Inhaltsanalyse dieser Unterkategorie zugeordnet, sowie auch Typografien. Bei typografischen Darstellungen werden Elemente anhand von Wörtern oder Buchstaben codiert (Herzog et al., 2017, S. 273).

Die Unterkategorie der *verbalen Darstellung* wurde induktiv, nach der Forschung, ergänzt. Dieser werden all jene Lösungsfelder, in denen Schüler*innen verbale Daten angeben, zugeordnet. Hinzu gehören schriftliche Erklärungen und Erläuterungen von Testpersonen, als auch die Auflistung von Möglichkeiten in Worten.

Die Tabelle anbei verdeutlicht die Zuordnung der Darstellungsformen zu den Unterkategorien:

Unterkategorie	Zuordnung der Darstellungsform
Mathematische Darstellung	Rechnungen, Baumdiagramme, Tabellen, Netzdarstellungen, Zifferndarstellungen
Visuelle Darstellung	Bilder, Typografien
Verbale Darstellung	Wörter, Sätze
keine Darstellung	keine Darstellung

Tabelle 6: Unterkategorien Darstellungsformen

6.4.3 Kategorie 3: Fehleranalyse

Die dritte Kategorie erfasst alle Fehler, die Schüler*innen beim Bearbeiten der Kombinatorikaufgaben unterlaufen sind. Die Kategorie zielt darauf ab, typische Fehlerquellen, inkorrekte Denkweisen, Fehlvorstellungen oder Verständnisschwierigkeiten der Testteilnehmer*innen zu analysieren. Es wird untersucht, ob Lernende, welche ein inkorrektes Ergebnis angegeben haben, Bedingungen der Aufgabenstellung nicht berücksichtigt haben, fehlerhafte Möglichkeiten ermittelten oder Möglichkeiten übersahen. Weiters werden auch Fehler hinsichtlich Unsicherheiten bei den verwendeten Strategien und Darstellungsformen näher betrachtet. Allgemein dient die Kategorie der Fehleranalyse dazu, die zugrundeliegenden inkorrekten Lösungswege sowie Denkprozesse näher zu betrachten.

6.5 Durchführung der Forschung

Die Durchführung der Forschung fand im Februar und März 2025 an sieben Volksschulen im Raum Waldviertel statt. Eine Auswahl der Schulen erfolgte aufgrund deren Standort. Vor den einzelnen Testungen in den Klassen, wurden die Schüler*innen von der Untersuchungsleitung aufgeklärt. Zunächst fand eine kurze Besprechung statt, in der den Testteilnehmer*innen erläutert wurde, dass die Kombinatorik ein Teilbereich der Mathematik ist, in dem es darum geht, die Anzahl an Möglichkeiten zu ermitteln. Zudem erfolgte eine Information darüber, dass die Kombinatorik noch nicht Teil ihres Lehrplanes ist, sie die Aufgaben daher in der Schule noch nicht behandelt haben und es somit nicht weiter problematisch ist, wenn Beispiele nicht gelöst werden können. Weiters erfolgte der Hinweis, dass die Testbögen mit Nummern versehen sind und somit nicht einzelnen Person zugewiesen werden können. Neben der Klärung von Formellem wurde auch vor der Testung darauf eingegangen, dass die Aufgaben gut gelesen werden müssen und es sich bei diesen um Knobelaufgaben handelt. Darüber hinaus erhielten die Kinder eine Erklärung darüber, dass es jeweils eine Aufgabe a) und eine Aufgabe b) gibt, wobei die erste immer etwas leichter als die zweite ist. Des Weiteren wurde erläutert, dass jedes Aufgabenbeispiel ein freies Lösungsfeld hat, welches individuell genutzt werden darf. Das Feld soll helfen, die Lösung zu ermitteln. Hierbei darf geschrieben, gezeichnet, gerechnet oder dieses freigelassen werden. Wichtig war noch, dass die Schüler*innen ihre Lösung in den Lösungssatz am Ende jedes Beispiels einsetzen. Außerdem wurde bereits kurz darauf eingegangen, dass im Anschluss noch drei Teilnehmer*innen per Zufall für ein Gespräch ausgewählt werden. Eine genauere Erklärung erfolgte zu einem späteren Zeitpunkt. Nach der allgemeinen Erläuterung konnten noch Fragen geklärt werden, ehe die gesamte Klasse mit der Bearbeitung des Testbogens startete.

Für die selbstständige Bearbeitung des Testbogens wurden den Lernenden 30 Minuten zur Verfügung gestellt. Währenddessen konnten die Schüler*innen gerne Fragen zum Verständnis stellen. In den meisten Klassen schlossen die Lernenden nach ungefähr 20 Minuten die Bearbeitung ab. Fertige Testbögen verblieben auf den Tischen der Lernenden, damit eine spätere Zuordnung der Auswahl des Zufallsgenerators möglich war.

Nach der Bearbeitung der Testbögen wurden vor den Augen der Klassenlehrperson alle Testbogennummern, deren Eltern auch mit dem *lauten Denken* einverstanden waren, in einen Zufallsgenerator eingegeben und jeweils drei Schüler*innen ausgewählt. Diese Proband*innen begleiteten anschließend einzeln die Untersuchungsleitung in einen Nebenraum. In einem Einzelgespräch wurden die Schüler*innen nochmals gefragt, wie sie die einzelnen Aufgaben gelöst haben. Dabei ging die Forschungsleitung auch auf Unklarheiten ein und forderte die Schüler*innen auf, ihr einen Einblick in ihr Denken zu geben. Die Gespräche wurden mit dem Smartphone per Audio-Datei aufgenommen, noch am selben Tag transkribiert und anschließend wieder gelöscht. Insgesamt waren 21 Testteilnehmer*innen Teil des *lauten Denkens*.

6.6 Resümee

Ziel dieses Kapitels ist es, die empirische Untersuchung der vorliegenden Arbeit transparent darzulegen. Die zentralen Forschungsfragen verfolgen das Ziel, die Kombinatorikleistungen von Schüler*innen der vierten Schulstufe vor dem Inkrafttreten des neu verordneten Lehrplans 2023 zu beleuchten. Aus diesem Grund fand eine Untersuchung an sieben Volksschulen, mit insgesamt 65 Schüler*innen, im Raum Waldviertel statt. Um die Forschungsfragen umfassend beantworten zu können, wurde mit einem Mixed-Methods-Ansatz gearbeitet. Während der Testbogen als quantitative Methode hilft, numerische Daten zu sammeln, können bei der qualitativen Methode des *lauten Denkens* Einblicke in die Denkprozesse der Teilnehmer*innen gewonnen werden. Das grundlegende Forschungsinstrument ist ein Testbogen, welcher neben der Erhebung persönlicher Daten acht kombinatorische Aufgaben umfasst. Diese Aufgaben können den kombinatorischen Figuren – Aspekt der Multiplikation, Permutation, Kombination und Variation – zugeordnet werden, wovon auf dem Testbogen jeweils eine leichtere und eine schwierigere Aufgabe jeder dieser Figuren enthalten ist. Die erhobenen Daten des Testbogens wurden deskriptiv ausgewertet und durch die qualitativen Daten aus dem *lauten Denken* ergänzt. Für die qualitative Auswertung mittels qualitativer Inhaltsanalyse, konnten drei Kategorien gebildet werden – Lösungsstrategien, Darstellungsformen und Fehleranalyse. Die empirische Untersuchung konnte weitgehend unproblematisch und planmäßig durchgeführt werden. Die vorgesehenen Erhebungsmethoden – der Testbogen und das *laute Denken* – verliefen ohne Schwierigkeiten. Die gewonnenen Ergebnisse bieten einen tiefen Einblick in das kombinatorische Denken der Schüler*innen. Diese Forschungsergebnisse werden im folgenden Kapitel ausführlich präsentiert und analysiert.

7 Forschungsergebnisse

Im folgenden Kapitel werden die Ergebnisse der Forschung näher erläutert und interpretiert. Zunächst erfolgt eine deskriptive Auswertung der Forschung, ehe anbei auf die einzelnen Aufgabenbeispiele näher eingegangen wird. Zu diesem Zweck wird jedes Testbeispiel quantitativ sowie qualitativ anhand der festgelegten Kategorien ausgewertet. Abschließend findet eine Diskussion der Ergebnisse sowie ein Bezug zur Grundlagenliteratur statt.

7.1 Deskriptive Auswertung

Im folgenden Abschnitt werden die quantitativ erhobenen Daten deskriptiv, beschreibend, ausgewertet. Zunächst erfolgt ein Überblick über die Gesamtleistungen der Schüler*innen, ehe auf die erreichten Punkte der einzelnen Aufgaben genauer eingegangen wird. Weiters findet eine nähere Erläuterung der geschlechtsspezifischen Disparitäten und der Korrelation zwischen der Selbsteinschätzung und den Leistungen der Teilnehmer*innen statt. Diese deskriptive Analyse bietet eine erste Einschätzung und zeigt Tendenzen auf, ehe in einer weiterführenden Analyse die einzelnen Testaufgaben genau betrachtet werden.

7.1.1 Gesamtpunkte

Nach der Auswertung der Testbögen gemäß den zuvor festgelegten Richtlinien und nach Vergabe eines Punktes für jede *richtige* Aufgabe wurde die Gesamtpunkteanzahl aller Teilnehmenden ermittelt. Hierbei konnten minimal null und maximal acht Punkte erreicht werden, was eine Spannbreite von gesamt acht Punkten ergibt. Das Histogramm anbei veranschaulicht die Verteilung der Gesamtpunkteanzahl. Es ist ersichtlich, wie viele Schüler*innen welche Punkteanzahl erreichen konnten.

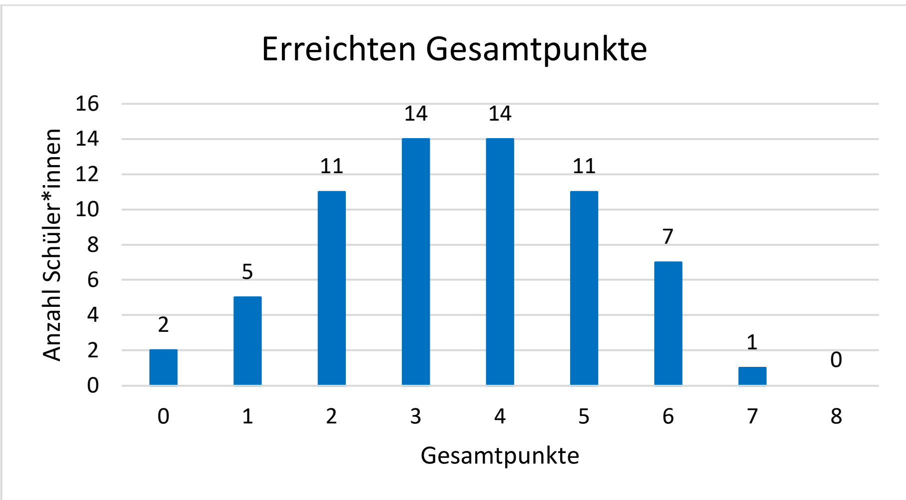


Abbildung 31: Erreichten Gesamtpunkte

Die Grafik veranschaulicht, dass von insgesamt 65 Teilnehmenden zwei Proband*innen keine der acht Aufgaben lösen konnten und somit die minimale Punkteanzahl, null Punkte, erhielten. Eine Aufgabe wurde von fünf Schüler*innen erfolgreich bearbeitet, während elf Lernende zwei Punkte erzielen konnten. Die Anzahl der Teilnehmer*innen, welche drei Punkte erreichen konnten, ist ident mit jener, welche vier Aufgaben richtig lösten – jeweils 14 Proband*innen konnten drei sowie vier Punkte erzielen. Die Punkteanzahl von fünf wurde von elf Schüler*innen erreicht, während sechs Teilnehmende sieben Punkte erreichten. Lediglich ein Kind konnte sieben Aufgaben richtig lösen. Die maximale Punkteanzahl von acht Punkten erzielte keine Person.

Der Mittelwert aller 65 Schüler*innen, welche an der Untersuchung teilgenommen haben, liegt bei 3,5. Dies bedeutet, dass die Untersuchungsteilnehmer*innen im Durchschnitt 3,5 Punkte erzielen konnten. Dieser Mittelwert befindet sich ungefähr in der Mitte des möglichen Wertebereiches. Die Standardabweichung, welche die durchschnittliche Abweichung der einzelnen Punkteanzahlen vom Mittelwert angibt, beträgt 1,6. Auch wenn die Werte eine gewisse Streuung aufzeigen, liegen diese relativ konzentriert um den Mittelwert. Konkret bedeutet dies, dass ein Großteil der Werte im Bereich zwischen 3,5 ± 1,6 (zwischen 1,9 und 5,1) Punkten liegt. Bei einer Betrachtung des Histogramms ist sichtbar, dass viele Lernende eine Punkteanzahl zwischen zwei und fünf erzielen konnten. Die Daten weisen keine extremen Ausreißer auf und sind somit weitgehend symmetrisch verteilt.

7.1.2 Punkte der einzelnen Aufgaben

Anbei werden die Punkte betrachtet, welche die Teilnehmer*innen bei den einzelnen Aufgaben erreichen konnten. Das Säulendiagramm anbei zeigt, wie vielen Proband*innen eine adäquate Lösung für jedes Beispiel gelang. Die farblichen Markierungen der einzelnen Säulen veranschaulichen die Teilgebiete der Kombinatorik. Die blaue Farbe steht für die Aufgaben aus dem Bereich des Aspektes der Multiplikation, während die orangefarbenen Säulen die Beispiele zur Permutation abbilden. Die grüne Farbe steht für die Testaufgaben zur Kombination und rot für die Variation. Es liegt eine Spannbreite von 65 Punkten vor. Jede Aufgabe konnte theoretisch von minimal null Schüler*innen und von maximal 65 Lernenden korrekt bearbeitet werden.

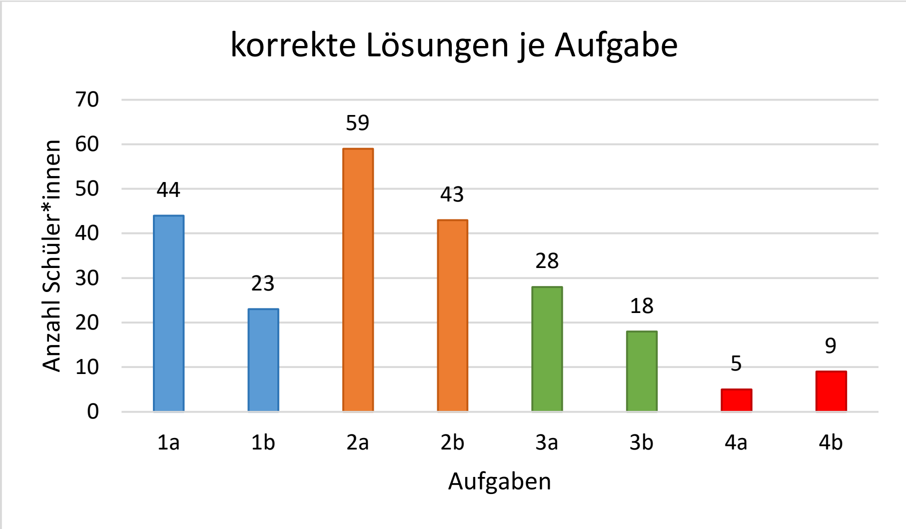


Abbildung 32: korrekte Lösungen je Aufgabe

Das Diagramm veranschaulicht, dass die Aufgabe 1a von 44 Teilnehmenden richtig gelöst wurde, während für die Aufgabe 1b 23 Lernende die richtige Antwort ermittelten. Somit konnte das Beispiel 1a von 68% der Proband*innen und Aufgabe 1b von 35% gelöst werden. Die richtige Anzahl beim Testbeispiel 2a fanden 59 Lernende, wogegen die Aufgabe 2b von 43 Kindern korrekt gelöst wurde. Prozentual betrachtet konnten die leichtere Permutationsaufgabe, 2a, 91% der Testpersonen lösen und das schwierigere Beispiel, 2b, 66% der Schüler*innen. 28 Lernenden gelang es Aufgabe 3a, und 18 Teilnehmer*innen Beispiel 3b richtig zu beantworten. Das leichtere Testbeispiel konnte somit von 43% und die schwierige Aufgabe von 28% fehlerfrei bearbeitet werden. Aufgabe 4a stellte eine größere Herausforderung dar. Nur fünf von 65 Schüler*innen konnten sie richtig lösen. Auch für die Aufgabe 4b wurde von nur neun Lernenden, etwa 15% der Testpersonen, das korrekte Ergebnis ermittelt.

Diese deskriptive Auswertung zeigt, dass die Teilnehmer*innen bei Beispielen aus dem Bereich der Permutation (Aufgabe 2a und 2b) die meisten Punkte erzielen konnten. Das deutet darauf hin, dass diese für die Schüler*innen am leichtesten zu verstehen und zu lösen waren. Hingegen waren die Variationsaufgaben (Aufgabe 4a und 4b) herausfordernder, was an einer deutlich geringeren Lösungsrate ersichtlich ist. Zudem zeigt sich, dass bei den Aufgaben aus dem Bereich des Aspektes der Multiplikation, beim Bereich der Permutation sowie bei der Kombination jene Aufgabe, welche als leichter deklariert wurde, häufiger gelöst werden konnte als das schwierigere Beispiel. Umgekehrt ist dies jedoch bei den Variationsaufgaben. Das anspruchsvollere Testbeispiel wurde von neun Teilnehmenden korrekt gelöst, hingegen die richtige Lösung der einfacheren Aufgabe von fünf Lernenden ermittelt werden konnte. Auf die Unterschiede hinsichtlich der Art der Kombinatorikaufgaben wird zu einem späteren Zeitpunkt noch näher eingegangen. Die Disparitäten bezogen auf die Schwierigkeit der Aufgabenbeispiele werden anbei weiter erläutert.

7.1.3 Leichtere und schwerere Aufgaben

Von insgesamt acht Aufgabenbeispielen in der Testung wurden vier Beispiele, jeweils eine Testaufgabe aus jedem Bereich der Kombinatorik, als leichtere Aufgabe deklariert. Das Säulendiagramm anbei zeigt die erreichten Punkte bei jenen vier Aufgaben.

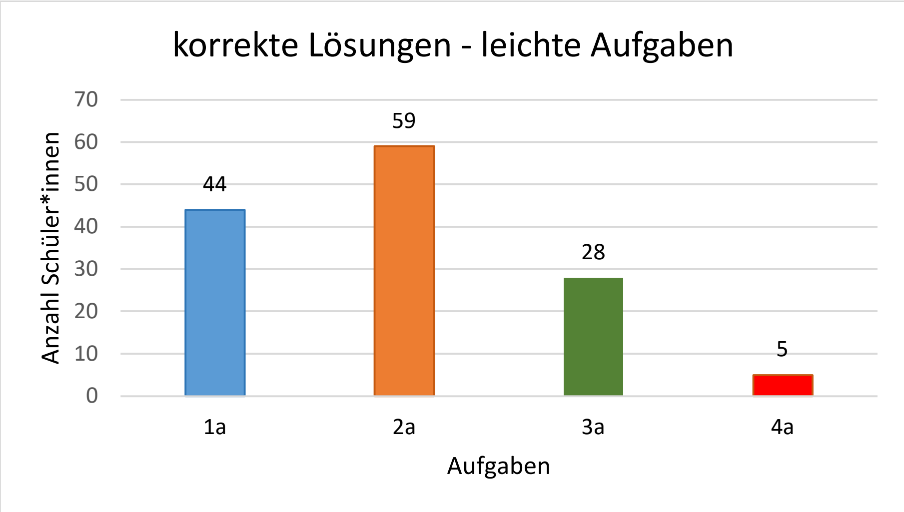


Abbildung 33: korrekte Lösungen - leichte Aufgaben

Deutlich erkennbar ist, dass das Beispiel 2a am häufigsten gelöst werden konnte. Insgesamt 59 von 65 Teilnehmer*innen, also über 90 Prozent der Schüler*innen, gelang es, die Lösung dieser Aufgabe korrekt zu ermitteln. Weiters konnten etwa zwei Drittel der Lernenden – 44 von 65 Kindern – das Aufgabenbeispiel 1a erfolgreich bearbeiten. Im Vergleich dazu fällt die Lösungsquote der leichteren Kombinationsaufgabe, Beispiel 3a, deutlich ab. Diese wurde von etwas weniger als der Hälfte, von 43% der Schüler*innen, gelöst. Besonders auffällig ist, dass die Aufgabe 4a von nur fünf Schüler*innen fehlerfrei bearbeitet werden konnte. Werden all jene leichten Beispiele zusammen betrachtet, zeigt sich, dass diese im Mittel von 34 Testteilnehmer*innen richtig bearbeitet wurden.

Die anderen vier Aufgaben, wieder jeweils ein Beispiel aus den einzelnen Bereichen der Kombinatorik, wurden als schwieriger eingestuft. Die Grafik anbei zeigt, wie viele Punkte die Untersuchungsteilnehmenden bei diesen Testbeispielen erreichen konnten.

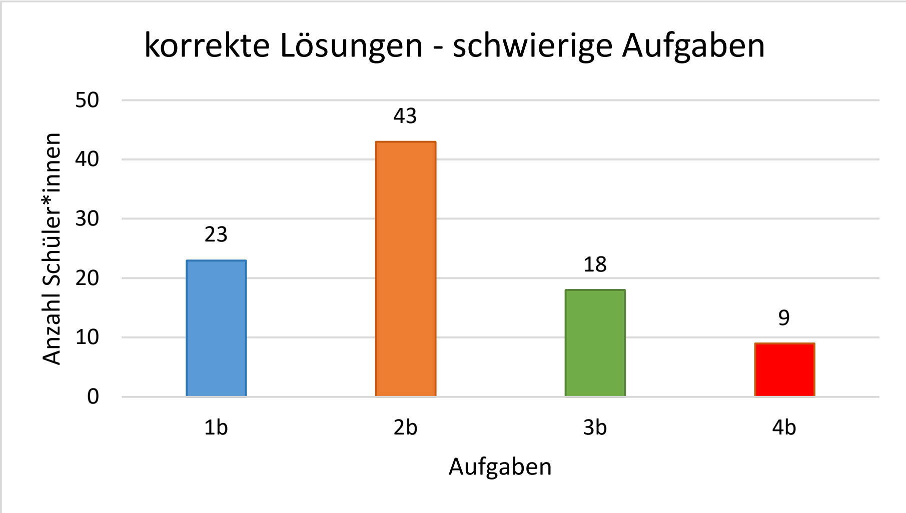


Abbildung 34: korrekte Lösungen - schwierige Aufgaben

Bei einer näheren Betrachtung der schwierigeren Beispiele ist klar ersichtlich, dass die Aufgabe 2b die höchste Lösungsquote aufzeigt. Etwa zwei Drittel der Teilnehmenden, 43 Schüler*innen, konnten für diese Aufgabe eine adäquate Lösung finden. Deutlich weniger Untersuchungsteilnehmer*innen gelang es, die richtige Anzahl an Möglichkeiten beim Testbeispiel 1a zu ermitteln. 23 Lernenden, etwa 35% der Teilnehmenden, konnten dieses erfolgreiche bearbeiten. Weiters wurde die Lösung von Aufgabe 3b von 28% der Schüler*innen korrekt ermittelt. Hingegen konnten nur 9 Schüler*innen das Beispiel 4b richtig lösen. Werden alle schwierigeren Aufgaben gemeinsam analysiert, konnten diese im Mittel von 23 Untersuchungsteilnehmenden zutreffend beantwortet werden.

Das folgende Balkendiagramm vergleicht die separat berechneten Mittelwerte der leichteren und schwierigeren Aufgaben miteinander und zeigt zusätzlich den Mittelwert aller Aufgaben gemeinsam. Somit wird eine anschauliche Darstellung der Unterschiede zwischen den Aufgaben sowie ein Überblick über die Gesamtleistungen ersichtlich.

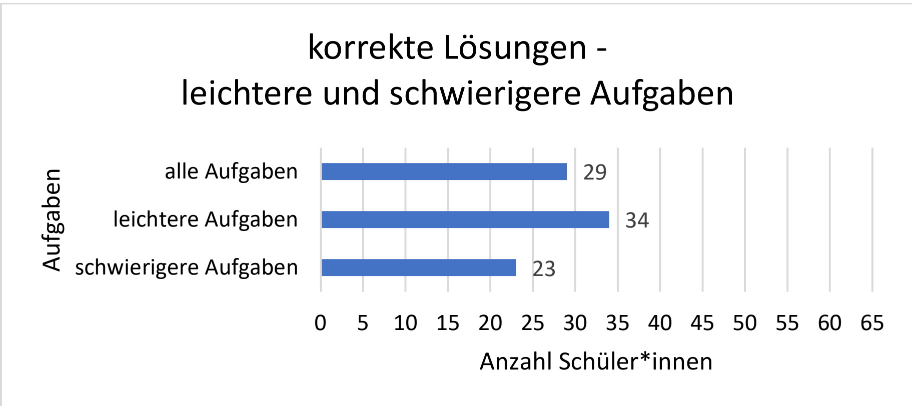


Abbildung 35: korrekte Lösungen - leichtere und schwierigere Aufgaben

Werden alle acht Testaufgaben gemeinsam betrachtet, zeigt sich, dass im Mittel eine Aufgabe von 29 der 65 Teilnehmer*innen gelöst wurde. Konkret bedeutet dies, dass etwas weniger als die Hälfte der Schüler*innen ein Aufgabenbeispiel aus dem Bereich der Kombinatorik korrekt bearbeiten konnten. Eine leichtere Aufgabe wurden hingegen von etwas mehr als der Hälfte der Lernenden adäquat gelöst. Im Mittel konnten hier 34 Testteilnehmer*innen ein Beispiel erfolgreich bearbeiten, während eine schwierigere Aufgabe im Durchschnitt von etwa einem Drittel richtig gelöst wurde. Es zeigt sich somit, dass allgemein betrachtet die leichteren Aufgaben von mehr Teilnehmenden gemeistert werden konnten als die schwierigeren Beispiele.

7.1.4 Geschlechtsspezifische Auswertung

Wie bereits im Kapitel 6.1 beschrieben, nahmen insgesamt 35 Schülerinnen und 30 Schüler an der Untersuchung teil. Das Verhältnis von Mädchen und Buben beträgt somit 54:46, was darauf hindeutet, dass beide Geschlechter in der Studie nahezu gleich vertreten sind. Dies veranschaulicht das Kreisdiagramm anbei.

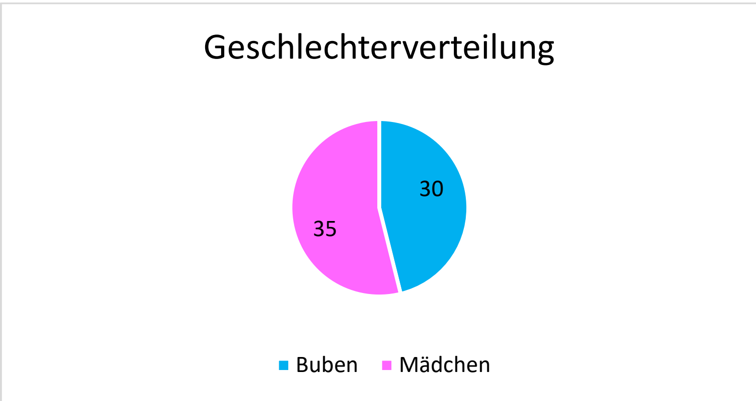


Abbildung 36: Geschlechterverteilung

Werden die durchschnittlich erreichten Punkte der Teilnehmer*innen hinsichtlich des Geschlechts betrachtet, so zeigt sich Folgendes:

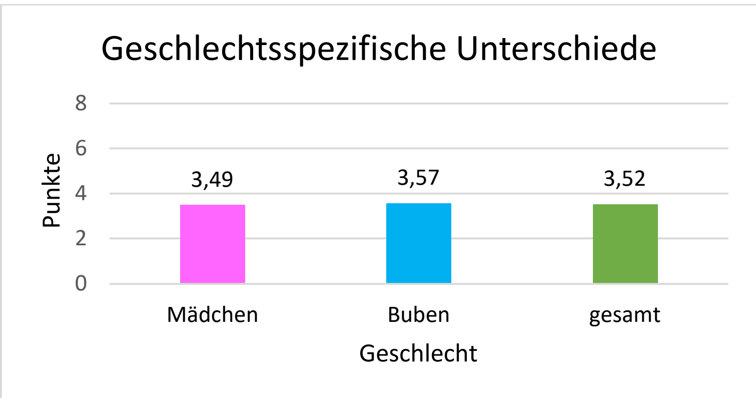


Abbildung 37: Geschlechtsspezifische Unterschiede

Alle an der Untersuchung teilnehmenden Mädchen konnten im Durchschnitt 3,5 Aufgaben lösen, während es den männlichen Teilnehmern gelang, im Mittel 3,6 Beispiele korrekt zu ermitteln. Zudem veranschaulicht das Säulendiagramm nochmals, dass unabhängig vom Geschlecht alle Teilnehmenden durchschnittlich 3,5 Beispiele adäquat bearbeiten konnten. Diese Ergebnisse zeigen, dass es hinsichtlich der Geschlechter bei der Bearbeitung der kombinatorischen Aufgaben keine Unterschiede gibt. Mädchen und Buben konnten die Aufgaben gleich gut lösen. Die Grafik anbei veranschaulicht weiters die geschlechtsspezifischen Disparitäten hinsichtlich der einzelnen Testbeispiele.

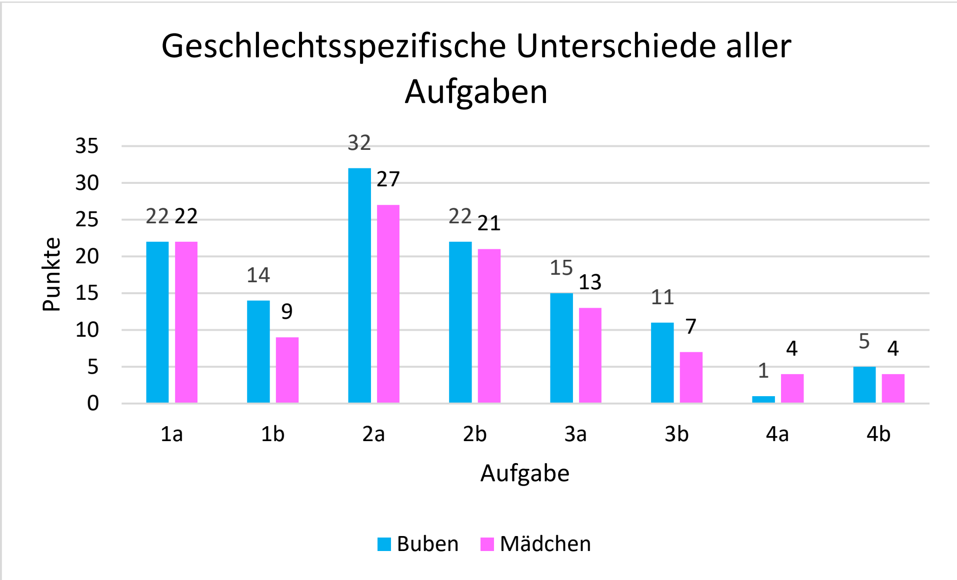


Abbildung 38: Geschlechtsspezifische Unterschiede aller Aufgaben

Das Säulendiagramm zeigt die Anzahl an Mädchen und Buben, welche die jeweiligen Aufgaben des Testbogens richtig bearbeiten konnten. Beim Beispiel 1a erzielten hierbei die beiden Geschlechter ein identes Ergebnis. Jeweils 22 Schülerinnen und Schüler konnten dieses Beispiel korrekt lösen. Ebenfalls nahezu ausgeglichen ist die Anzahl an richtigen Lösungen bei der Aufgabe 2b. Diese konnte von 22 Buben und von 21 Mädchen richtig beantwortet werden. Eine Differenz von einem Kind gibt es ebenfalls bei der Aufgabe 4b, welche fünf männliche Teilnehmer und vier weibliche Teilnehmerinnen korrekt beantwortet haben. Auch beim Beispiel 3a ist die Anzahl relativ nah beieinander – 15 Buben und 13 Mädchen konnten die richtige Lösung ermitteln. Bei einer genaueren Betrachtung des Aufgabenbeispiels 4a ist auffällig, dass dieses von vier Mädchen und einem Buben richtig gelöst wurde. Hierbei lässt sich zwar ermitteln, dass 80% der Teilnehmenden, die die Aufgabe richtig lösen konnten, weiblich waren. Dennoch gibt es nur eine geschlechtsspezifische Differenz von drei Kindern. Dieses Beispiel wurde allgemein von wenigen Kindern gelöst, weshalb die geschlechtsspezifischen Unterschiede nicht sehr aussagekräftig sind. Hingegen schnitten die männlichen Teilnehmer bei der Aufgabe 3b etwas besser ab. Dieses wurde von 11 Buben und von 7 Mädchen richtig beantwortet. Auch bei der Aufgabe 2a hatten die Buben einen kleinen Vorteil – 32 Schüler und 27 Schülerinnen ermittelten die korrekte Lösung. Weiters ist auch beim Beispiel 1b eine leichte Differenz erkennbar – 14 Teilnehmer im Vergleich zu 9 Teilnehmerinnen lösten die Aufgabe richtig.

Insgesamt betrachtet wird deutlich, dass einige Testaufgaben von mehr Buben als Mädchen gelöst werden konnten. Werden die korrekt bearbeiteten Aufgaben zusammenaddiert, zeigt sich, dass alle Buben insgesamt 122 Beispiele lösten, während alle Mädchen zusammen 107 richtige Anzahlen an Möglichkeiten angeben konnten. Hierbei muss jedoch noch beachtet werden, dass insgesamt fünf Schülerinnen mehr an der Untersuchung teilgenommen haben als Schüler. Folglich wurde in einem weiteren Schritt ermittelt, dass insgesamt 30 Buben je acht Aufgaben gestellt bekamen, weshalb sie maximal 240 Punkte hätten erreichen können. Alle 35 Mädchen hatten gesamt ein Maximum von 280 korrekten Beispielen. Werden nun die richtig gelösten Aufgaben mit den Maxima in Verbindung gebracht, zeigt sich, dass die männlichen Teilnehmer insgesamt die Hälfte der Maximalpunkte erreichten, hingegen die Schülerinnen 38% der maximal zu erreichenden Punkte erzielten. Während alle Buben zusammen insgesamt die Hälfte der maximalen Punkte erzielen konnten, gelang es den Mädchen, etwa 40% der Maximalleistung zu erzielen.

Werden nun die geschlechtsspezifischen Differenzen zusammenfassend betrachtet, kann festgestellt werden, dass die Leistungen der Mädchen und der Buben in einem ersten Blick nur gering voneinander abweichen. Während die Mädchen im Mittel 3,5 Punkte erzielten, erreichten die Buben durchschnittlich 3,6 Punkte. Bei einer detaillierten Betrachtung der einzelnen Aufgaben werden jedoch bei einigen Beispielen Unterschiede zugunsten der Schüler sichtbar. Wird das Vergleichskriterium der Maximalleistung herangezogen, wird ebenfalls deutlich, dass die Buben gesamt einen höheren Anteil der Maximalpunkte erreichen konnten als die Mädchen. Geschlechtsspezifische Differenzen bei der Bearbeitung von kombinatorischen Aufgaben können somit nicht auf die Gesamtpunkteanzahl der einzelnen Teilnehmenden beschränkt werden, sondern spiegeln sich besonders in der Bearbeitung einzelner Aufgaben wider.

7.1.5 Selbsteinschätzung

Zu Beginn des Testbogens wurden die Teilnehmer*innen um eine Selbsteinschätzung ihrer Mathematikleistungen gebeten. Die Schüler*innen konnten angeben, ob sie in Mathematik sehr gut, gut, mittelmäßig oder nicht so gut sind. Das Kreisdiagramm anbei veranschaulicht die Einschätzungen der Testteilnehmenden.

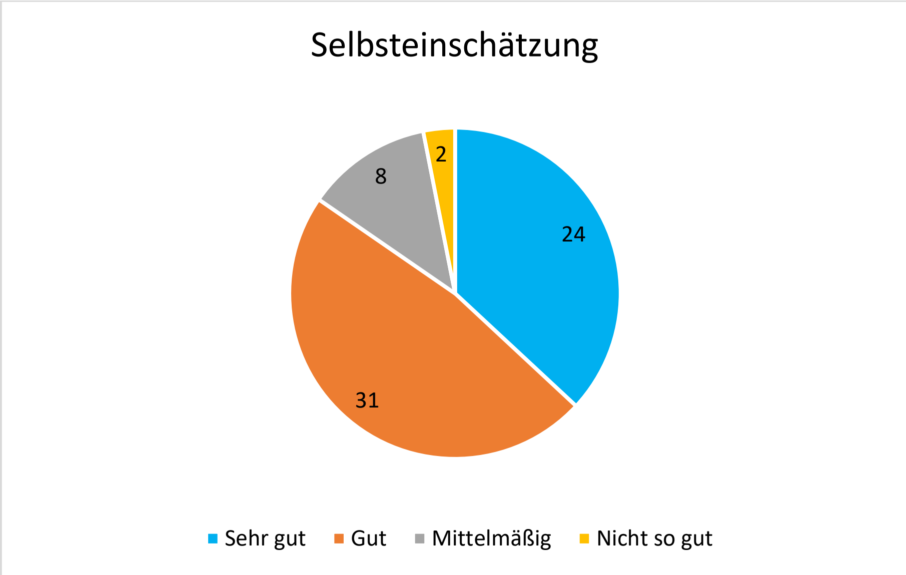


Abbildung 39: Selbsteinschätzung

Wie die Grafik zeigt, schätzten 48 % der Teilnehmenden ihre Mathematikleistungen als gut ein. Zudem bezeichneten sich 24 Schüler*innen als sehr gut in Mathematik. Acht Lernende stuften sich als mittelmäßig ein, zwei weitere als weniger gut. Das Balkendiagramm anbei veranschaulicht die durchschnittlich erzielten Punkte abhängig von der Selbsteinschätzung der Schüler*innen.

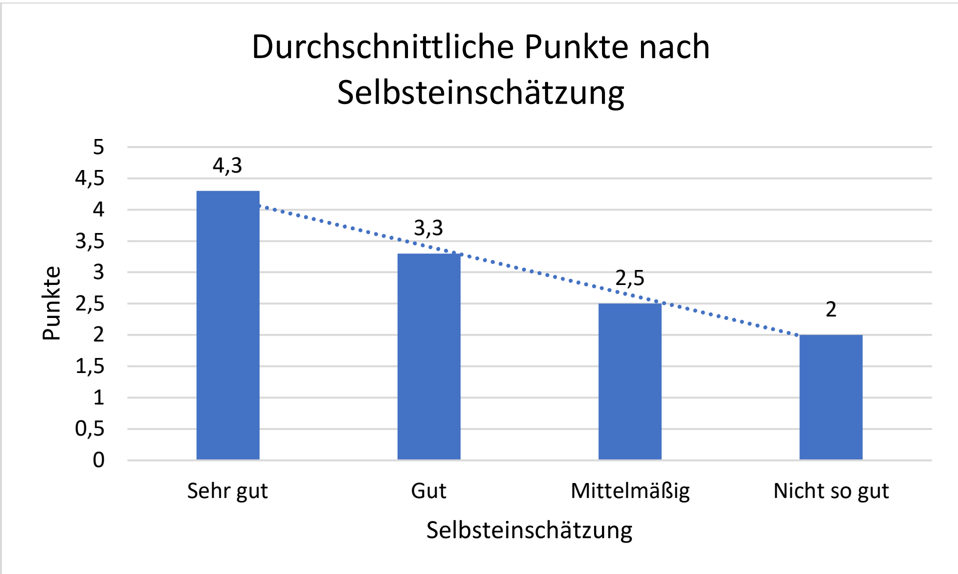


Abbildung 40: Durchschnittliche Punkte nach Selbsteinschätzung

Es wird ersichtlich, dass all jene Lernende, welche angaben, dass sie in Mathematik sehr gut sind, im Mittel 4,3 Punkte bei der Testung erzielen konnten. Alle Schüler*innen, die sich selbst als gut in Mathematik einschätzten, erzielten im Durchschnitt 3,3 Punkte, hingegen die Teilnehmer*innen, die ihre Leistungen als mittelmäßig angaben, durchschnittlich 2,5 Punkte erhielten. Die Lernenden, die sich in Mathematik als nicht so gut einschätzten, bekamen im Mittel 2 Punkte. Das Säulendiagramm veranschaulicht auch eine abfallende Trendlinie, welche zeigt, dass die Selbsteinschätzung der Lernenden in einem deutlichen Zusammenhang mit den Leistungen einhergeht. Je schlechter sich die Teilnehmer*innen selbst einschätzen, desto weniger Punkte konnten sie im Mittel erzielen.

Um den Zusammenhang zwischen der Selbsteinschätzung der Testpersonen und den erreichten Punkten genauer zu analysieren, erfolgte eine Korrelationsanalyse. Hierfür wurde die Selbsteinschätzung der Lernenden auf einer Skala von eins bis vier angegeben, wobei eins für die Einschätzung *sehr gut*, zwei für *gut*, drei für *mittelmäßig* und vier für *nicht so gut* steht. Diese Korrelation wird anbei in einem Streudiagramm veranschaulicht.

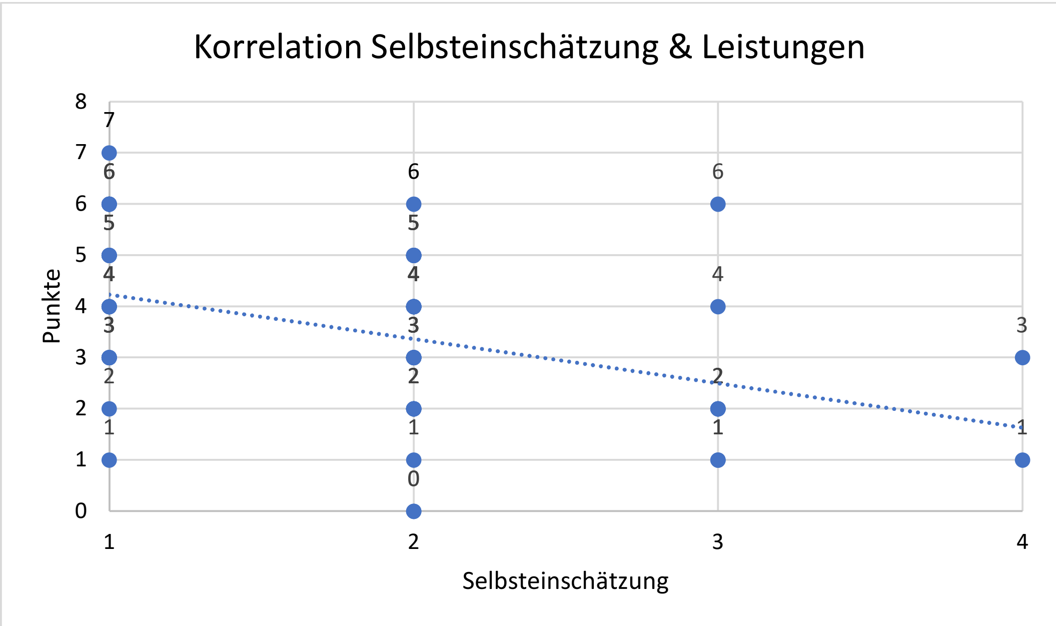


Abbildung 41: Korrelation Selbsteinschätzung und Leistungen

Dieses zeigt, wie die Selbsteinschätzung der Lernenden mit den erreichten Punkten einhergeht. Die Trendlinie, welche gepunktet im Diagramm erkennbar ist, verläuft negativ, was auf eine negative Korrelation hinweist. Auch wenn die Punkte relativ gestreut sind, ist ein abfallender Trend gut erkennbar. Die berechnete Korrelation beträgt hierbei r = -0,4. Dieser Korrelationskoeffizient bedeutet, dass es einen moderaten negativen Zusammenhang gibt, was darauf hindeutet, dass eine höhere Selbsteinschätzung der Schüler*innen in Tendenz mit einer höheren Gesamtpunkteanzahl einhergeht sowie umgekehrt. Bei einer niedrigeren Selbsteinschätzung erzielten die Lernenden tendenziell eine geringere Gesamtleistung. Dieses Ergebnis zeigt die Tendenz, dass die subjektive Einschätzung der Teilnehmenden mit den tatsächlich erbrachten Leistungen einhergeht.

Nach der allgemeinen deskriptiven Auswertung der Daten, wird in den folgenden Unterkapiteln auf die einzelnen Testaufgaben näher eingegangen. Diese werden sowohl quantitativ als auch qualitativ, anhand des zuvor festgelegten Kategoriensystems, dargestellt.

7.2 Aufgabe 1a

Anbei wird die Aufgabe *Schneemann*, welche dem kombinatorischen Prinzip des Aspektes der Multiplikation zugordnet werden kann und beim Testbogen als leichtere Aufgabe dieses Prinzips verankert wurde, quantitativ sowie qualitativ ausgewertet.

7.2.1 Quantitative Auswertung

Die Aufgabe *Schneemann* konnte gesamt von 65% der Teilnehmenden richtig gelöst werden. 44 Schüler*innen gelang das Ermitteln der adäquaten Anzahl an Möglichkeiten. Hingegen konnten 21 Proband*innen, etwa 35%, keine richtige Lösung angeben. Dieses Verhältnis wird im Kreisdiagramm anbei dargestellt:

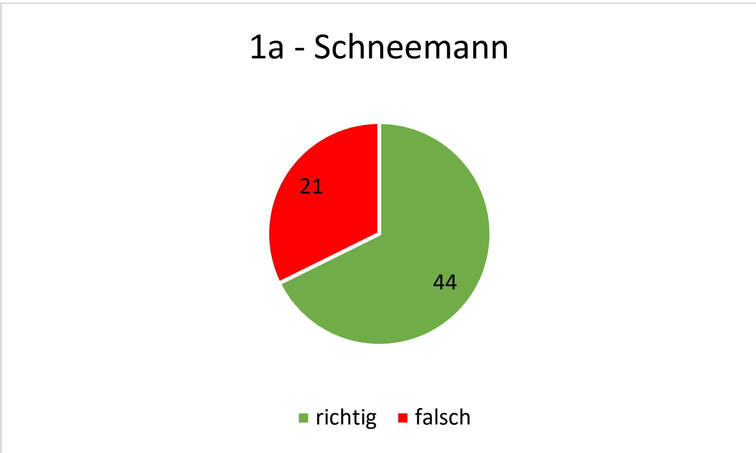


Abbildung 42: 1a - Schneemann

Im Vergleich zu den anderen Testbeispielen konnte die Aufgabe 1a am zweithäufigsten korrekt bearbeitet werden. Die Lösungsrate weist darauf hin, dass die Aufgabenschwierigkeit moderat war und dass die Angabe für viele Lernende gut zugänglich war. Eine genauere Analyse erfolgt anbei in der qualitativen Auswertung der Aufgabe.

7.2.2 Qualitative Auswertung

Folglich wird die Aufgabe Schneemann anhand der zuvor festgelegten Kategorien der Lösungsstrategien, der Darstellungsformen sowie der Fehleranalyse ausgewertet.

7.2.2.1 Kategorie 1 – Lösungsstrategien

Wird genauer analysiert, wie die Untersuchungsteilnehmer*innen die Aufgabe 1a gelöst haben, zeigt sich, dass etwa die Hälfte aller Schüler*innen die Antwort intuitiv ermittelt hat. Von diesen Lernenden konnten ungefähr zwei Drittel auch spontan die richtige Lösung angeben, während ein Drittel eine inkorrekte Lösung anführte. Von all jenen Lernenden mit einem intuitiven Lösungsweg wurden insgesamt sieben Schüler*innen zum *lauten Denken* eingeladen. Hierbei konnte ein Einblick in die Lösungsstrategien der Teilnehmenden gewonnen werden, auch wenn diese nicht schriftlich am Testbogen festgehalten wurden. Eine Testperson erklärt beim *lauten Denken* ein systematisches Vorgehen: „Zuerst habe ich rot mit gelb und dann mit braun zusammengegeben, dann orange einmal mit gelb und braun und dann blau noch mit gelb und braun." (handschriftliche Notizen zu Testbogen 5) Dieses Kind gab den beiden Besenfarben einen Fixplatz und rotierte die drei Topffarben durch. Ähnlich konnte Testperson 13, welche ebenfalls die Lösung am Testbogen intuitiv richtig angab, im Einzelgespräch eine systematische Strategie angeben: „rot mit braun, rot mit gelb, blau mit braun, blau mit gelb, orange mit braun, orange mit gelb" (handschriftliche Notizen zu Testperson 13). Auch hier wird ersichtlich, dass das Prinzip der Kombination verstanden und die Anzahl der Möglichkeiten durch ein geregeltes Vorgehen adäquat ermittelt wurde. Ähnliche Beschreibungen erfolgten auch von weiteren Lernenden. Hingegen gibt das *laute Denken* auch Einblick in inkorrekte Denkweisen, welche am Testbogen nicht ersichtlich waren. Testperson 1 führt im Einzelgespräch an: „Es sind fünf, weil es fünf verschiedene Farben sind." (handschriftliche Notizen zu Testbogen 1) Diese Aussage deckt einen Irrtum des Kindes auf. Für dieses ist nicht ersichtlich, dass jeweils ein Topf mit einem Besen kombiniert werden muss. Das Prinzip der Kombination wurde somit noch nicht begriffen. Eine genauere Analyse der Fehler erfolgt im Kapitel der entsprechenden Unterkategorie. Weitere Teilnehmende, die keine Lösung in das freie Feld am Testbogen eintrugen, konnten auch beim *lauten Denken* nicht mehr erläutern, wie sie auf ihr Ergebnis gekommen sind, was folgende Aussagen widerspiegeln: „Irgendwie weiß ich nicht mehr, was ich da gerechnet habe." (handschriftliche Notizen zu Testbogen 39) „Da habe ich glaube ich eine Farbe übersehen. Ich weiß es nicht mehr so genau." (handschriftliche Notizen zu Testbogen 41) „Ich glaube, da habe ich was falsches hingeschrieben." (handschriftliche Notizen zu Testbogen 44)

Hingegen konnte ein Drittel der Lernenden am Testbogen eine systematische Strategie angeben beziehungsweise anwenden. „Ich habe immer den roten genommen und dann den gelben und den braunen dazugegeben. Das gleiche habe ich auch mit den anderen gemacht." (handschriftliche Notizen zu Testbogen 4) Dieses Kind erläutert im *lauten Denken* sein systematisches Vorgehen und beschreibt, dass es zunächst erkannte, wie vorgegangen werden kann und dies dann anhand eines Transfers auch für die anderen zwei Hutfarben angewendet hat. Auch ein weiteres Kind beschreibt sein Vorgehen verbal auf diese Art und fügt noch einen mathematischen Aspekt hinzu: „Ich habe einen roten Topf genommen und da habe ich einen Besen dazugegeben und dann auch den anderen Besen. Und dann habe ich diese 2 Möglichkeiten mal 3 gerechnet, weil es ja drei verschiedene Töpfe gibt.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 11) Anhand dieser Aussage wird ersichtlich, dass die Person nicht nur systematisch vorgegangen ist, sondern auch bereits einen Einblick in den Aspekt der Multiplikation gewonnen hat. Viele Teilnehmende, die systematisch vorgegangen sind, haben sich die Schneemänner aufgezeichnet oder diese mit Farben markiert, was in der Kategorie der Darstellungsformen näher erläutert wird. Weiters konnte von einigen wenigen Teilnehmenden ein Rückgriff auf Vorwissen, ein Transfer, auch am Testbogen ersichtlich werden, nicht nur im Einzelgespräch, wie zuvor bei Testperson 4 beschrieben. Testbogen 24 veranschaulicht ebenfalls einen Transfer:

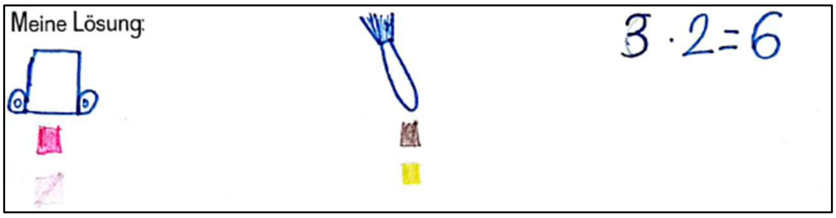


Abbildung 43: Transfer - Schneemann (Testbogen 24)

Jene Testperson erkannte nach dem Aufzeichnen der ersten zwei Möglichkeiten mit dem roten Topf, dass es auch bei den weiteren zwei Topffarben jeweils zwei Möglichkeiten gibt und führte daher die Rechnung drei mal zwei an. Somit wurde der Aspekt der Multiplikation erkannt. Diesen beschreibt auch ein weiteres Kind: „Ich habe mit rot begonnen und das mit braun und gelb zusammengegeben. Das habe ich auch mit den anderen Farben gemacht. Für jede der drei Farben gibt es zwei Möglichkeiten, also insgesamt sechs.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 28)

Außerdem konnten acht Lösungen der Schüler*innen der Unterkategorie Versuch und Irrtum zugeordnet werden. Jene Teilnehmende haben versucht eine Strategie anzuwenden, welche jedoch nicht systematisch war und auch nicht zur Lösung führt. Keines dieser Kinder war Teil des *lauten Denkens*, weshalb keine Einsicht in die Denkweisen gewonnen werden konnte.

7.2.2.2 Kategorie 2 – Darstellungsformen

Werden alle Darstellungen, die die Lernenden im freien Lösungsfeld des Testbogens eingetragen haben, den Unterkategorien der Kategorie Darstellungsformen zugeordnet, so zeigt sich, dass am häufigsten – nämlich bei fast der Hälfte der Teilnehmenden – keine Darstellung angegeben wurde. Eine Person aus der Gruppe jener Teilnehmenden, die am *lauten Denken* teilgenommen haben, gibt hierzu an: „Eigentlich rechne ich immer alles im Kopf und dann vergesse ich es.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 13) Auch wenn das Kind keine Darstellungsform angeführt hat, ermöglicht die Aussage einen Einblick in die Lösungsstrategie, welche auf einem mathematischen Hintergrund basieren dürfte, da angegeben wird, dass gerechnet wird. Auch Testteilnehmer 39 führt im Einzelgespräch an: „Irgendwie weiß ich nicht mehr, was ich mir da gedacht habe.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 39) Jenes Kind gab auch eine inkorrekte Lösung (Testbogen 39) an, welche somit nicht mehr nachvollziehbar ist.

Weiters verwendeten etwa ein Drittel der Teilnehmenden eine visuelle Darstellung. Im *lauten Denken* gibt dazu ein Kind an: „Ich habe mir die Lösung einfach nur aufgezeichnet und gezählt.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 6) Viele Kinder zeichneten Schneemänner auf und malten diesen die entsprechenden Töpfe und Hüte hinzu, wie etwa Testperson 16:

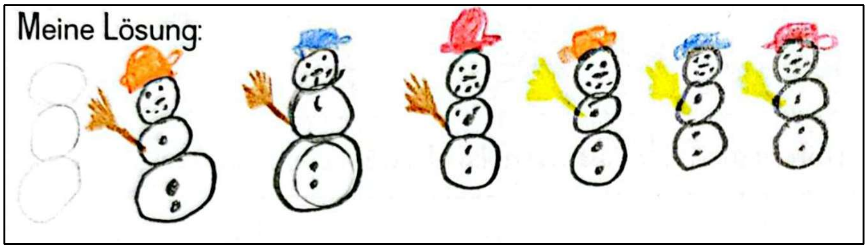


Abbildung 44: zeichnerische Darstellung - Schneemann (Testbogen 16)

Auch Testteilnehmer 19 führte an: „Ich habe mir hier Schneemänner aufgezeichnet.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 19) Neben konkreten Zeichnungen wurden aber auch andere visuelle Darstellungsformen gewählt. „Da habe ich mir die Farben hingemalt.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 32):

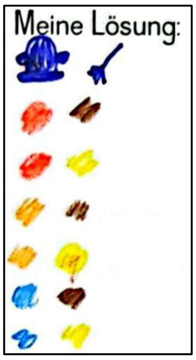


Abbildung 45: farbliche Darstellung - Schneemann (Testbogen 32)

Jenes Kind erkannte, dass die Schneemänner keine wesentliche Rolle beim Bearbeiten der Aufgabe spielen, sondern die Farben. Aus diesem Grund wurden nur diese aufgezeichnet und systematisch miteinander verknüpft. Auch Testteilnehmerin 23 gibt an: „Das habe ich mir hier so mit bunten Punkten aufgezeichnet.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 23)

Neben den zwei häufigsten Darstellungsformen verwendete nicht ganz ein Zehntel der Schüler*innen eine verbale Darstellung. Während eine Testperson durch folgende Erläuterung Einblick in eine inkorrekte Denkweise gibt: „Es gibt nur zwei Besen“ (Notizen auf Testbogen 7), zählen andere Teilnehmer*innen die Möglichkeiten in Worten auf: „rot braun, rot gelb, orange braun, orange gelb, blau braun, blau gelb“ (Notizen auf Testbogen 10). Von einigen Lernenden wurde ihre Vorgehensweise auch verbal begründet, wie etwa Testperson 8: „Wenn rot als Topf benutzt wird, kann man als Besen zwei Möglichkeiten benutzen und so ist das auch bei den anderen Farben. Da es drei Farben für den Topf und zwei für den Besen gibt, kann man drei mal zwei ist gleich sechs rechnen.“ (Notizen auf Testbogen 8) Jene Schülerin erläutert in Worten ihre rechnerische Lösungsstrategie.

Doch auch eine rein mathematische Darstellung wurde von insgesamt vier Lernenden verwendet. Zwei dieser Teilnehmenden waren auch Teil des *lauten Denkens*. Teilnehmer*in 21 gibt hierbei an: „Da habe ich drei mal zwei gerechnet, weil es drei Töpfe und zwei Besen gibt.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 21) Auch ein weiteres Kind wendete die gleiche Rechenweise an und gab in der retrospektiven Phase noch weitere Einblicke, wie es zur Rechnung gekommen ist. „Ich habe einen roten Topf genommen und dazu einen Besen gegeben und dann auch noch den anderen Besen. Dann habe ich diese zwei Möglichkeiten mal drei gerechnet, weil es drei verschiedene Töpfe gibt.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 11) Diese verbale Erläuterung zeigt, dass jenes Kind bereits ein tiefes Verständnis für das Lösen dieser kombinatorischen Aufgabe hat. Aus diesem Grund ist es möglich, eine Rechnung anzugeben. Ein Abzählen aller Möglichkeiten ist nicht mehr notwendig.

7.2.2.3 Kategorie 3 – Fehleranalyse

Werden jene Daten der Teilnehmer*innen, welche die Aufgabe nicht korrekt lösen konnten, näher analysiert, zeigt sich, dass die Schüler*innen auch hierbei verschiedene Herangehensweisen sowie ein unterschiedliches Reflexionsniveau über ihr eigenes Vorgehen haben. Ein Kind begründete seine Lösung anhand der Anzahl der vorhandenen Farben: „Es sind fünf Möglichkeiten, weil es fünf verschiedene Farben sind.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 1) Hierbei zeigt sich, dass der Testteilnehmende die unterschiedlichen Farben als wesentliches Kriterium für seine Lösungszählung sieht. Für ihn ist aus der Angabe nicht ersichtlich, dass die Farben, welche die Töpfe und die Besen haben können, miteinander kombiniert werden müssen.

Dieses Prinzip haben andere Lernende, welche die Aufgabe ebenfalls nicht korrekt lösen konnten, verstanden. So zeigte sich bei einem Kind, dass dieses die Farben der Töpfe und Besen kombiniert hat und beim *lauten Denken* auf eine korrekte Lösung kommt, sich jedoch während der Testung vertan haben dürfte und dadurch eine nicht korrekte Lösung ermittelte: „Ich habe rot und gelb zusammengegeben – das ist eine Möglichkeit. Dann habe ich rot und braun zusammengegeben – das ist die zweite Möglichkeit. Dann noch blau und braun und blau und gelb. Dann fehlt noch orange und braun und orange und gelb. Das sind sechs Möglichkeiten. Wie ich hier jetzt auf zehn gekommen bin, weiß ich nicht mehr.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 44) Auch eine weitere Versuchsperson bemerkt während dem Einzelgespräch mit der Forschungsleiterin ihren Fehler: „Da habe ich glaube ich eine Farbe übersehen.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 41) Aus diesem Grund kommt dieses Kind nur auf vier Möglichkeiten.

Bei Testteilnehmer*in 6 lässt sich eine weitere Fehlerquelle ermitteln. „Weil ein Schneemann keinen Besen hat, sind es zwei Möglichkeiten. Wenn es drei Besen geben würde, wären es drei.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 6) In diesem Zusammenhang ist ersichtlich, dass jenes Kind davon ausgegangen ist, dass jedes Objekt, jeder Besen und jeder Topf, nur einmal verwendet werden kann. Dies weist darauf hin, dass die Testperson das Konzept der Kombinatorik noch nicht ganz begriffen hat und die Flexibilität im Umgang mit den Objekten noch nicht ersichtlich ist. Weiters gibt ein Kind an, dass „es nicht mehr weiß, wie es gerechnet hat“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 39). Jenes Kind kann die fünf Möglichkeiten, welche auf dem Testbogen (Testbogen 39) angegeben wurden, nicht mehr begründen.

7.3 Aufgabe 1b

Die Aufgabe 1b wird auch als *Speisekarte* betitelt und lässt sich dem Aspekt der Multiplikation zuordnen. Aufgrund einer größeren Anzahl an Möglichkeiten als beim Aufgabenbeispiel 1a wird dieses als schwierigeres Beispiel eingeordnet. Anbei wird die Aufgabe sowohl quantitativ als auch qualitativ analysiert.

7.3.1 Quantitative Auswertung

Die Testaufgabe Speisekarte konnten insgesamt 23 Teilnehmer*innen korrekt bearbeiten, was prozentual gesehen etwa 35% der Untersuchungspersonen entspricht. Den restlichen 42 Schüler*innen gelang es nicht, einen adäquaten Lösungsweg zu ermitteln. Dieses Verhältnis zeigt das Kreisdiagramm anbei:

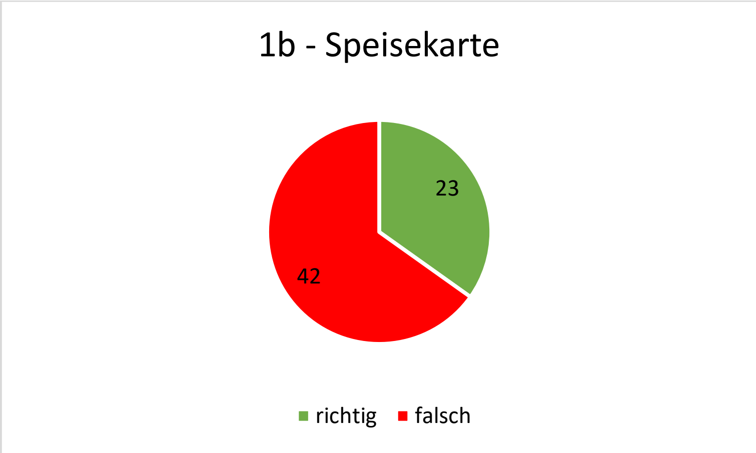


Abbildung 46: 1b - Speisekarte

Verglichen zu den anderen Testbeispielen, konnte die Aufgabe 1b genau dem Durchschnitt entsprechend bearbeitet werden. Wird der Mittelwert aller Aufgaben, die richtig gelöst wurden, berechnet, ergibt sich, dass eine Testaufgabe im Durchschnitt 28 Schüler*innen korrekt bearbeiteten, was genau der Lösungsrate der Aufgabe *Speisekarte* entspricht. Nach dieser Einordnung erfolgt eine genauere Analyse in der qualitativen Auswertung.

7.3.2 Qualitative Auswertung

Nach der Kategorisierung der Eintragung der Lernenden in das freie Lösungsfeld sowie der verbalen Daten aus den Einzelgesprächen werden diese im folgenden Unterkapitel näher beschrieben.

7.3.2.1 Kategorie 1 – Lösungsstrategien

Bei einer genaueren Betrachtung der Lösungsstrategien, welche die Testteilnehmer*innen bei der Aufgabe Speisekarte angaben, zeigt sich, dass von der Hälfte der Personen eine intuitive Lösung verwendet wurde. Während ein Großteil dieser Schüler*innen keine Eintragung am Testbogen vornahm und auch die korrekte Lösung nicht ermitteln konnte, gelang dies jedoch acht Personen. Einige dieser Kinder waren auch Teil des *lauten Denkens*. Auffällig ist, dass diese ein systematisches Vorgehen beschrieben, auch wenn sie dieses nicht schriftlich festgehalten haben, wie etwa folgendes Kind: „Ich habe die Knoblauchsuppe und das Schnitzel zusammengegeben, die Knoblauchsuppe und das Würstchen, die Knoblauchsuppe und die Pizza und jedes davon immer einmal mit dem Mohnkuchen und einmal mit der Himbeertorte. Dann habe ich das auch mit der Frittatensuppe gemacht […].“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 44) Etwas abweichend ist die Erläuterung von Testperson 55, welche ebenfalls einen intuitiven Lösungsweg angab: „Ich habe die Knoblauchsuppe mit den drei Hauptspeisen genommen und es gab ja zwei Nachspeisen, deshalb muss man das mal zwei rechnen. Dann sind das also sechs Möglichkeiten. Dann habe ich das Gleiche mit der Frittatensuppe gemacht, da gibt es auch wieder sechs Möglichkeiten, also insgesamt 12 Möglichkeiten." (handschriftliche Notizen zu Testbogen 55). Hierbei wurde erkannt, dass es nicht notwendig ist, alle Menükombinationen aufzulisten. Das Kind verknüpfte sein systematisches Vorgehen mit einem rechnerischen Vorgehen und konnte so auf geschickte Weise intuitiv, ohne schriftliche Notizen, die Anzahl an Möglichkeiten ermitteln.

Neben intuitiven Lösungswegen lässt sich bei etwas mehr als einem Viertel der Untersuchungsteilnehmer*innen eine systematische Vorgehensweise erkennen. Dieses können die Schüler*innen in den Einzelgesprächen auch erläutern: „Ich habe immer eine Suppe, eine Hauptspeise und einen Kuchen zusammengegeben." (handschriftliche Notizen zu Testbogen 4) Es wird ersichtlich, dass die Testperson die Angabe der Aufgabe genau verstanden hat. Für sie war es nicht notwendig, im *lauten Denken* nochmals alle Möglichkeiten aufzuzählen. Es beschrieb sein Vorgehen auf kurze Weise. Ähnlich ging auch folgendes Kind vor: „Ich habe jede Suppe mit jeder anderen Speise kombiniert" (handschriftliche Notizen zu Testbogen 18). Testperson 32 hingegen beginnt zunächst damit, alle Möglichkeiten zu benennen: „Frittatensuppe, Schnitzel und Mohnkuchen, dann Frittatensuppe, Schnitzel und Himbeertorte, dann […]" (handschriftliche Notizen zu Testbogen 32), erkennt aber nach einigen Auflistungen Folgendes: „Ich brauche jetzt nicht alles aufzählen, es steht eh hier. Ich bin das der Reihe nach so durchgegangen und so auf zwölf gekommen." (handschriftliche Notizen zu Testbogen 32)

Weiters konnte als Lösungsstrategie auch ein Rückgriff auf Vorwissen bei insgesamt sieben Testpersonen verordnet werden. All jene verwendeten eine rechnerische Lösung. Testperson 65 gibt am Testbogen die Rechnung „3 · 2 = 6" (Notizen auf Testbogen 65) an und erläutert sein Vorgehen im Einzelgespräch folgendermaßen: „Es gibt Knoblauchsuppe, Schnitzel und Mohnkuchen; Knoblauchsuppe, Würstel und Mohnkuchen; Knoblauchsuppe, Pizza und Mohnkuchen. Das habe auch mit der Himbeertorte durchgetauscht. Dann sind es schon mal sechs. Wenn man dann noch die Suppe austauscht, sind es doppelt so viele." (handschriftliche Notizen zu Testbogen 65) Weiters wurden auch etliche inkorrekte rechnerische Lösungen angegeben: „6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 =36" (Notizen auf Testbogen 36), „3 · 3 = 9 & 9 + 9 = 18" (Notizen auf Testbogen 27), „2 · 3 = 6" (Notizen auf Testbogen 64) Keines dieser Kinder war Teil des *lauten Denkens*, weshalb kein genauerer Einblick in die Lösungsstrategien ermöglicht wurde.

Zudem konnten fünf Proband*innen der Unterkategorie Versuch und Irrtum zugeordnet werden. Testperson 16 beschreibt ihr inkorrektes Vorgehen im Einzelgespräch folgendermaßen: „Zuerst habe ich ein Schnitzel und eine Himbeertorte genommen, dann ein Schnitzel und eine Frittatensuppe und dann habe ich immer zwei zusammengegeben." (handschriftliche Notizen zu Testbogen 16) Hierbei wird ersichtlich, dass dieses Kind nicht erkannt hat, dass immer drei

Speisen zu einem Menü zusammengestellt werden. Die Person kombinierte immer lediglich zwei Gerichte und ermittelte daher eine falsche Lösung. Auf weitere Fehlerquellen wird in der entsprechenden Kategorie noch genauer eingegangen.

7.3.2.2 Kategorie 2 – Darstellungsformen

Nach dem Kategorisieren der Darstellungsformen der Aufgabe 1b zeigt sich, dass auch bei diesem Testbeispiel die Hälfte der Teilnehmenden keine Darstellung angab. Zum laut*en Denken* wurden insgesamt vier Schüler*innen eingeladen, welche bei der Aufgabe *Speisekarte* das Lösungsfeld freiließen. Testteilnehmer*in 13 hinterfragt sich hierbei im Einzelgespräch selbst: „Wie habe ich das nochmal gerechnet? Ich vergesse immer alles so schnell. Ich weiß es nicht mehr." (handschriftliche Notizen zu Testbogen 13) Ähnlich gibt auch Testperson 39 an: „Ich weiß es nicht mehr." (handschriftliche Notizen zu Testbogen 39) Wesentlich ist, dass auch bei beiden Teilnehmenden die Lösung als *falsch* bewertet wurde (Testbogen 13 & 39). Die Aussagen, gemeinsam mit einer nicht vorhandenen Darstellungsform, weisen darauf hin, dass die Lernenden keine klare Strategie hatten und sich somit auch keine nachvollziehbaren Notizen machen konnten. Aufgrund dessen, dass etwa drei Viertel der Teilnehmenden, welche keine Darstellung anführten, auch die korrekte Lösung nicht ermitteln konnten, lässt sich darauf schließen, dass es vielen Lernenden so erging wie den Testpersonen 13 und 39.

Dennoch konnte ein Viertel jener Untersuchungsteilnehmer*innen, die das Lösungsfeld leer ließen, die Aufgabe richtig bearbeiten. Ein Kind gibt hierfür an: „Ich habe das im Kopf so durchgetauscht." (schriftliche Notizen zu Testbogen 41) Hingegen erläutert Testperson 44 im *lauten Denken* nur die eigene Vorgehensweise und Lösungsstrategie und gibt keinen Einblick in die Darstellung. Es lässt vermuten, dass auch diese teilnehmende Person die Möglichkeiten im Kopf gezählt hat, da sie die richtige Lösung angeben konnte.

Weiters verwendete nicht ganz ein Zehntel der Gesamtteilnehmenden eine visuelle Darstellung. Ein Großteil jener Kinder, die sich für diese Form entschieden, verwendete Typografien. Hierfür wurden zumeist die Speisen mit Buchstaben abgekürzt: „F für Frittaten, S für Schnitzel, H für Himbeertorte" (handschriftliche Notizen zu Testbogen 1). Auch Testperson 28 führt im *lauten Denken* diese Abkürzungen an: „Ich habe K für Knoblauchsuppe, Sch für Schnitzel, M für Mohnkuchen und so weiter genommen." (handschriftliche Notizen zu Testbogen 28) Die Abbildung anbei veranschaulicht die typografische Darstellung von Testbogen 4.

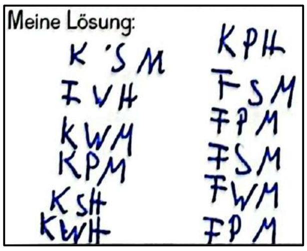


Abbildung 47: Typografie - Speisekarte (Testbogen 4)

Durch diese Form der Notation kann die Anzahl der Möglichkeiten kompakt, übersichtlich und effizient ermittelt werden. Die Schüler*innen erkannten, dass es nicht notwendig ist, jede Speise auszuschreiben, sondern auch Abkürzungen bei der Lösungsfindung helfen. Neben typografischen Veranschaulichungen verwendeten Teilnehmende auch farbliche Darstellungen. Testperson 18 führte im Einzelgespräch an, dass sie sich „das mit Farben aufgezeichnet“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 18) hat, wie die Abbildung zeigt:

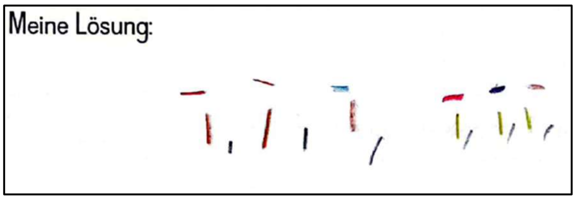


Abbildung 48: farbliche Darstellung - Speisekarte (Testbogen 18)

Jenes Kind gab jedem Gericht eine andere Farbe und fand die adäquate Lösung durch das Kombinieren dieser. Auch hier wurde ein effizienter Weg gefunden. Hingegen erstellte eine andere Testperson aufwändige Zeichnungen:

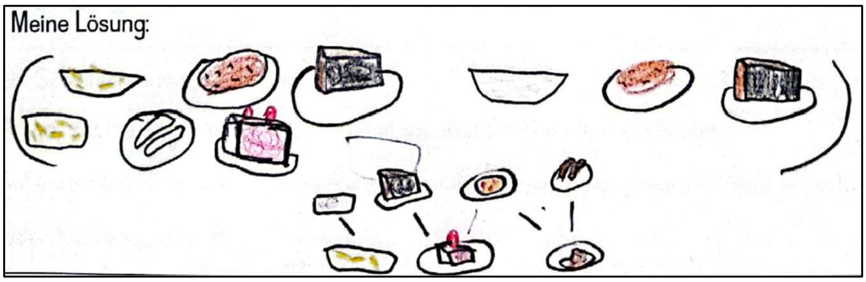


Abbildung 49: zeichnerische Darstellung - Speisekarte (Testbogen 16)

„Ich habe mir alles aufgezeichnet. Zuerst habe ich eine Frittatensuppe, ein Schnitzel und eine Himbeertorte genommen und die anderen Bilder habe ich so darüber gegeben.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 16). Wird die Zeichnung gemeinsam mit der Aussage analysiert, zeigt sich, dass hierbei der Fokus auf die Lösung verloren ging. Jenes Kind konnte keine systematische Darstellung finden, die half, die Anzahl der Möglichkeiten zu ermitteln. Eine weitere besondere visuelle Darstellung gab Untersuchungsteilnehmer*in 11 an. Diese zeigt die Abbildung anbei.

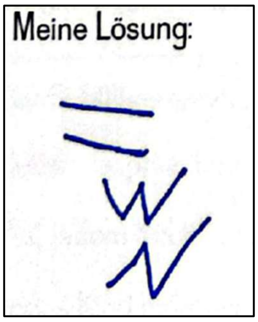


Abbildung 50: visuelle Darstellung - Speisekarte (Testbogen 11)

Im *lauten Denken* wurde hierzu erläutert: „Ich habe mir da Reihen gemacht. Zuerst habe ich einmal eine gerade Reihe gerechnet, dann eine Zick-Zack-Reihe und dann noch ein anderes Zick-Zack-Muster.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 11) Auf Nachfrage nach einer genaueren Erläuterung konnte die Untersuchungsperson nicht mehr genau erklären, warum diese Darstellungsform gewählt wurde. Sie zeigt jedoch, dass das Kind ein gutes abstraktes Vorstellungsverständnis hat. Das Kind ging die Möglichkeiten der Kombinationen im Kopf durch und veranschaulichte sich diese anhand von Linien, wenngleich das Ergebnis inkorrekt ist (Testbogen 11).

Weiters gaben zehn Schüler*innen ihrer Darstellung eine verbale Basis. Eine Testperson führte ihren Lösungsweg in Worten an: „Pro Suppe gibt es sechs Möglichkeiten. Beispiel: Knoblauchsuppe, Schnitzel, Mohnkuchen. Knoblauchsuppe, Schnitzel, Himbeertorte. So ist das auch bei Würstel und Pizza. Bei Frittatensuppe gibt es gleich viele Möglichkeiten. Deswegen: 6 · 2 = 12“ (Notizen auf Testbogen 8) Durch diese Erklärung wird ein genauer Einblick in die Lösungsstrategie sowie in das mathematische Verständnis möglich. Es ist nachvollziehbar, wie die Testperson das Ergebnis ermitteln konnte. Hingegen führten viele Schüler*innen, deren Notizen der Unterkategorie verbale Darstellung zugeordnet wurden, auch alle Möglichkeiten in Worten an. Sie verwendeten keine Abkürzungen.

Von ebenfalls zehn Teilnehmenden wurde eine mathematische Darstellungsform gewählt. Hierbei können unterschiedliche Herangehensweisen analysiert werden. Testperson 6 gibt im *lauten Denken* Folgendes an: „Ich habe mir das durchnummeriert, damit ich nicht immer alle Gerichte aufschreiben muss.“ (schriftliche Notizen zu Testbogen 6) Dieses teilnehmende Kind weist auf eine Zifferndarstellung hin. Es hat erkannt, dass es Zeit sparen kann, wenn es die Gerichte anhand von Ziffern zu Menüs zusammenstellt und nicht immer jedes einzelne Gericht ausschreiben muss. Es wurde eine gewisse Abstraktionsfähigkeit angewandt sowie selbst erkannt, dass die kognitive Belastung minimiert werden kann, wenn nicht immer alle langen Gerichte gelesen und notiert werden müssen. Eine weitere mathematische Darstellung wurde am Testbogen 21 angegeben:

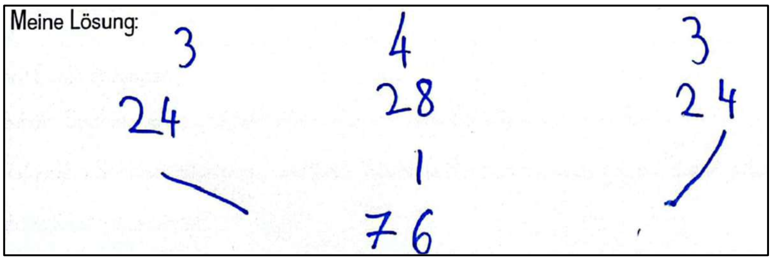


Abbildung 51: mathematische Darstellung - Speisekarte (Testbogen 21)

Im Einzelgespräch erklärte die Untersuchungsperson die Darstellung folgendermaßen: „Ich habe eine Suppe mal die anderen gerechnet. Das habe ich bei jeder Speise so gemacht und deshalb bin ich auf 76 gekommen.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 21) Nach genauerer Nachfrage konnte das Kind nicht mehr erläutern, wie es welche Ziffern und Zahlen zugeordnet hat. Es zeigt sich, dass das Kind versucht hat, eine systematische Darstellung anzuwenden, diese jedoch nicht zur Ermittlung der Lösung führte.

7.3.2.3 Kategorie 3 – Fehleranalyse

Erfolgt eine genaue Analyse der Fehler, welche den Lernenden unterlaufen sind, kann eine Vielfältigkeit dieser erkannt werden. Während Testperson 5 im *lauten Denken* den Lösungsprozess genau erläutern kann, gibt diese auf Nachfrage, wie sie dennoch auf 24 Möglichkeiten gekommen ist, folgendes an: „Da habe ich mich vertan.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 5) Durch das Einzelgespräch wird sichtbar, dass das Kind weiß, wie die Aufgabe gelöst wird und systematisch vorgegangen ist – dennoch wurde die Anzahl der Möglichkeiten noch verdoppelt und somit ein inkorrektes Ergebnis angegeben. Einblick in eine weitere inkorrekte Lösung ermöglicht Testteilnehmer*in 42 im Einzelgespräch. Diese hat insgesamt acht Möglichkeiten ermittelt (Testbogen 42). „Einmal die Knoblauchsuppe mit dem Schnitzel und mit dem Mohnkuchen und dann nochmal die Knoblauchsuppe mit dem Schnitzel und der Himbeertorte. Dann das gleiche mit der Frittatensuppe und dann immer so weiter.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 42) Diese verbale Erläuterung zeigt, dass das Prinzip der Kombination gut verstanden wurde. Es konnten auch einzelne Kombinationen korrekt aufgezählt werden. Dennoch dürfte beim Abzählen der Möglichkeiten ein Fehler unterlaufen sein, welcher nicht mehr nachvollziehbar ist, da das Lösungsfeld frei war und keine nachvollziehbaren Notizen vorhanden waren.

Mehrere Testteilnehmer*innen ermittelten, dass es zwei verschiedene Gerichte gibt. Die Vorgehensweise hierzu erklärt ein Kind im *lauten Denken* folgendermaßen: „Es gibt zwei Möglichkeiten, weil es bei den Suppen zwei sind und auch bei der Nachspeise. Bei der Hauptspeise sind es zwar drei Gerichte, aber es gibt nur zwei Möglichkeiten, weil man ja für eine Möglichkeit die drei braucht.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 23) Auch am Testbogen 7 findet sich eine ähnliche verbale Erläuterung: „Es sind 2 Nachspeisen und 2 Suppen, daher gibt es nur 2 Möglichkeiten.“ (Notizen auf Testbogen 7) Weiters ist auch Testperson 6 dieser Fehler unterlaufen. Sie gibt im Einzelgespräch an: „Ich habe die Speisen immer so zusammengegeben, aber eines, ich glaube das Schnitzel, ist mir übriggeblieben. Deshalb sind es nur zwei Möglichkeiten.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 6) Jene Aussagen weisen auf einen fundamentalen Fehler im kombinatorischen Denken hin. Diese Testteilnehmenden betrachten nur die einzelnen Gänge und nicht das gesamte Menü, bestehend aus drei Gängen. Es wird nicht erkannt, dass beim Ermitteln der Möglichkeiten jedes Objekt mehrmals vorkommen kann. Dieses Prinzip hat auch Testteilnehmer*in 60 nicht erfasst. Die Testperson führt an: „Ich habe alle Speisen zusammengezählt. Es gibt sieben Speisen, also sind es sieben Möglichkeiten.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 60) Auch hier wird ersichtlich, dass das Prinzip der Kombination der drei Gänge nicht begriffen wurde. Die Gesamtanzahl der Speisen wird mit der Anzahl an Kombinationen gleichgesetzt.

7.4 Aufgabe 2a

Die Aufgabe 2a, welche den Titel *Spaziergang der Tiere* trägt, kann dem kombinatorischen Prinzip der Permutation zugeordnet werden. Im vorliegenden Testbogen wurde dieses Beispiel als leichtere Permutationsaufgabe zugeordnet. Anbei wird diese Aufgabe quantitativ sowie qualitativ anhand der drei festgelegten Kategorien analysiert.

7.4.1 Quantitative Auswertung

Die Aufgabe *Spaziergang der Tiere* konnte insgesamt von 90% der Untersuchungsteilnehmenden gelöst werden. 59 Schüler*innen gelang es, die richtige Anzahl an Möglichkeiten zu ermitteln, hingegen konnten sechs Lernende keinen adäquaten Lösungsweg finden. Dieses Verhältnis zeigt das Kreisdiagramm anbei:

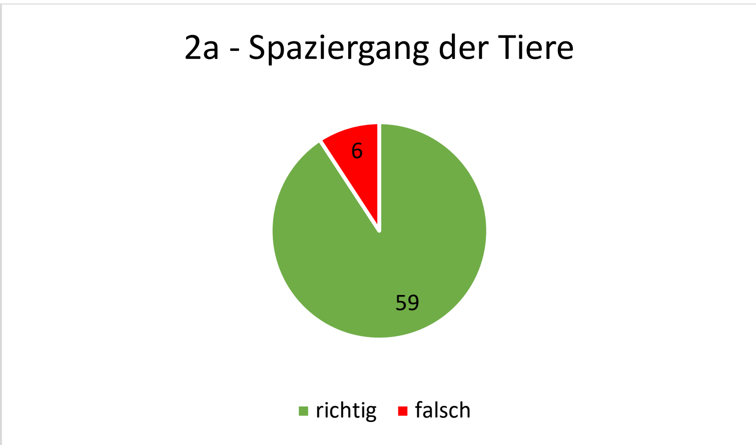


Abbildung 52: 2a - Spaziergang der Tiere

Die Aufgabe *Spaziergang der Tiere* ist verglichen zu den anderen Aufgaben der vorliegenden Forschung jenes Beispiel, welche eindeutig die höchste Lösungsrate hat. Es gelang einer überwiegenden Mehrheit die erfolgreiche Bewältigung, was darauf hinweist, dass die Aufgabe keine überwiegende Schwierigkeit darstellte und gut verständlich war. Eine nähere Analyse folgt anbei in der qualitativen Auswertung.

7.4.2 Qualitative Auswertung

Folgendes Kapitel beinhaltet die qualitative Auswertung der Aufgabe 2a. Hierfür werden sowohl die Daten, welche die Teilnehmer*innen am Testbogen im freien Lösungsfeld eingetragen haben herangezogen, als auch die verbalen Daten, welche beim *lauten Denken* gewonnen werden konnten.

7.4.2.1 Kategorie 1 – Lösungsstrategien

Die freien Lösungsfelder am Testbogen der Lernenden wurden analysiert und anschließend hinsichtlich der erkennbaren Lösungsstrategien codiert und den entsprechenden Unterkategorien zugeordnet. Bei der Aufgabe *Spaziergang der Tiere* zeigt sich, dass die Hälfte der Teilnehmenden keinen expliziten Lösungsweg im Lösungsfeld angegeben hat. Die Schüler*innen konnten sich beim Beantworten der Aufgabe auf ihr Bauchgefühl verlassen beziehungsweise die Antwort intuitiv oder im Kopf finden. Aufgrund dessen, dass die Anzahl an Möglichkeiten relativ gering ist sowie auf Basis einer sehr hohen Lösungsrate, kann darauf geschlossen werden, dass viele Teilnehmende die Aufgabe spontan gemeistert haben und sich ihren Lösungsweg nicht explizit anführen mussten. Dies zeigen auch die Einzelgespräche. Diese wurden insgesamt mit 13 Schüler*innen, welche am Testbogen ihr Lösungsfeld freiließen, geführt, wovon zwölf die richtige Lösung fanden. Alle Teilnehmer*innen konnten im *lauten Denken* ihren Lösungsweg beziehungsweise ihre Strategie verbal äußern. So erläutert ein Kind: „Es muss zwei Möglichkeiten geben. Hinter dem Elefanten stehen zwei Tiere. Da steht zum Beispiel zuerst das Zebra und dann die Giraffe und dann steht zuerst die Giraffe und danach das Zebra.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 1)

Während von vielen Teilnehmer*innen alle Möglichkeiten genau aufgezählt wurden, erkannten einige früher, dass es lediglich zwei verschiedene Reihenfolgen geben kann: „Zuerst das Zebra und dann die Giraffe und dann umgedreht.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 4) Die Aussage dieses Kindes veranschaulicht auch die Erkenntnis, dass der Elefant beim Finden der Anzahl an Möglichkeiten irrelevant ist. Dieser steht immer an erster Stelle. Dies lässt sich auf etlichen Testbögen erkennen. Auf Testbogen 33 findet sich beispielsweise folgende verbale Erläuterung „Zebra + Giraffe; Giraffe + Zebra“ (Notizen auf Testbogen 33). Weiters weisen auch einige Testpersonen im *lauten Denken* darauf hin: „Wir wissen, dass der Elefant als Erster steht.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 13) „Das Zebra und die Giraffe können sich abwechseln, der Elefant nicht.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 23) „Der Elefant will ja unbedingt als erster gehen.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 55) „Es sind eigentlich nur zwei Tiere.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 42) Auch wenn lediglich 25 Kinder eine nachvollziehbare systematische Strategie am Testbogen angaben, wurde eine solche von einem Großteil der Lernenden verwendet.

Zudem wurden vier Testbögen der Unterkategorie Versuch und Irrtum zugeordnet. Bei zwei Personen waren die angegebenen Strategien nicht eindeutig zuordenbar. Eine weitere Person führte folgendes an „G --> 2; Z --> 3“ (Notizen auf Testbogen 29). Diese Darstellung könnte ein Hinweis darauf sein, dass das Kind der Giraffe den zweiten und dem Zebra den dritten Platz zuordnete, ist aber nicht genau nachvollziehbar. Das Kind wurde auch nicht zum *lauten Denken* eingeladen und konnte somit seine Vorgehensweise nicht genauer erläutern. Weiters konnte dieser Unterkategorie Testbogen 45 zugeordnet werden. Die Person zeichnete drei Tiere auf und gab an, dass es eine Möglichkeit gibt.

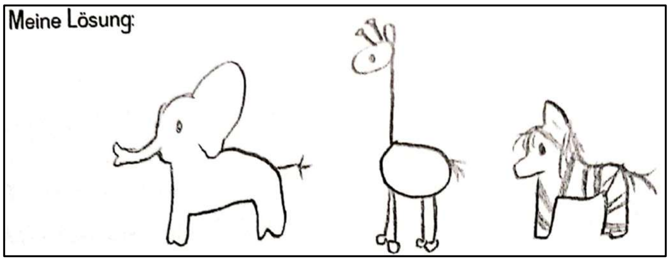


Abbildung 53: bildliche Darstellung - Spaziergang der Tiere (Testbogen 45)

Auch hier liegt ein Irrtum vor. Es wurde nicht erkannt, dass nach verschiedenen Aufstellungen der Tiere gefragt war. Weiters konnte auf zwei Testbögen ein Rückgriff auf ein Vorwissen erkannt werden. Die schriftliche Erklärung: „Es gibt halt nur noch zwei Möglichkeiten“ (Notizen auf Testbogen 7) weist auf das Weltwissen der Testperson hin. Hingegen gab ein weiteres Kind eine mathematische Rechnung „$2 \cdot 2 = 4$“ (Notizen auf Testbogen 21) an, welche ebenfalls dieser Kategorie zugeordnet wird, wenngleich diese nicht zur adäquaten Lösungsfindung beiträgt.

7.4.2.2 Kategorie 2 – Darstellungsformen

Wie bereits bei den Lösungsstrategien angeführt, ließ etwa die Hälfte der Teilnehmenden das Lösungsfeld bei der Aufgabe *Spaziergang der Tiere* frei. Aus diesem Grund können die Bearbeitungen der Kinder auch keiner Darstellungsform zugeordnet werden. Einige dieser Kinder waren Teil des *lauten Denkens*. Auch dort gaben sie kaum Einblick in eine mögliche Darstellung. Aufgrund der geringen Anzahl an Möglichkeiten wurde die Aufgabe tatsächlich von vielen Lernenden im Kopf gelöst. So gab etwa eine Testperson keine Darstellung an, beschreibt aber im *lauten Denken* folgendes systematisches Vorgehen: „Zuerst das Zebra und dann die Giraffe und dann umgedreht.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 4)

Etwa ein Fünftel aller Testpersonen veranschaulichten die Lösung verbal. Einige Kinder führen eine genaue Beschreibung und Erläuterung an: „Es kann entweder das Zebra oder die Giraffe hinter dem Elefanten stehen. Es gibt also zwei Lösungen: Elefant --> Zebra --> Giraffe oder Elefant --> Giraffe --> Zebra“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 8) Andere Schüler*innen wiederum schrieben nur die Möglichkeiten auf: „Elefant, Giraffe, Zebra oder Elefant, Zebra, Giraffe“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 56).

Weiters verwendeten gleich viele Kinder eine visuelle wie eine verbale Darstellung. Bei der visuellen Darstellung waren Zeichnungen der Tiere am häufigsten, wie etwa auf Testbogen 16:

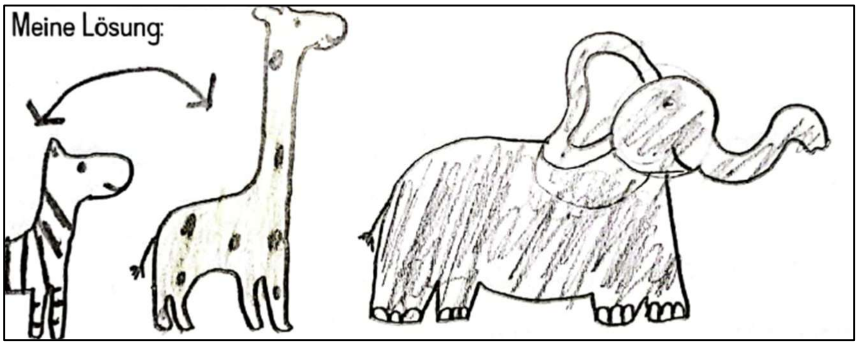


Abbildung 54: bildliche Darstellung - Spaziergang der Tiere (Testbogen 16)

Die Abbildungen dienen den Testteilnehmer*innen als visuelle Stütze. Jedoch zeichneten viele Kinder nur eine Möglichkeit auf und erkannten die zweite intuitiv oder hatten Platzprobleme. Testperson 16 gab dies auch im *lauten Denken* an: „Ich habe mir die Tiere ganz normal aufgezeichnet und weil ich keinen Platz gehabt habe, habe ich das mit einem Pfeil noch gemacht. Also das Zebra und die Giraffe können noch tauschen.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 16) Auch auf Testbogen 32 ist ersichtlich, dass zunächst gezeichnet und anschließend erkannte wurde, dass es nicht notwendig ist, alle Tiere aufzuzeichnen:

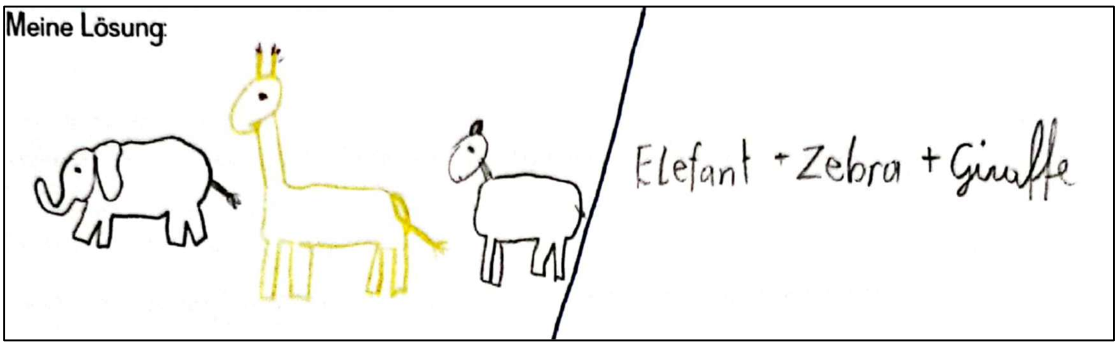


Abbildung 55: bildliche und verbale Darstellung - Spaziergang der Tiere (Testbogen 32)

Neben bildlichen Darstellungen verwendeten Kinder aber auch Typografien. Sie kürzten sich die Tiere ab und gaben deren Anfangsbuchstaben an:

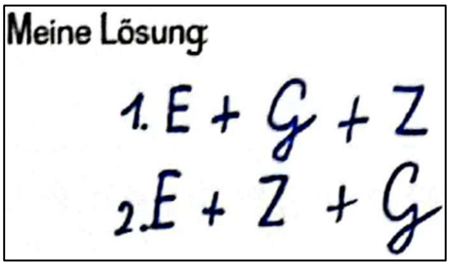


Abbildung 56: typografische Darstellung - Spaziergang der Tiere (Testbogen 22)

Hingegen ordnete Testperson 18 jedem Tier eine andere Farbe zu und kombinierte diese, um die Anzahl an Möglichkeiten zu ermitteln. „Ich habe mir die Tiere mit Farben markiert“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 18). Dieses Vorgehen wird am Bild anbei ersichtlich:

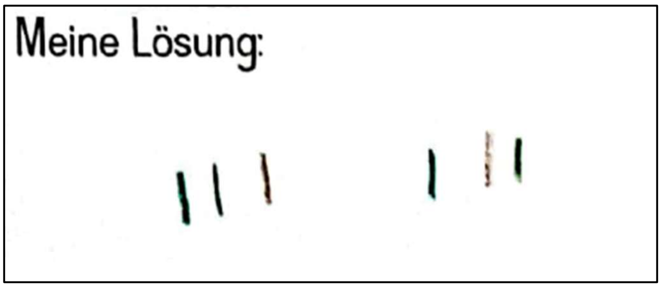


Abbildung 57: farbliche Darstellung - Spaziergang der Tiere (Testbogen 18)

Weiters wurden von drei Testteilnehmer*innen mathematische Darstellungen angegeben. Während zwei Personen den Tieren Ziffern zuordneten und diese miteinander kombinierten, verwendete ein weiteres Kind die Rechnung „2 · 2 = 4“ (Notizen auf Testbogen 21).

7.4.2.3 Kategorie 3 – Fehleranalyse

Die Aufgabe *Spaziergang der Tiere* konnte von einem Großteil der Testteilnehmer*innen richtig gelöst werden. Dennoch gaben sechs Lernende eine inkorrekte Antwort an, wovon zwei Kinder zum *lauten Denken* eingeladen wurden. Eine Testperson erläuterte im Einzelgespräch: „Es sind drei Tiere, deshalb sind es drei Möglichkeiten.“ (handschriftliche Notizen zu Testperson 39) Jenes Kind hat nicht erkannt, dass der Elefant einen fixierten Platz hat und dieser somit keine wesentliche Rolle spielt. Die Problematik der Anordnung der Tiere reduziert sich auf zwei Lebewesen. Für die Testperson dürfte die Anzahl der Tiere der wesentliche Faktor gewesen sein. Vermutlich liegt kein kombinatorisches Verständnis vor. Ein weiteres Kind führte im *lauten Denken* folgende Erklärung an: „Der Elefant ist vorne und die anderen zwei Tiere habe ich hinten getauscht. Dann habe ich zwei mal zwei, also vier, gerechnet.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 21) Die Testperson beschrieb zunächst korrekt, dass der Elefant einen

Fixplatz hat und dass die anderen zwei Tiere getauscht werden können. Auf Nachfrage der Forschungsleiterin, warum anschließend noch gerechnet wurde, konnte das Kind keine Antwort nennen: „Weiß ich nicht mehr.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 21) Aus einem nicht erklärbaren Grund wurde die Anzahl der Tauschmöglichkeiten verdoppelt.

Weiters gab Testperson 9 an, dass es sechs verschiedene Möglichkeiten gibt, wie sich die Tiere aufstellen können (Notizen auf Testbogen 9). Aufgrund dessen, dass das Kind keine Darstellungsform beziehungsweise Lösungsstrategie angab und auch nicht Teil des *lauten Denkens* war, kann nicht nachvollzogen werden, wie die Testperson zu dieser Lösung kam. Es liegt aber die Vermutung nahe, dass nicht erkannt wurde, dass der Elefant einen Fixplatz hat. Können nämlich drei Tiere den Platz beliebig tauschen, würde es sechs Möglichkeiten geben. Auch weitere falsche Antworten können nicht genau nachvollzogen werden.

7.5 Aufgabe 2b

Die Aufgabe 2b bekam den Titel *Fenster schmücken*. Sie lässt sich der kombinatorischen Figur der Permutation zuordnen. Aufgrund einer größeren Anzahl an Möglichkeiten als bei Aufgabe 2a wurde das hier vorliegende Beispiel als schwierigere Permutationsaufgabe deklariert. Anbei wird diese sowohl quantitativ als auch qualitativ analysiert.

7.5.1 Quantitative Auswertung

Insgesamt konnten 43 Schüler*innen die Aufgabe *Fenster schmücken* richtig lösen, hingegen 22 Teilnehmer*innen eine inkorrekte Antwort ermittelten. Prozentual gesehen gelang die Lösungsfindung zwei Drittel der teilnehmenden Kinder. Dies veranschaulicht das Kreisdiagramm anbei:

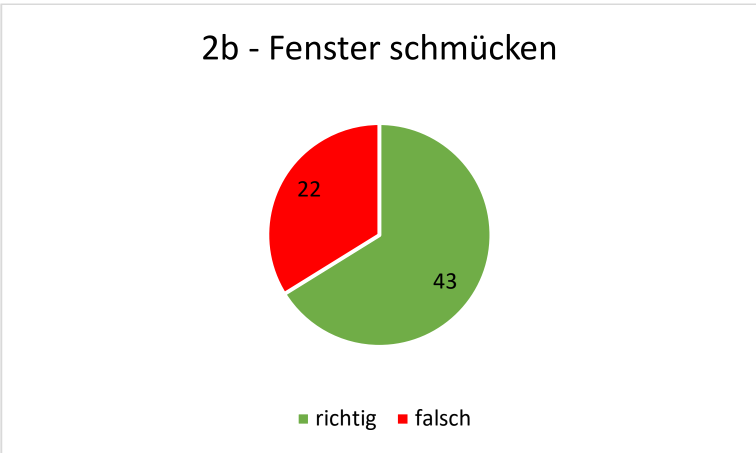


Abbildung 58: 2b - Fenster schmücken

Im Vergleich zur ersten Permutationsaufgabe, zum Beispiel 2a, konnte das Beispiel *Fenster schmücken* von rund 25% weniger Lernenden adäquat bearbeitet werden. In Relation zu allen anderen Testaufgaben konnte 2b jedoch solide gelöst werden. Das Beispiel wurde am dritthäufigsten richtig bearbeitet, wobei sie sich von Aufgabe 1a, die am zweithäufigsten richtig gelöst werden konnte, nur um ein Kind unterscheidet. Nach dieser Einordnung in die gesamten Testergebnisse erfolgt nun eine genauere Analyse in der qualitativen Auswertung.

7.5.2 Qualitative Auswertung

Die Eintragungen der Untersuchungsteilnehmer*innen im freien Lösungsfeld sowie die Aussagen der Schüler*innen im *lauten Denken* wurden codiert und werden nun in den einzelnen Kategorien ausgewertet.

7.5.2.1 Kategorie 1 – Lösungsstrategien

Nach der Einordnung in die Unterkategorien der auf den Testbögen ersichtlichen Lösungsstrategien zeigt sich, dass am häufigsten strukturiert vorgegangen wurde. Ungefähr die Hälfte aller Teilnehmenden nutzte eine systematische Strategie, um die Lösung zu ermitteln. „Es gibt immer zwei gelbe Sterne, zwei orangene Sterne und zwei rote Sterne. Also gibt es sechs Möglichkeiten, wie die Sterne nebeneinander aufgehängt werden können.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 23) Bei genauerer Betrachtung zeigt sich, dass zum Großteil eine Fixplatzstrategie verwendet wurde. Diese konnte 16-mal eindeutig erkannt werden. Testperson 18 sagte hierzu: „Da habe ich jeden Stern einmal vorne genommen und die anderen zwei hinten gewechselt und dann bin auch auf sechs gekommen.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 18) Die Abbildung anbei veranschaulicht eine zeichnerische Fixplatzstrategie:

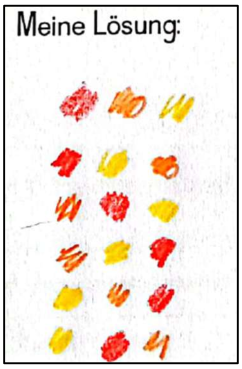


Abbildung 59: Fixplatzstrategie - Fenster schmücken (Testbogen 32)

Auch ein weiteres Kind beschreibt im Einzelgespräch genau, dass es eine Farbe fixiert hat und die anderen Farben rotieren ließ: „Zuerst habe ich den roten Stern genommen und orange und gelb dazugegeben und dann orange und gelb noch getauscht. Dann habe ich eine andere Farbe genommen und die zwei anderen Farben dazugegeben und wieder getauscht. Und das habe ich dann noch mal gemacht.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 32) Testperson 28 beschreibt ebenfalls diese Arbeitsweise und fügt dann noch hinzu: „Ich habe die Farben also immer ausgetauscht.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 28) Von einigen Untersuchungsteilnehmenden wurde dieses Vorgehen im *lauten Denken* in gekürzter Weise beschrieben: „Jeder Stern ist zweimal vorne. Deshalb sind es sechs Möglichkeiten.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 62) Hier wurde neben der Fixplatzstrategie auch ein Transfer erkannt. Nach einem zunächst systematischen Arbeiten konnte im Prozess erkannt werden, dass sich das Vorgehen wiederholt. Dies zeigt sich auch auf folgendem Testbogen:

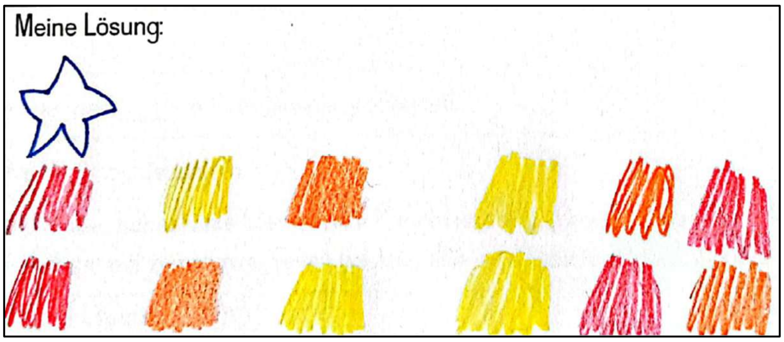


Abbildung 60: Fixplatz & Transfer - Fenster schmücken (Testbogen 29)

Die ersten vier Anordnungen wurden aufgezeichnet und die letzten zwei intuitiv gezählt, denn das Kind gibt korrekterweise an, dass es sechs verschiedene Möglichkeiten gibt. Hingegen stellt sich Testperson 31 nur zwei potenzielle Anordnungen dar und kann aus diesen bereits darauf schließen, dass es gesamt sechs Möglichkeiten geben muss.

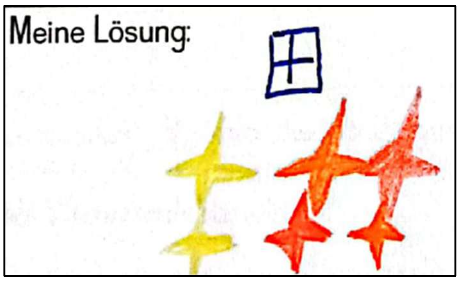


Abbildung 61: Transfer - Fenster schmücken (Testbogen 31)

Weiters wurde auch die systematische Strategie des Drehens angewandt: „Ich habe das dann die ganze Zeit so herumgetauscht.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 5) Auch ein weiteres Kind beschreibt einen Drehprozess: „Wenn man das so umdreht, dann kommt man auf sechs.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 39)

Hingegeben gaben auch viele Lernende, etwa 40% der Teilnehmer*innen, keine Strategie an und lösten die Aufgabe intuitiv. Werden all jene Testbögen genauer betrachtet, zeigt sich, dass hierbei etwas mehr als die Hälfte der Schüler*innen die Aufgabe auch im Kopf richtig lösen konnte. Einige dieser Kinder wurden auch zum *lauten Denken* eingeladen. Testperson 42 gab zwar am Testbogen keine Strategie an und ließ das Lösungsfeld leer, erklärte aber im Einzelgespräch sein systematisches Vorgehen folgendermaßen: „Gelb mit orange und rot, dann gelb mit rot und orange, dann orange mit gelb und rot und orange mit rot und gelb und noch rot, gelb, orange und rot, orange, gelb“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 42). Dies zeigt, dass jene Kinder eine hohe mathematische Kompetenz besitzen und die korrekte Lösung im Kopf ermitteln konnten. Ein Aufschreiben des Lösungsprozesses war nicht notwendig. Andere Teilnehmende wiederum gaben keine Strategie an und konnten ihre Lösung auch im *lauten Denken* nicht argumentieren: „Ich weiß nicht mehr, wie ich auf vier gekommen bin.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 60) Hierbei lässt sich nicht mehr nachvollziehen, welche Gedanken das Kind während dem Lösungsprozess hatte.

Nur wenige Testbögen konnten der Unterkategorie Rückgriff auf Vorwissen zugeordnet werden. Im lauten Denken führt ein Kind an, dass es einen Bezug zur vorherigen Aufgabe, zur Aufgabe 2a, erkannt hat: „Da habe ich mir das gleiche gedacht wie bei der Aufgabe 2a.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 1) Auch für Testperson 7 dürfte die Antwort selbstverständlich gewesen sein: „Einfach nur zählen“ (Notizen auf Testbogen 7). Ob hierbei wirklich ein Transfer oder ein Rückgriff auf sein Weltwissen vorliegt, oder ob das Kind die Möglichkeiten im Kopf abgezählt hat, kann nicht erkannt werden, da es nicht Teil des *lauten Denkens* war und somit keine retrospektive Sichtweise bekannt ist. Testperson 8 führte hingegen eine ausführliche verbale Erläuterung an und bietet somit Einblick in den rechnerischen Vorgang: „Es gibt zwei Möglichkeiten, wenn gelb als Erstes hängt. Dann gibt es zwei Möglichkeiten bei orange und zwei bei rot. Deswegen: 3 · 2 = 6“ (Notizen auf Testbogen 8) Einen ähnlichen Vorgang beschreibt auch Testperson 11 im Einzelgespräch: „Ich habe erstmal alle Farben genommen und dann die restlichen Farben dazugegeben und das mal zwei gerechnet. Also 3 · 2“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 11)

Weiters gibt es nur wenige Zuordnungen zur Unterkategorie Versuch und Irrtum. Interessant ist hierbei jene Strategie, welche Testperson 26 anwandte:

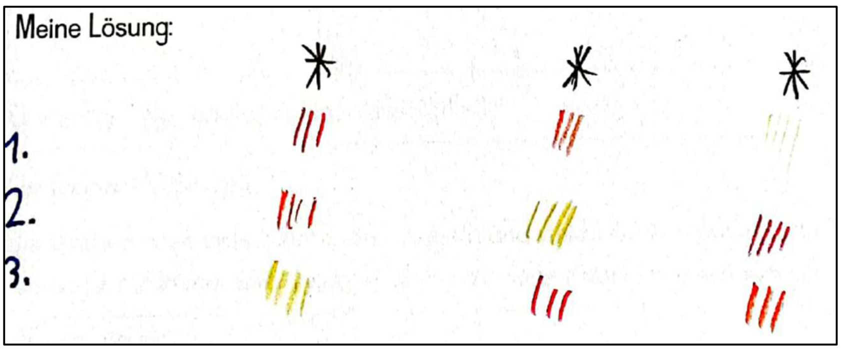


Abbildung 62: unklare Strategie - Fenster schmücken (Testbogen 26)

Das Kind versuchte, ein System zu entwickeln. Letztlich kann retrospektiv aber nicht mehr genau nachvollzogen werden, warum drei oder vier Striche pro Farbe notiert wurden.

7.5.2.2 Kategorie 2 – Darstellungsformen

Anbei werden die verschiedenen Darstellungsformen, welche die Teilnehmer*innen am Testbogen anführten, näher analysiert. Bei einer genaueren Betrachtung zeigt sich, dass die Aufgabe *Fenster schmücken* am öftesten anhand einer visuellen Darstellung gelöst wurde. Am häufigsten zeichneten die Proband*innen hierfür Sterne in den entsprechenden Farben: „Da habe ich mir das mit bunten Sternen aufgezeichnet.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 6) Eine solche grafische Darstellung zeigt beispielsweise folgende Abbildung:

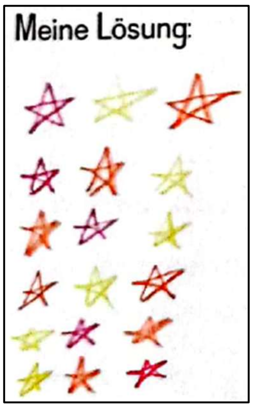


Abbildung 63: grafische Abbildung - Fenster schmücken (Testbogen 24)

Weiters erkannten auch etliche Teilnehmer*innen, dass es nicht notwendig ist, Sterne zu malen, sondern nur die Farben entscheidend sind, weshalb diese mit farblichen Strichen oder Klecksen arbeiteten. Eine solche grafische Darstellung beschreibt folgendes Kind: „Ich habe hier nur die Farben genommen und diese umgetauscht.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 28) Folgende Abbildung veranschaulicht eine Darstellung mit Klecksen:

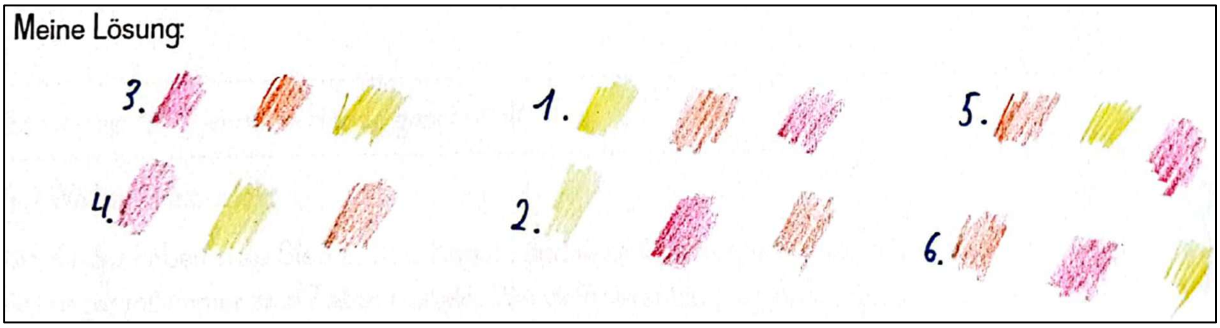


Abbildung 64: farbliche Abbildung - Fenster schmücken (Testbogen 22)

Im Einzelgespräch erläutert eine weitere Testperson ein kombiniertes visuelles Vorgehen: „Ich habe mir immer drei Sterne aufgezeichnet. Dann habe ich den Anfangsbuchstaben von jeder Farbe dazugeschrieben.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 55) Neben gezeichneten

Sternen wurden auch von etlichen Teilnehmern*innen Typografie in Form von Abkürzungen der Anfangsbuchstaben der Farben verwendet. Dies beschreibt beispielsweise auch folgendes Kind: „Gelb, orange und rot habe ich mir mit g, o und r abgekürzt und damit jede Möglichkeit aufgeschrieben.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 63)

Allgemein betrachtet lässt sich die vielfache Verwendung von visuellen Darstellungen darauf zurückführen, dass die vorgegebenen Farben der Sterne die Teilnehmer*innen dazu verleiten, auch mit diesen Farben zu arbeiten, sei es in Form von Sternen, Punkten, Strichen oder Typografien. Ebenfalls gaben viele Lernende keine Darstellungsform an. Wie bereits im Kapitel zuvor beschrieben, konnte aber etwa die Hälfte all jener Teilnehmer*innen, die das Lösungsfeld freiließen, die Aufgabe dennoch lösen. Eine konkrete Darstellung war für diese Schüler*innen nicht notwendig.

Weiters wurde die Aufgabe 2b nur von wenigen Teilnehmer*innen verbal erläutert. Diese beziehen sich nahezu alle auf die Auflistung der unterschiedlichen Möglichkeiten in Worten. Nur Testperson 8 beschrieb das Vorgehen genau und ging anschließend auf eine mathematische Schlussfolgerung ein: „Deswegen 3 · 2 = 6“ (Notizen auf Testbogen 8).

7.5.2.3 Kategorie 3 – Fehleranalyse

Anbei werden typische Fehlerquellen der Aufgabe Fenster schmücken näher betrachtet. In einigen Fällen ist erkennbar, dass die Teilnehmer*innen das Prinzip der Kombination gut verstanden haben, jedoch nicht bedachten, dass auch der zweite und der dritte Stern nochmal vertauscht werden können. Dieser Denkfehler unterlief auch folgender Testperson: „Da gibt es drei Möglichkeiten. Zuerst rot-gelb-orange, dann gelb-orange-rot und dann orange-rot-gelb“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 6).

Interessant ist auch jener Fehler von Testperson 65:

Abbildung 65: Fehlerquelle - Fenster schmücken (Testbogen 65)

Im *lauten Denken* beschrieb sie das Vorgehen so: „Ich habe rot mal auf rechts gegeben, dann auf links und dann in die Mitte. Das habe ich auch mit gelb und mit orange gemacht.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 65) Aus dieser Aussage wird ersichtlich, dass die aufgezeichneten Sterne zunächst nur ein Versuch des Kindes waren, welcher bei der Lösungsfindung nicht mehr berücksichtigt wurde. Wesentlich ist aber, dass das Kind nicht erkannte, dass bei seinem Vorgehen doppelte Nennungen vorhanden sind, welche auch doppelt gezählt wurden. Dieser Fehler passierte auch Testperson 21: „Ich habe herausgefunden, dass jeder Stern auf jedem Platz einmal sein kann. Jeder Stern hat also drei Plätze, deswegen habe ich 3 + 3 + 3 gerechnet.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 21)

Zu viele Möglichkeiten ermittelte auch folgendes Kind:

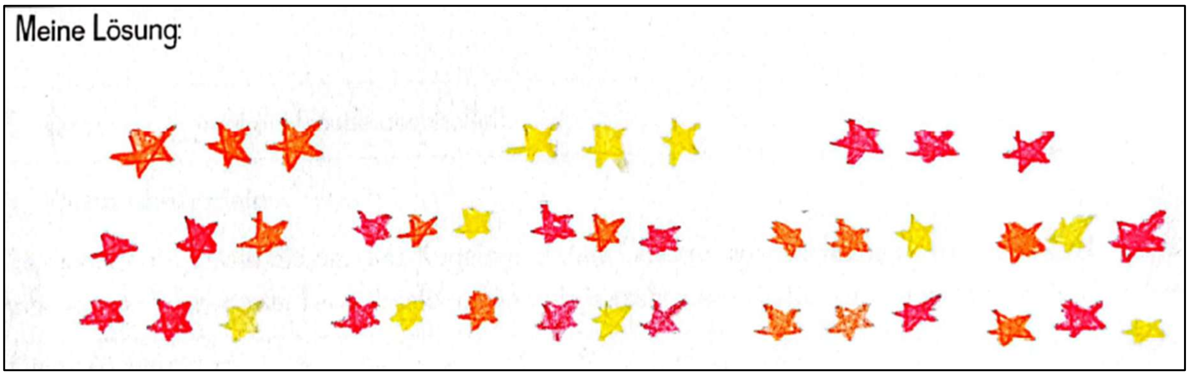


Abbildung 66: Fehlerquelle 2 - Fenster schmücken (Testbogen 19)

Jene Testperson dürfte überlesen haben, dass jede Sternfarbe nur einmal zur Verfügung steht und somit beispielsweise die Anordnung gelb-gelb-gelb nicht möglich ist. Ansonsten hatte das Kind aber ein gutes systematisches Vorgehen aufgezeigt.

Hingegen wurden auch zwei Kinder zum *lauten Denken* eingeladen, die in der retrospektiven Phase ihr Vorgehen nicht mehr erklären konnten: „Ich weiß nicht mehr, wie ich auf vier gekommen bin.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 60) „Ich wusste nicht genau, wie das geht. Ich wusste nicht, wie ich das malen soll.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 13) Auch Testperson 44 konnte im *lauten Denken* zwar sein Vorgehen nochmal beschreiben, auf Nachfrage der Forschungsleiterin aber nicht mehr begründen, wie es zu seinen Entschlüssen gekommen ist: „Ich habe drei Sterne genommen und habe mir Dreiecke gebildet. Dann sind das schon mal fünf Möglichkeiten und dann habe ich das noch so schräg und so schräg gezählt – das sind sieben Möglichkeiten. Dann habe ich da unten noch zwei genommen und irgendwie bin ich auf zehn gekommen.“ (handschriftliche Notizen zu Testperson 44) Dieses Kind führte am Testbogen keine Lösungsstrategie oder Darstellungsform an.

7.6 Aufgabe 3a

Die Aufgabe 3a, auch als *Schlittenrennen* bezeichnet, kann der kombinatorischen Figur der Kombination zugeordnet werden. Aufgrund einer geringeren Anzahl an Möglichkeiten wurde dieses Beispiel als leichter deklariert. Anbei erfolgt sowohl eine quantitative als auch eine qualitative Analyse der Testaufgabe.

7.6.1 Quantitative Auswertung

Die richtige Lösung konnten 28 Schüler*innen, rund 45% der Teilnehmenden, ermitteln. 37 Kinder hatten hingegen Schwierigkeiten und gaben eine falsche Anzahl an Möglichkeiten an. Dieses Verhältnis zeigt die Grafik anbei:

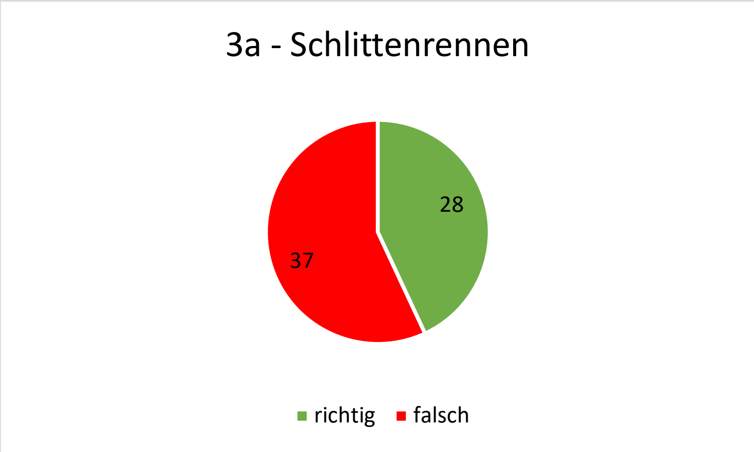


Abbildung 67: 3a - Schlittenrennen

Wird die Lösungsquote der Aufgabe *Schlittenrennen* in die gesamte Testung eingeordnet, zeigt sich, dass diese am vierthäufigsten richtig bearbeitet wurde. Somit lässt sich dieses Beispiel im mittleren Bereich der Untersuchung einordnen. Eine genauere Analyse hinsichtlich der verwendeten Lösungsstrategien, der Darstellungsformen sowie der unterlaufenen Fehler erfolgt anbei in der qualitativen Auswertung.

7.6.2 Qualitative Auswertung

Nach einer systematischen Analyse der freien Lösungsfelder sowie der Wortmeldungen aus den Einzelgesprächen wurden die Angaben der Teilnehmer*innen kategorisiert. Neben einer Zuordnung in die drei übergeordneten Kategorien erfolgte auch eine Einordnung in die entsprechenden Unterkategorien, auf welche im Anschluss näher eingegangen wird.

7.6.2.1 Kategorie 1 – Lösungsstrategien

Bei einer detaillierten Analyse der Lösungsstrategien zeigt sich, dass etwa die Hälfte der Untersuchungsteilnehmer*innen keine Strategie angaben und das Lösungsfeld nicht ausfüllten. Bei genauerer Betrachtung ist ersichtlich, dass von diesen Kindern 70% die Aufgabe falsch lösten. Nur 30% gelang es, durch einen intuitiven Lösungsweg auch die richtige Anzahl an Möglichkeiten zu ermitteln. Von all jenen Teilnehmer*innen, welche das Lösungsfeld freiließen und auch zum *lauten Denken* eingeladen wurden, konnte nur ein Kind die Aufgabe richtig lösen: „Julian fährt gegen die Sophie, die Laura und die Melanie. Die Sophie fährt gegen die Laura und die Melanie und die Laura gegen die Melanie.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 65) Dieses Kind beschreibt ein systematisches Vorgehen, welches es nur nicht am Bogen angab, sondern im Kopf löste. Alle weiteren neun Schüler*innen mit einem freien Lösungsfeld und einem Einzelgespräch gaben eine inkorrekte Lösung an. Auf die Fehlerquellen dieser Untersuchungsteilnehmenden wird in der Unterkategorie Fehleranalyse genauer eingegangen. Es zeigt sich jedoch, dass viele Schüler*innen, die bei der Aufgabe Schlittenrennen einem intuitiven Lösungsweg zugeordnet werden konnten, das Beispiel nicht richtig verstanden haben.

Hingegen verwendete etwa ein Drittel der Gesamtteilnehmenden offensichtlich eine systematische Strategie. Bei einer genaueren Analyse kann festgestellt werden, dass hiervon etwa zwei Drittel die richtige Lösung angeben konnten. Einige dieser Schüler*innen wurden auch zum *lauten Denken* eingeladen und konnten hier ihr Vorgehen genau erläutern: „Da habe ich den Julian mit der Sophie, mit der Laura und mit der Melanie genommen. Dann fährt noch die Sophie mit der Laura und mit der Melanie. Weil die Sophie ja mit dem Julian schon gefahren ist, können sie nicht mehr fahren. Dann fehlen noch die Laura und die Melanie.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 32) Es ist erkennbar, dass jene Untersuchungsperson eine Fixplatzstrategie anwandte und immer die erste Person fixierte. In einem weiteren Schritt wurde auch erkannt, dass Doppelnennungen gestrichen werden müssen, weil ein Schlittenrennen zwischen Julian und Sophie das gleiche ist wie eines zwischen Sophie und Julian. Dieses Vorgehen wurde auch von weiteren Kindern erläutert. Untersuchungsperson 28 gab diese Streichung ganz konkret an: „Am Anfang hätte ich geglaubt, dass die Sophie auch mit dem Julian fahren muss, aber dann ist mir eingefallen, dass Julian und Sophie und Sophie und Julian ja das gleiche Rennen sind.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 28) Auch Testperson 1 beschreibt im *lauten Denken* sein Vorgehen folgendermaßen: „J, S, L, M; M, J, S, L und so weiter. Dann habe ich gewusst, dass J dreimal vorkommen muss, weil es vier Kinder sind. Wenn ich zum Beispiel den Julian wegnehme, bleiben noch drei übrig und dann weiß ich: J, J, J, S, S, S, L, L, L, M, M, M. Ich habe genau gewusst, dass jedes Kind einmal nicht fährt.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 1) Von den allgemeinen Erklärungen der Kinder, welche das Beispiel systematisch richtig ermitteln konnten, weicht eine Aussage ab: „Da habe ich zuerst einmal die Kinder nebeneinander gegeneinander fahren lassen und dann die anderen Kinder.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 21) Diese Untersuchungsperson ist die einzige, welche nachweislich mit der systematischen Strategie des Drehens gearbeitet hat.

Werden auch die restlichen Lösungsstrategien analysiert, zeigt sich, dass insgesamt vier Teilnehmer*innen der Unterkategorie Rückgriff auf Vorwissen zugeordnet werden konnten. Alle vier Schüler*innen gaben eine Rechnung an. Testperson 11 beschreibt diese im Einzelgespräch folgendermaßen: „Ich habe zuerst die Melanie mit den anderen drei Kindern zusammengegeben. Dann habe ich das 3 · 4 gerechnet.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 11) Dieses Kind versuchte eine mathematische Lösung zu finden, konnte aber auf genauere Nachfrage der Forschungsleiterin den eigenen Gedankengang nicht mehr genau beschreiben: „Es war für mich halt logisch.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 11) Auch weitere Teilnehmer*innen gaben inkorrekte rechnerische Lösungswege an. Folgender Rechenweg ist jedoch korrekt: „3 + 2 + 1 = 6“ (Notizen auf Testbogen 10). Dieses Kind ermittelte korrekterweise, dass es zunächst drei Möglichkeiten gibt, beispielweise dass Julian gegen drei Kinder fährt. Auf der nächsten Stufe bleiben nur noch zwei weitere Paarungen übrig, da die anderen bereits gegeneinander gefahren sind und auf der letzten Stufe gibt es nur eine mögliche Anordnung. Die Testperson zeigte durch diesen Rechenweg eine sehr hohe mathematische Kompetenz sowie ein tiefes Verständnis für die Aufgabe. Ähnliche Erkenntnisse konnte auch Testperson 8 gewinnen. Zuerst führte diese am Testbogen verbal an: „Julian kann gegen alle fahren. Dann kann Sophie nur noch gegen alle außer Julian fahren und Laura muss noch gegen Melanie fahren.“ (Notizen auf Testbogen 8) Diese verbale Erläuterung ergänzt das Kind noch durch folgende Rechnung: „3 + 2 + 1 = 6“ (Notizen auf Testbogen 8). Das Kind ging somit wie Testperson 10 vor.

Auch der Unterkategorie Versuch und Irrtum wurden Testbögen zugeordnet: „Ich habe mir das mit Strichen aufgezeichnet. Eins und drei, dann eins und zwei und dann nochmals eins und zwei und eins und zwei.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 62) Diese teilnehmende Person versuchte ein System für das Lösen der Aufgabe zu finden, konnte aber im Einzelgespräch nicht mehr genau erläutern, wie sie vorgegangen ist. Testperson 45 hingegen führt an: „Es muss einfach 4 Rennen geben.“ (Notizen auf Testbogen 45) Auf Fehlerquellen und Irrtümer wird in der Kategorie 3 noch genauer eingegangen.

7.6.2.2 Kategorie 2 – Darstellungsformen

Bei der Betrachtung der Kategorisierung der Darstellungsformen ist ersichtlich, dass wieder ungefähr die Hälfte der Teilnehmer*innen keine konkrete Darstellung angegeben hat. Wie bereits bei der Analyse der Lösungsstrategien beschrieben, zeigt sich beim Testbeispiel *Schlittenrennen* jedoch, dass viele Lernende, welche keine Strategie beziehungsweise keine Darstellung aufzeigten, die Aufgabe nicht korrekt lösen konnten.

Werden die vorhandenen Darstellungsformen genauer betrachtet, kann festgestellt werden, dass hier etwa 43% der Schüler*innen eine verbale Darstellung verwendeten. Etliche Teilnehmende führten in Worten die verschiedenen Möglichkeiten an: „Julian Sophie, Julian Laura, Julian Melanie, Laura Melanie, Sophie Laura, Sophie Melanie" (Notizen auf Testbogen 12). Die Abbildung anbei veranschaulicht eine verbale Darstellung:

Abbildung 68: verbale Darstellung - Schlittenrennen (Testbogen 23)

Auch wenn diese Abbildung aufgrund der ausgeschriebenen Namen als verbale Darstellung kategorisiert wurde, lässt sich auch ein visueller Aspekt erkennen. Die Testperson zählte zuerst in einer Spalte auf, wer gegen den Julian fahren kann. Die weiteren Möglichkeiten konnten ebenfalls in Spalten abgebildet und visuell ansprechend dargestellt werden. Eine solche Vorgangsweise lässt sich bei einigen Teilnehmer*innen mit einer verbalen Darstellung erkennen. Hingegen führt eine weitere Testperson verbal am Testbogen an: „Da kann ich keine gute Erklärung geben." (Notizen auf Testbogen 7) Obwohl dieses Kind die richtige Lösung ermitteln konnte, war es ihm nicht möglich, diese abzubilden beziehungsweise zu beschreiben. Auch eine weitere teilnehmende Person gibt keinen Einblick in den inkorrekten Gedankengang. In Worten wird nur angeführt: „Es muss acht Mal gefahren werden." (Notizen auf Testbogen 20)

Weiters wurde ebenfalls von rund einem Drittel der Kinder, die eine Darstellung angaben, eine mathematische Form gewählt. Einige dieser Proband*innen stellten die Anzahl an Möglichkeiten anhand von Ziffern dar. Hierfür wurde jedem Kind eine Ziffer zugeordnet:

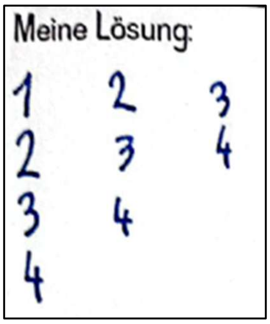


Abbildung 69: Zifferndarstellung - Schlittenrennen (Testbogen 26)

Weiters wurden auch Abbildungen anhand von Netzdarstellungen verwendet:

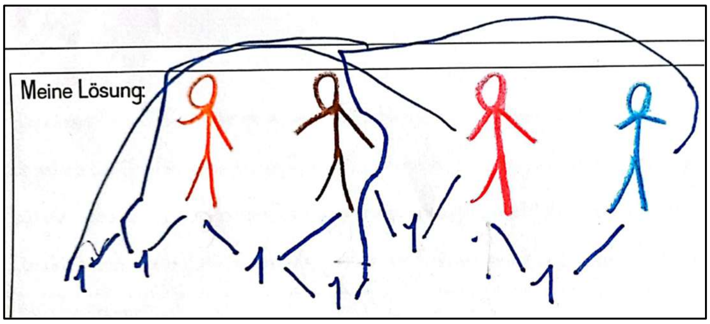


Abbildung 70: Netzdarstellung - Schlittenrennen (Testbogen 21)

Testperson 21 beschreibt im *lauten Denken* sein Vorgehen folgendermaßen: „Da habe ich zuerst einmal die Kinder nebeneinander gegeneinander fahren lassen und dann die anderen Kinder." (handschriftliche Notizen zu Testbogen 21) Ähnlich sieht auch die Darstellungsform von Testperson 63 aus, welche im Einzelgespräch erläutert: „Ich habe mir hier Striche gemacht. Die Kinder, die gegeneinander fahren, habe ich mit Strichen verbunden." (handschriftliche Notizen zu Testbogen 63) Auch ein weiteres Kind gibt an, dass es mit Strichen gearbeitet hat: „Ich habe mir hier Striche gemacht." (handschriftliche Notizen zu Testbogen 62) Zusätzlich gaben auch Schüler*innen rechnerische Darstellungen an. Diese wurden bereits bei den Lösungsstrategien genauer erläutert, weshalb in diesem Unterkapitel nicht genauer darauf eingegangen wird.

Am seltensten halfen visuelle Abbildungen zur Lösungsfindung. Eine Testperson gibt folgende anschauliche Unterstützung an: „Da habe ich mir die Namen der Kinder mit einem Textmarker markiert." (handschriftliche Notizen zu Testbogen 6) Auch zeichnerische Darstellungen wurden angewandt, wie bei Testperson 2:

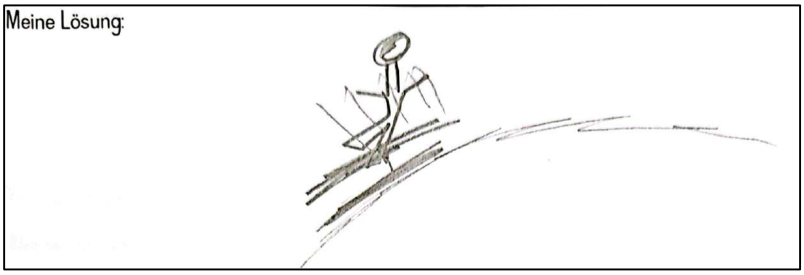


Abbildung 71: zeichnerische Darstellung - Schlittenrennen (Testbogen 2)

Diese half dem Kind jedoch nicht bei der Lösungsfindung. Sie veranschaulicht keine Möglichkeiten, sondern zeigt nur ein Abbild von einer Person auf einem Schlitten. Es wird ersichtlich, dass die Aufgabe nicht erfasst wurde. Es fahren nämlich immer zwei Kinder gegeneinander. Auf die Findung von Möglichkeiten wurde nicht eingegangen. Weiters verwendeten auch einige Schüler*innen typografische Abkürzungen der Anfangsbuchstaben, um alle Paarungen für das Rennen abzubilden:

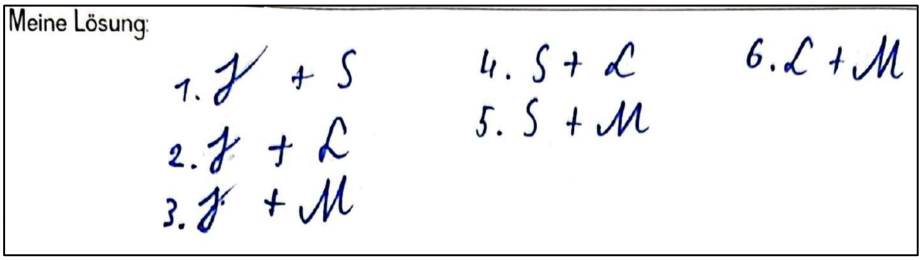


Abbildung 72: typografische Darstellung - Schlittenrennen (Testbogen 22)

Besonders interessant ist auch jene Abbildungsform, welche Testperson 36 wählte:

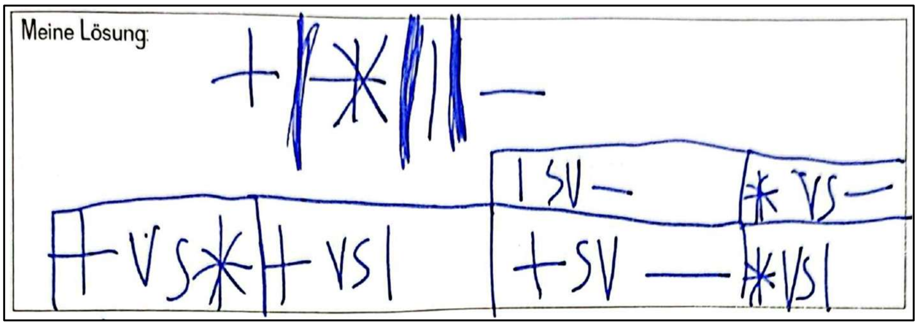


Abbildung 73: symbolische Darstellung - Schlittenrennen (Testbogen 36)

Diese Person überlegte sich vier unterschiedliche Symbole – für jedes Kind eines. Anhand dieser zeichnete es alle sechs möglichen Kombinationen für das Schlittenrennen auf. Das Kind erkannte, dass die Namen der Schüler*innen für das Ermitteln der Lösung irrelevant sind. Es entwickelte eine Darstellung anhand von Symbolen. Des Weiteren wurde auch folgende Erläuterung einer visuellen Darstellung zugeordnet: „Da habe ich jedem Kind eine Farbe gegeben." (handschriftliche Notizen zu Testbogen 18) Dieses Vorgehen zeigt die Abbildung anbei:

Abbildung 74: farbliche Darstellung - Schlittenrennen (Testbogen 18)

Jenes Kind hat seine Darstellung nicht in das freie Lösungsfeld eingetragen, sondern gleich bei der Angabe verschriftlicht. Auf den Fehler, welcher unterlaufen ist, wird in der Beschreibung der Kategorie Fehleranalyse noch weiter eingegangen.

7.6.2.3 Kategorie 3 – Fehleranalyse

Bei genauerer Betrachtung zeigt sich eine typische Fehlerquelle. Diese ist bei Testperson 18 in der Beschreibung der Darstellungsformen gut ersichtlich. Es wurde nicht erkannt, dass Doppelnennungen gestrichen werden müssen. Testperson 18 beschreibt sein Vorgehen folgendermaßen: „Ich habe jedem Kind jede Farbe einmal gegeben." (handschriftliche Notizen zu Testbogen 18) Diese Fehlerquelle gibt auch ein weiteres Kind im Einzelgespräch an: „Ich habe immer den Julian gegen alle drei anderen Kinder gezählt, dann die Sophie gegen die anderen drei, die Laura gegen die anderen drei und die Melanie gegen die anderen drei. So bin ich auf zwölf gekommen." (handschriftliche Notizen zu Testperson 4) Bei genauerer Betrachtung und Analyse der Testbögen lässt sich dieser Fehler häufig erkennen.

Im *lauten Denken* gaben auch zwei Teilnehmer*innen an, dass sie nicht wussten, wie sie vorgehen sollen: „Da habe ich eigentlich gar nichts verstanden." (handschriftliche Notizen zu Testbogen 16) „Ich wusste einfach nicht, wie ich rechnen soll. Also habe ich es nicht gemacht." (handschriftliche Notizen zu Testbogen 5)

Weiters lässt sich auch analysieren, dass Schüler*innen das Prinzip der Findung von verschiedenen Möglichkeiten der Paarungen nicht aus der Angabe herauslesen konnten. „Es sind vier Kinder, deshalb sind es vier Rennen." (handschriftliche Notizen zu Testbogen 42) Als weitere Fehlerquelle lässt sich auch erkennen, dass angenommen wurde, dass nur Julian gegen andere Kinder fahren kann. Die Möglichkeit, dass auch die anderen drei Mädchen Rennen gegeneinander bestreiten können, wurde nicht bedacht: „Julian kann gegen Sophie, gegen Melanie und gegen Laura fahren. Deswegen sind es drei." (handschriftliche Notizen zu Testbogen 60)

Wieder anderen Teilnehmer*innen war nicht bewusst, dass die Kinder auch mehrmals fahren können: „Es gibt vier Kinder und zwei Schlitten, deshalb sind es zwei Rennen." (handschriftliche Notizen zu Testbogen 39) Für dieses Kind war klar, dass es zwei Möglichkeiten geben muss, wenn sich vier Kinder auf zwei Schlitten aufteilen.

7.7 Aufgabe 3b

Die Aufgabe *Hände schütteln* gehört ebenfalls der Figur der Kombination an. Bei der vorliegenden Testung wurde diese aufgrund einer höheren Anzahl an Möglichkeiten als schwierigeres Beispiel deklariert. Dieses wird nun anbei quantitativ und qualitativ ausgewertet.

7.7.1 Quantitative Auswertung

Von den 65 Untersuchungsteilnehmer*innen konnten 18 Schüler*innen die Aufgabe 3b richtig lösen, während 47 Personen eine inkorrekte Anzahl an Möglichkeiten angaben. Prozentual betrachtet bedeutet dies, dass etwa 30% der Teilnehmer*innen eine adäquate Lösung finden konnten, während rund 70% der Lernenden das Testbeispiel nicht richtig bearbeiteten. Dieses Verhältnis veranschaulicht das Kreisdiagramm anbei.

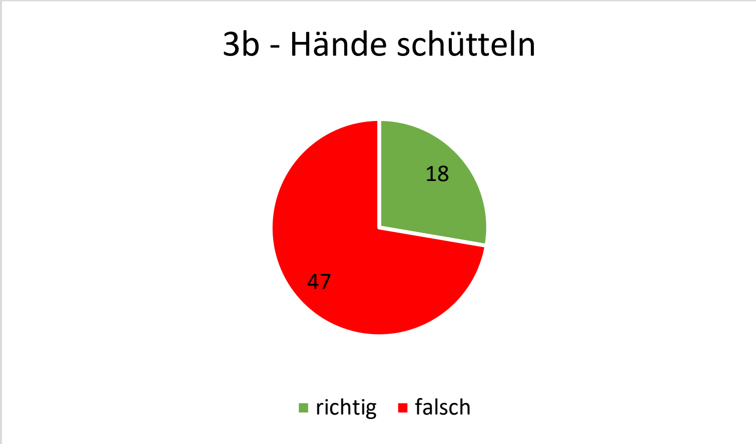


Abbildung 75: 3b - Hände schütteln

Bei einem Vergleich der Lösungsrate der Aufgabe 3b mit den anderen Testaufgaben zeigt sich, dass das Beispiel *Hände schütteln* zu den anspruchsvolleren Aufgaben zählt. Es konnte am sechsthäufigsten richtig bearbeitet werden. Auch wenn die Lösungsermittlung für viele Teilnehmer*innen eine Herausforderung war, konnten 18 Kinder eine richtige Lösung angeben. Dies deutet darauf hin, dass die Testaufgabe zwar knifflig, aber nicht unlösbar war. Eine genauere Analyse des Beispiels erfolgt anbei.

7.7.2 Qualitative Auswertung

Im folgenden Unterkapitel werden die Antworten der Schüler*innen am Testbogen und die verbalen Daten aus dem *lauten Denken* in die gebildeten Kategorien sowie Unterkategorien eingeordnet und ausgewertet.

7.7.2.1 Kategorie 1 – Lösungsstrategien

Bei einer detaillierten Betrachtung der Lösungsstrategien, welche die Untersuchungsteilnehmer*innen bei der Aufgabe *Hände schütteln* angaben, lässt sich feststellen, dass etwa die Hälfte der Schüler*innen keine Lösungsstrategie anführten und das Lösungsfeld am Testbogen freiließen. Lediglich vier Untersuchungsteilnehmer*innen, welche der Unterkategorie der intuitiven Strategie zugeordnet wurden, konnten die korrekte Antwort ermitteln. Prozentual betrachtet sind dies nur rund 10% der Lernenden, was darauf hinweist, dass dieses Beispiel im Kopf nur schwer zu lösen ist. Von all jenen Lernenden, welche keine Strategie angaben, wurden insgesamt neun Teilnehmer*innen zum *lauten Denken* eingeladen, wobei nur ein Kind einen adäquaten Weg für die richtige Lösungsermittlung beschreiben konnte: „Da habe ich nichts aufgeschrieben, aber da habe ich nachgerechnet und komme auf zehn Möglichkeiten.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 16) Alle anderen Teilnehmer*innen der Einzelgespräche beschrieben ihren intuitiven Lösungsweg inkorrekt, wie etwa folgende Person: „Anton mit Bernhard, Anton mit Clara, Anton mit David und Anton mit Elisa. Dann Bernhard mit Anton, Clara, David und Elisa. Und immer so weiter.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 42) Auch wenn bei dieser Lösungsbeschreibung ein Denkfehler unterlaufen ist, lässt sich dennoch ein systematisches Vorgehen erkennen, wie auch bei weiteren Schüler*innen: „Anton gibt dem Bernhard die Hand, der Clara, der David und der Elisa. Also werden viermal die Hände geschüttelt.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 60) Insgesamt können bei sechs Kindern, welche Teil des *lauten Denkens* waren und keine Strategie auf ihrem Testbogen anführten, systematische Ansätze in der Lösungsbeschreibung erkannt werden. Dies deutet darauf hin, dass viele Schüler*innen sich nur gedanklich mit der Lösungsermittlung beschäftigten, diese jedoch nicht verschriftlichten. Es zeigt sich aber auch, dass viele Fehler unterlaufen sind, welche in der Kategorie drei noch genauer beschrieben werden.

Etwa ein Drittel der Teilnehmenden gaben eine systematische Strategie an, wobei sich hierbei zeigt, dass rund 60% jener Schüler*innen auch eine richtige Lösung ermitteln konnten. Verglichen mit all jenen Teilnehmer*innen, welche keine Strategie anführten, kann der Schluss gefasst werden, dass die Lernenden durch ein systematisches, verschriftlichtes Vorgehen eine deutlich höhere Lösungsrate erzielen konnten. Bei genauerer Betrachtung des Vorgehens all jener Lernender, welche systematisch arbeiteten, lässt sich feststellen, dass für eine richtige Bearbeitung der Aufgabe das mathematische Denkvermögen besonders angeregt werden musste und eine rein oberflächliche Herangehensweise nicht ausreichend war. Testperson 32 beschreibt ihr Vorgehen im Einzelgespräch sehr ausführlich: „Also Anton und Bernhard, Anton und Clara, Anton und David und Anton und Elisa; dann Bernhard und Clara, Bernhard und David, Bernhard und Elisa, denn der Bernhard hat ja schon mit Anton geschüttelt. […] noch David und Elisa.“ Diese verbale, genaue Beschreibung verdeutlicht, dass ein sorgfältiges Nachdenken notwendig war, um die Zusammenhänge genau verstehen zu können. Werden die systematischen Vorgehensweisen betrachtet, gingen nahezu alle Teilnehmer*innen nach dem gleichen Prinzip wie Testperson 32 vor. Dies lässt sich sowohl anhand der Einzelgespräche als auch bei der Analyse der freien Lösungsfelder feststellen. Testperson 1 findet eine passende Beschreibung für ein systematisches Vorgehen: „Ich habe mir gedacht, ich mache immer das Gleiche, weil da geht es am einfachsten.“ (handschriftliche Notizen zu Testperson 1) Beim *lauten Denken* war auffällig, dass auch etliche Schüler*innen einen Bezug zur Aufgabe 3a herstellen konnten: „Eigentlich habe ich hier wie oben gerechnet.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 10) „Das habe ich genauso gemacht, wie die vorige Aufgabe.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 41) „Da habe ich dasselbe gemacht wie bei Aufgabe 3a.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 63) „Da geht es genauso. Es ist nur ein Kind mehr.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 55) Es wurde erkannt, dass die zwei Aufgaben dem gleichen Prinzip zugeordnet werden können und lediglich die Anzahlen sowie der Kontext verändert wurden.

Zusätzlich konnten etwa 10% der Lösungsstrategien der Unterkategorie Versuch und Irrtum zugeordnet werden. Bei diesen Untersuchungsteilnehmer*innen war eine Strategie ersichtlich, welche jedoch nicht systematisch war und nicht zur richtigen Lösung führte. Besonders interessant ist hierbei die Ansicht von folgendem Kind: „Es gibt nur eine Möglichkeit, weil alle auf einmal die Hände schütteln.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 39) Jene Untersuchungsperson hat überlesen, dass sich immer zwei Kinder die Hände schütteln und ging davon aus, dass sich die Aufgabe auf einfache Art und Weise lösen lässt. Ein weiters Kind gab eine gute Strategie an, welche jedoch nicht zur korrekten Lösung führt: „Da habe ich mir einfach gedacht, ich gebe den Kindern in meiner Sitzreihe die Hand und habe dabei mitgezählt, also bei den Kindern, die neben mir sitzen.“ (handschriftliche Notizen zu Testperson 11) Dieses Kind versuchte, das Beispiel in eine reale Situation zu transferieren und stellte sich vor, wie oft es selbst die Hände schütteln würde. Hierbei unterlief jedoch der Fehler, dass sich auch die anderen Kinder die Hände geben können. Eine genauere Analyse der Fehlerquellen erfolgt im Unterkapitel der Fehleranalyse.

Weiters konnten zwei Testbögen der Unterkategorie Rückgriff auf Vorwissen zugeschrieben werden. Eine Untersuchungsperson gibt verbal am Testbogen an: „Ich weiß, dass es 10 Möglichkeiten sind.“ (Notizen zu Testperson 20) Aufgrund dessen, dass mit diesem Kind kein Einzelgespräch geführt wurde, muss davon ausgegangen werden, dass das Kind die Antwort aus einem Vorwissen weiß. Testperson 17 gab am Testbogen folgende Rechnung „$5 \cdot 2 = 10$“ (Notizen auf Testbogen 17) an. Auch dieses Kind war leider kein Teil des *lauten Denkens*, weshalb keine genauere Einsicht in die Gedanken vorhanden ist. Es lässt sich deshalb nicht darauf schließen, ob wirklich auf Vorwissen zurückgegriffen wurde, oder ob die Lösung durch Zufall korrekt rechnerisch ermittelt werden konnte.

7.7.2.2 Kategorie 2 – Darstellungsformen

Nach einer Analyse der Darstellungsformen zeigt sich, dass auch hier erneut die Hälfte der Untersuchungsteilnehmer*innen keine Darstellung angab. Wesentlich ist, dass von den 18 Teilnehmer*innen, die die richtige Anzahl an Möglichkeiten ermitteln konnten, nur vier Kinder keine Darstellungsform angaben – ähnlich wie bei den Lösungsstrategien. Dies lässt sich darauf schließen, dass eine Darstellung den Lernenden beim Ermitteln der korrekten Anzahl an

Möglichkeiten sehr hilfreich ist. Von all jenen Proband*innen, deren Testbögen der Unterkategorie *keine Darstellung* zugeordnet wurden, waren zwar einige Teil der Einzelgespräche, gaben hierbei aber keine Hinweise beziehungsweise Erläuterungen auf eine Form der Darstellung an. Sie konzentrierten sich mehr auf die Lösungsstrategie.

Hingegen verwendeten gleich viele Schüler*innen, je etwa 20%, eine verbale sowie eine visuelle Darstellung. Bei einer Betrachtung der verbalen Abbildungsformen lässt sich feststellen, dass die meisten Schüler*innen die Namen der Kinder, welche sich die Hände geben, aufzählten. „Da habe ich immer die Namen aufgeschrieben, wer wem die Hand schüttelt.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 6) Bei all jenen Teilnehmenden, welche die Kinder namentlich aufzählten, ließen sich zwei Varianten erkennen. Einige führten zunächst einen Namen an und dann alle Kinder, die mit diesem die Hand schütteln, wie etwa folgende Testperson:

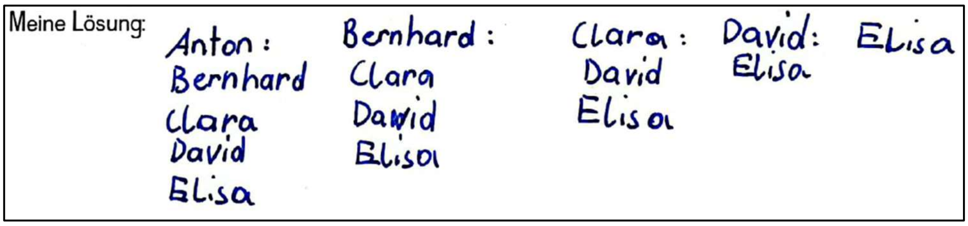

Meine Lösung:
Anton: Bernhard Clara David Elisa
Bernhard: Clara Dawid Elisa
Clara: David Elisa
David: Elisa
Elisa

Abbildung 76: namentliche Darstellung - Hände schütteln (Testbogen 23)

Hingegen schrieben weitere Lernende immer die Paarungen auf. Sie verschriftlichten immer beide Kinder, die sich die Hand geben können. Dies zeigt als Beispiel folgende Abbildung:

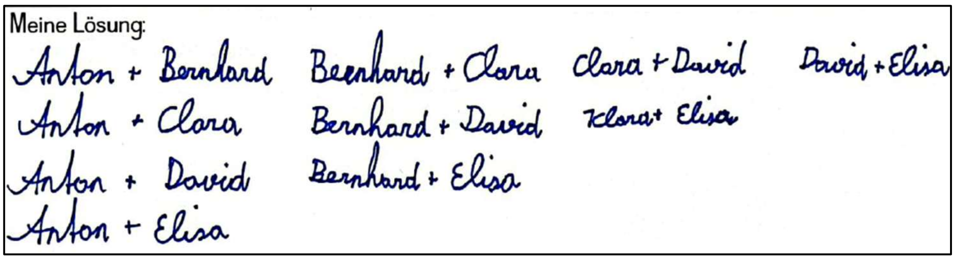

Meine Lösung:
Anton + Bernhard, Anton + Clara, Anton + David, Anton + Elisa
Bernhard + Clara, Bernhard + David, Bernhard + Elisa
Clara + David, Klara + Elisa
David + Elisa

Abbildung 77: namentliche Abbildung 2 - Hände schütteln (Testbogen 32)

Folgender Testbogen zeigt, dass jene Person zunächst damit begonnen hatte, die Namen aller Kinder aufzuzählen, anschließend aber auch zu einer typografischen Darstellung wechselte:

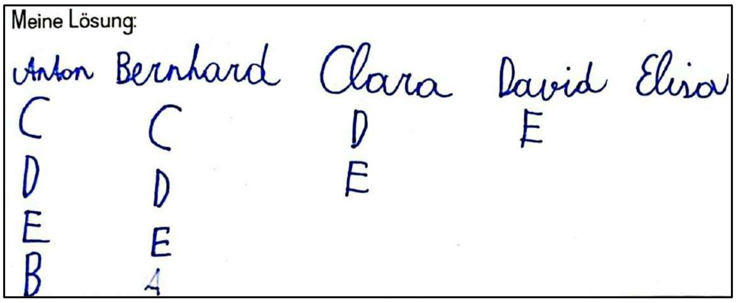

Meine Lösung:
Anton: C D E B
Bernhard: C D E A
Clara: D E
David: E
Elisa

Abbildung 78: gemischte Darstellung - Hände schütteln (Testbogen 24)

Die Vorgangsweise einer typografischen Darstellung wählten einige Schüler*innen. Sie fanden eine verkürzte Form der verbalen Auflistung aller Namen: „Das habe ich mir mit den Anfangsbuchstaben abgekürzt.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 65) Bei einer weiteren Analyse der visuellen Darstellungsformen wurden auch Zeichnungen zugordnet. Hierbei lässt sich jedoch verordnen, dass alle Zeichnungen nicht zur Lösungsfindung beitrugen, wie etwa folgende Abbildung:

Abbildung 79: bildliche Darstellung - Hände schütteln (Testbogen 2)

Das Kind veranschaulichte, dass es herauslesen konnte, dass sich die Hände gegeben werden, und bildet dies ab. Für den weiteren Vorgang konnte die Zeichnung jedoch nicht herangezogen werden. Im *lauten Denken* erwähnte auch ein Testkind mit einer ähnlichen Abbildung: „Das habe ich mir hier aufgezeichnet.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 62) Jedoch wurden auch weitere visuelle Darstellungen angegeben:

Abbildung 80: Strichdarstellung - Hände schütteln (Testbogen 62)

Folgende Darstellungsform kann als Strichdarstellung beschrieben werden. Die Testperson veranschaulichte sich zunächst die Kinder anhand von Strichen. Nach einem Doppelpunkt wird aufgezählt, welches Kind wie oft anderen die Hände geben kann. Dabei wird eine systematische Abstufung gut erkannt. Für eine solche Darstellungsform braucht es bereits ein tiefes Verständnis der Aufgabe sowie einen guten Einblick in die Kombinatorik, um Doppelnennungen im Kopf wegzustreichen. Weiters wurden auch symbolische Darstellungen verwendet:

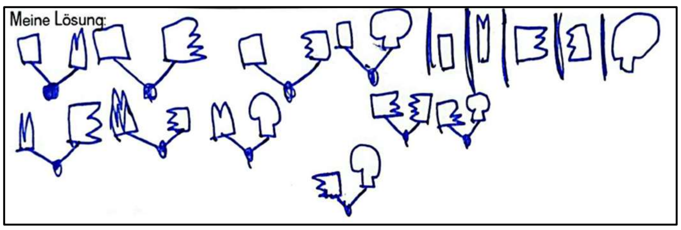


Abbildung 81: symbolische Darstellung - Hände schütteln (Testbogen 36)

Jene Testperson wählte fünf unterschiedliche Symbole, welche auf der rechten oberen Seite der Abbildung zu sehen sind. Anschließend wurden die Symbole miteinander kombiniert und Doppelnennungen dabei weggelassen. Das Kind erkannte gut, dass es unwesentlich ist, welche Namen die Kinder haben beziehungsweise in welcher Reihenfolge sich diese die Hände geben. Es wählte Symbole, um alle möglichen Paarungen abzubilden und die Anzahl der Möglichkeiten zu ermitteln.

Außerdem wurde von rund 10% der Kinder eine mathematische Darstellungsform gewählt. Einige Lernende versuchten sich hierbei an einer Rechnung. „5 · 2 = 10“ (Notizen auf Testbogen 17). Auf diese Rechnung wurde bereits im Unterkapitel der Lösungsstrategien eingegangen. Testperson 8 hingegen kombinierte eine verbale mit einer rechnerischen Darstellung:

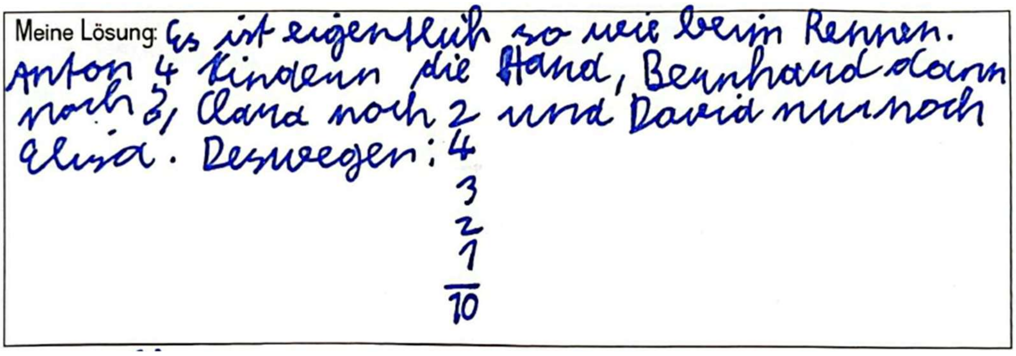


Abbildung 82: rechnerische Darstellung - Hände schütteln (Testbogen 8)

Zunächst wird von diesem Kind ein Vergleich zum vorherigen Beispiel der Testung, zur Aufgabe 3a, hergestellt. Durch diesen Bezug wird erkannt, dass das erste Kind vier anderen die Hand geben kann, das zweite dann nur mehr drei weiteren, das dritte noch zwei und das letzte nur mehr einem. Diese verbale Beschreibung wurde zusätzlich mit einer Addition ergänzt, wodurch die Anzahl der Möglichkeiten ermittelt werden konnte. Als weitere mathematisch Darstellung wurde auch eine Art Netzdarstellung verwendet. Testperson 21 beschreibt sein Vorgehen so: „Da habe ich Pfeile aufgezeichnet. Zuerst hat der erste mit allen die Hände geschüttelt, dann der zweite, aber mit dem ersten ja nicht mehr und dann auch die anderen noch.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 21) Ähnlich ist auch folgende Abbildung:

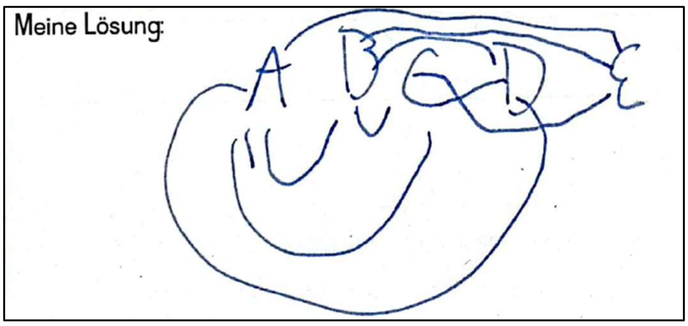


Abbildung 83: Netzdarstellung - Hände schütteln (Testbogen 63)

Diese Arbeitsweise wird im Einzelgespräch folgendermaßen beschrieben: „Hier habe ich mir Striche gemacht." (handschriftliche Notizen zu Testbogen 63) Die Person gab die Anfangsbuchstaben der Kinder an und symbolisierte anhand von Strichen zwischen den Buchstaben die möglichen Paarungen. Hierbei lässt sich jedoch feststellen, dass diese Form der Abbildung etwas unübersichtlich wird, weshalb auch eine inkorrekte Lösung ermittelt wurde: „Irgendwie waren es dann einfach viele Striche." (handschriftliche Notizen zu Testbogen 63) Im folgenden Unterkapitel wird auf Fehlerquellen der Schüler*innen bei der Aufgabe *Hände schütteln* noch genauer eingegangen.

7.7.2.3 Kategorie 3 – Fehleranalyse

Bei einer Analyse der Fehler, welche den Schüler*innen beim Testbeispiel 3b unterlaufen sind, zeigen sich einige typische Fehlerquellen. Mehrfach verzeichnen lässt sich, dass die Lernenden nicht bedachten, dass sich alle Kinder untereinander die Hände geben: „Anton gibt dem Bernhard die Hand, der Clara, dem David und der Elisa. Also viermal werden die Hände geschüttelt." (handschriftliche Notizen zu Testbogen 60) Auch eine weitere Person führte im *lauten Denken* an, dass nur Anton die Hände schüttelt. Nach Hinweis der Testleiterin, dass sich auch die anderen Kinder die Hände geben können, äußert die Testperson: „Das habe ich nicht gelesen." (handschriftliche Notizen zu Testbogen 5. Diese Unsicherheit dürfte, trotz der genauen Beschreibung in der Angabe, bei mehreren Teilnehmer*innen aufgetaucht sein. Eine Person weist im Einzelgespräch auch konkret darauf hin: „Da habe ich mich gefragt, ob nur der Anton die Hände schüttelt oder alle Kinder. Ich habe dann aber doch gelesen, dass es alle Kinder sind." (handschriftliche Notizen zu Testbogen 4) In einem weiteren Schritt kann Testperson 4 den korrekten Lösungsweg angeben, vergisst jedoch ein Kind. Dieser Fehler unterlief etlichen Schüler*innen, wie etwa auch Testperson 30:

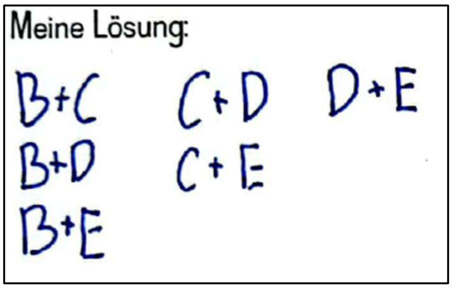


Abbildung 84: inkorrekter Lösungsweg - Hände schütteln (Testbogen 30)

Hierbei ist ersichtlich, dass der Lösungsweg zwar korrekt systematisch ermittelt, das Kind Anton jedoch übersehen wurde. Auch wenn bei jenen Testbögen das Beispiel als falsch gewertet werden muss, ist sichtbar, dass die Kinder das Prinzip gut verstanden haben und lediglich in ihrer Lesekompetenz Fehler aufwiesen. Interessant ist, dass Testperson 1 genau auf diese Fehlerquelle hinweist: „Den Anton darf man nicht vergessen. Es steht nämlich hier, dass sich bei der Begrüßung alle Kinder die Hand geben und es sind fünf Kinder. Wenn man nicht mehr daran denkt, dass Anton auch dabei ist, dann wären es weniger.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 1)

Als dritte typische Fehlerquelle kann analysiert werden, dass von etlichen Schüler*innen die Doppelnennungen nicht erkannt wurden. Diese Teilnehmer*innen kommen daher auf 16 verschiedene Möglichkeiten: „Immer einmal Anton mit dem Bernhard, dann Clara mit Anton und dann immer so abwechselnd. Dann habe ich das so oft kombiniert, bis ich auf 16 gekommen bin.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 13) Auch Testperson 44 beschreibt diesen Vorgang im Einzelgespräch und kommt zu folgender Lösung: „Deshalb sind es 16 Möglichkeiten.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 44)

Lediglich eine Person gab im *lauten Denken* an, dass es annahm, dass sich alle Kinder gleichzeitig die Hand geben können: „Da gibt es nur eine Möglichkeit, weil alle auf einmal die Hände schütteln.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 39. Hingegen konnte eine weitere Testperson richtig vorgehen und ermittelte im Lösungsfeld die korrekte Anzahl an Möglichkeiten. Sie gab jedoch im Lösungssatz eine falsche Antwort an, weshalb die Aufgabe als falsch gewertet wurde.

7.8 Aufgabe 4a

Die Aufgabe 4a, welche den Titel *Weihnachtsbasteln* trägt, kann der kombinatorischen Figur der Variation zugeordnet werden. Dieses Aufgabenbeispiel wurde aufgrund einer geringeren Anzahl an Möglichkeiten als leichtere Variationsaufgabe eingestuft.

7.8.1 Quantitative Auswertung

Die Aufgabe *Weihnachtsbasteln* konnte von nur fünf Testteilnehmer*innen korrekt gelöst werden, während 60 Schüler*innen eine falsche Antwort anführten. Lediglich ein kleiner Teil der Gesamtteilnehmenden, nicht mal 10% der Kinder, erfüllte die gestellten Anforderungen des Testbeispiels. Hingegen hatte ein Großteil der Untersuchungsgruppe Schwierigkeiten mit der Lösungsfindung. Das Kreisdiagramm anbei veranschaulicht das Verhältnis der Lösungsrate.

Abbildung 85: 4a - Weihnachtsbasteln

Wird das Beispiel *Weihnachtsbasteln* in Relation zu den anderen Testaufgaben gesetzt, wird ersichtlich, dass die Aufgabe insgesamt von den wenigsten Teilnehmer*innen gelöst werden konnte. Dieses Ergebnis weist auf Probleme im Verständnis der Aufgabenstellung oder im Schwierigkeitsgrad hin. Anzumerken ist hierbei, dass sich die Aufgabe an einem Beispiel aus der Literatur anlehnt und für die Grundstufe zwei der Primarstufe vorgesehen wurde. Eine genauere Beschreibung hierzu befindet sich im Kapitel 6.3.5.1. Anbei erfolgt eine qualitative Analyse der Aufgabe.

7.8.2 Qualitative Auswertung

All jene Eintragungen, welche die Lernenden am Testbogen tätigten, sowie die verbalen Daten aus den Einzelgesprächen mit ausgewählten Teilnehmer*innen, wurden analysiert und codiert. Anbei werden die Kategorien sowie die Unterkategorien genauer beschrieben.

7.8.2.1 Kategorie 1 – Lösungsstrategien

Nach einer weitreichenden Betrachtung der Lösungsstrategien, welche die Lernenden für die Aufgabe *Weihnachtsbasteln* anführten, zeigt sich, dass etwa 60% der Teilnehmer*innen keine Lösungsstrategie auf ihrem Testbogen verwendeten. Zwei Schüler*innen, die dieser Unterkategorie zugeordnet wurden, konnten die Aufgabe intuitiv und ohne Angabe einer Strategie lösen. Eines dieser Kinder war auch Teil des *lauten Denkens*: „Da habe ich immer durchgetauscht und bin auf neun gekommen." (handschriftliche Notizen zu Testbogen 41) Diese Erläuterung weist auf ein systematisches Vorgehen hin, welches jedoch nicht genauer erläutert wurde. Für die Testperson 41 dürfte eindeutig gewesen sein, wie durchgetauscht werden muss, damit die richtige Anzahl an Möglichkeiten ermittelt werden konnte.

Weiters wurde bei etwa 20% der Testteilnehmer*innen eine systematische Strategie erkannt. Wesentlich ist, dass auch inkorrekte Testbögen dieser Unterkategorie zugeordnet wurden, sofern ein systematisches Vorgehen erkennbar war. Die Fehler, welche bei der strukturierten Vorgehensweise unterlaufen sind, werden im Kapitel Fehleranalyse genauer betrachtet. Insgesamt konnten drei Untersuchungsteilnehmer*innen mit einer systematischen Strategie die richtige Antwort angeben. Zu jenen gehört folgende Testperson: „Da gibt es Stern-Stern, Stern-Kugel und Stern-Glocke. Dann nehme ich die Kugel nach vorne. Da gibt es Kugel-Stern, Kugel-Kugel und Kugel-Glocke. Dann fehlen noch Glocke-Stern, Glocke-Glocke und Glocke-Kugel. Es sind also neun.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 1) Hierbei ist eine Fixplatzstrategie erkennbar. Es wurde je eine Figur fixiert und die restlichen Anhänger rotiert. Eine solche Strategie wandte auch Testperson 19 an:

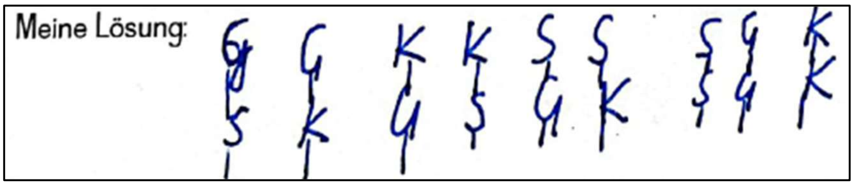


Abbildung 86: systematische Strategie - Weihnachtsbasteln (Testbogen 19)

Die Abbildung 86 veranschaulicht jedoch auch, dass die Doppelnennungen zum Schluss noch ergänzt wurden. Außerdem ging auch Testperson 21 systematisch vor und konnte die Lösung richtig angeben. Im Einzelgespräch beschreibt das Kind: „Da habe ich immer alles ausgetauscht und dann bin ich auf das Ergebnis gekommen.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 21) Auch wenn weitere Testteilnehmer*innen die richtige Anzahl an Möglichkeiten nicht ermitteln konnten, wurde von ihnen ein strategisches Vorgehen beschrieben, wie etwa folgendermaßen: „Da habe ich zuerst Stern-Stern, Kugel-Kugel und Glocke-Glocke zusammengezählt und dann noch die verschiedenen Möglichkeiten, die es gibt.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 5) Durch diese verbale Begründung wird sichtbar, dass das Kind die Doppelungen erkannte und diese auch zählte, sowie dass auch weitere Möglichkeiten durch ein Durchtauschen ermittelt werden können.

Zudem wurden ebenfalls rund 20% der Testbögen mit der Unterkategorie *Versuch und Irrtum* assoziiert. Alle Testteilnehmer*innen, die versuchten, eine Lösungsstrategie zu entwickeln, aber kein systematisches Vorgehen fanden, wurden dieser Unterkategorie zugeordnet, wie etwa folgende Testperson: „Da gibt es zwei Lösungen, weil der Stern mit der Glocke kombiniert werden kann und die Kugeln mit der Glocke.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 23) Es wird ersichtlich, dass das Kind nur bestimmte Kombinationen auswählte und keine Vorgehensweise zur Angabe aller Möglichkeiten finden konnte. Ähnliche Arbeitsschritte lassen sich bei weiteren Testbögen dieser Unterkategorie erkennen. Zumeist gaben die Proband*innen nur vereinzelte Möglichkeiten an, wobei nicht ersichtlich wurde, nach welchen Kriterien beziehungsweise nach welcher Strategie diese Möglichkeiten ermittelt wurden. Hierzu kann auch folgende Testperson zugeordnet werden: „Ich habe geschaut, wie viele Möglichkeiten es gibt und bin auf drei gekommen." (handschriftliche Notizen zu Testbogen 13) Auch folgende Erklärung passt zu *Versuch und Irrtum*: „Zuerst der Stern mit den Kugeln, der Stern mit den Glocken und die Kugeln mit der Glocke" (handschriftliche Notizen zu Testbogen 28). In diesem Kontext wird auch ersichtlich, dass jenes Kind teilweise in der Mehrzahl spricht, was darauf schließen lässt, dass nicht verstanden wurde, dass immer zwei Elemente miteinander kombiniert werden.

Hingegen wurde bei diesem Aufgabenbeispiel kein Testbogen der Unterkategorie *Rückgriff auf Vorwissen* zugeordnet.

7.8.2.2 Kategorie 2 – Darstellungsformen

Eine eingehende Analyse der Darstellungsformen, welche bei der Aufgabe 4a verwendet wurden, offenbart, dass von etwa 60% der Teilnehmer*innen keine Visualisierungen am Testbogen angegeben wurde. Lediglich zwei dieser Kinder konnten die Aufgabe korrekt lösen. Jene sind ident mit den Schüler*innen, welche keine Lösungsstrategie anführten (siehe Kapitel 7.8.2.1).

Weiters wurde von etwa einem Drittel der Schüler*innen eine visuelle Darstellungsform gewählt, wobei hiervon etwa die Hälfte der Lernenden zeichneten:

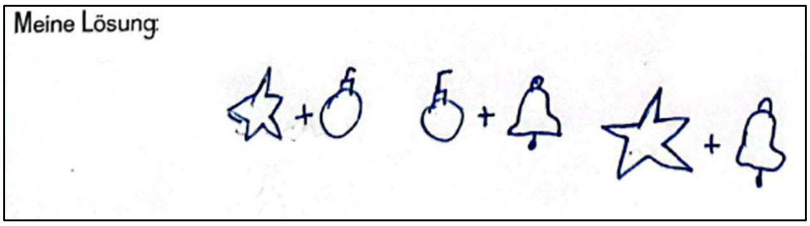


Abbildung 87: zeichnerische Darstellung - Weihnachtsbasteln (Testbogen 6)

Auf allen Testbögen, welche der Unterkategorie *Zeichnungen* zugeordnet werden können, wurden die drei verschiedenen Weihnachtselemente aufgemalt. „Da habe ich mir das so aufgezeichnet und geschaut, wie oft es die Möglichkeiten gibt." (handschriftliche Notizen zu Testbogen 11) Weiters führte die andere Hälfte der Schüler*innen Typografien an: „Ich habe hier S für Stern, G für Glocke und K für Kugel genommen." (handschriftliche Notizen zu Testbogen 1) Die Abbildung anbei veranschaulicht eine solche Darstellung:

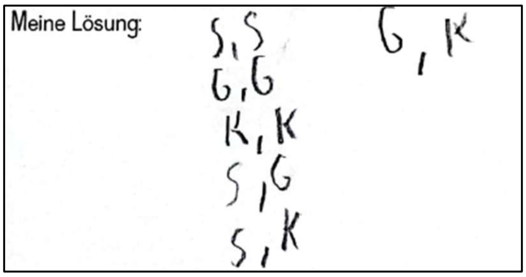


Abbildung 88: typografische Darstellung - Weihnachtsbasteln (Testbogen 5)

Eine verbale Erläuterung legen lediglich wenige Teilnehmer*innen am Testbogen dar. Hierbei zählten die Teilnehmer*innen die Möglichkeiten in Worten auf, wie etwa Testperson 32:

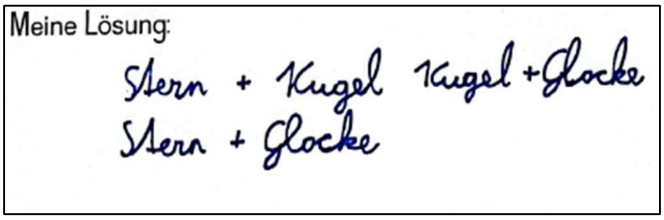


Abbildung 89: verbale Darstellung - Weihnachtsbasteln (Testbogen 32)

Von den anderen verbalen Darstellungen weicht lediglich eine schriftliche Begründung ab: „Kann man nicht lösen“ (Notizen auf Testbogen 7). Jenes Kind war nicht Teil eines Einzelgesprächs, weshalb die genauen Verständnisprobleme nicht ermittelt werden konnten. Es lässt sich aber darauf schließen, dass die Angabe für dieses Kind nicht erfassbar war, weshalb es zum Entschluss kam, dass die Aufgabe nicht lösbar ist.

Weiters wurden auch nur wenige mathematische Darstellungsformen gewählt. Testperson 21 wählte eine Art Netzdarstellung zur Ermittlung der Anzahl an Möglichkeiten:

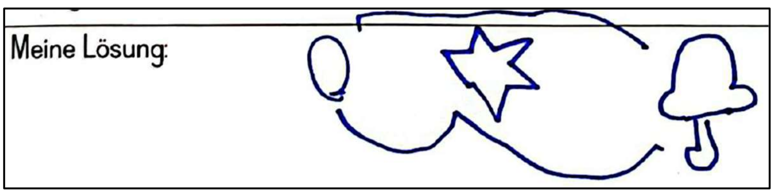


Abbildung 90: Netzdarstellung - Weihnachtsbasteln (Testbogen 21)

Dieses Kind konnte anhand der Darstellung die richtige Lösung angeben. Im Einzelgespräch führt es an: „Da habe ich immer alles ausgetauscht und dann bin ich auf das Ergebnis gekommen.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 21) Die Abbildung gemeinsam mit der Aussage zeigt, dass jenes Kind ein tiefes mathematisches Verständnis für diese Aufgabe besitzt. Für das Kind war klar, welche Elemente wie miteinander kombiniert werden können, weshalb eine grafische Darlegung aller einzelnen Kombinationen nicht notwendig war. Eine ähnliche Abbildung wurde auch von einer weiteren Person angeführt, welche jedoch nicht zu einer adäquaten Lösung beitragen konnte.

Des Weiteren gaben die Proband*innen mathematische Darstellungen in Form von Ziffern-darstellungen an. Hierfür wurde jedem Objekt eine Ziffer zugeordnet und diese anschließend miteinander kombiniert. Keines dieser Kinder war Teil des *lauten Denkens*, weshalb hierfür auch keine verbale Begründung von Schüler*innen vorliegen. Aufgrund dessen, dass die Aufgabe 4a von vielen Teilnehmer*innen nicht korrekt gelöst wurde, wird ein Fokus auf die Untersuchung der Fehlerquellen gelegt.

7.8.2.3 Kategorie 3 – Fehleranalyse

Bei einer Analyse der Fehler, welche den Schüler*innen unterlaufen sind, lässt sich feststellen, dass typische Fehlerquellen immer wieder aufgetreten sind. Bei vielen Testpersonen konnte ein systematisches Vorgehen erkannt werden, anhand welchem sechs Möglichkeiten ermittelt wurden:

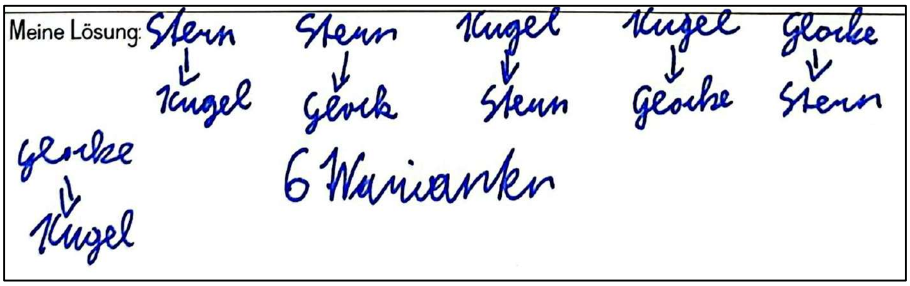


Abbildung 91: systematische Strategie - Weihnachtsbasteln (Testbogen 8)

Das Kind hat die Aufgabe korrekt verstanden und konnte Möglichkeiten richtig bilden. Jedoch wurden die Doppelungen übersehen, welche aufgrund einer unbegrenzten Anzahl an Objekten ebenfalls möglich sind. Dieser Fehler wurde auf etlichen Testbögen eindeutig erkannt. Hingegen konnten einige Schüler*innen die Doppelungen nennen, vergaßen aber, dass die Elemente vertauscht werden können und dadurch unterschiedliche Anhänger entstehen:

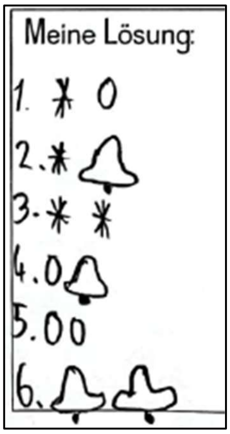


Abbildung 92: Fehlerquelle 1 - Weihnachtsbasteln (Testbogen 26)

Auch im Einzelgespräch beschreibt ein Kind sein Vorgehen hierzu passend: „Da habe ich zuerst Stern-Stern, Kugel-Kugel und Glocke-Glocke zusammengezählt und dann noch die verschiedenen Möglichkeiten, die es gibt, also Stern-Kugel, Kugel-Glocke und Glocke-Stern." (handschriftliche Notizen zu Testbogen 26) Berücksichtigt wurde nicht, dass beispielsweise auch Stern-Kugel und Kugel-Glocke zwei weitere Möglichkeiten darlegen.

Eine weiterführende häufige Fehlerquelle ist folgende: „Stern und Kugel, Stern und Glocke und Kugel und Glocke" (handschriftliche Notizen zu Testbogen 32). Viele Schüler*innen ermittelten drei Möglichkeiten. Hierbei wurden weder die Doppelungen noch die Vertauschung der Elemente berücksichtigt. Jedoch ist ersichtlich, dass das Prinzip, dass immer zwei Objekte zu einem Anhänger zusammen kombiniert werden, verstanden wurde. Weiters lassen sich noch Testbögen erkennen, bei welchen zwar einige Kombinationen, jedoch nicht alle neun, aufgedeckt wurden: „Stern und Kugel, Kugel und Glocke, Glocke und Kugel und Glocke und Stern – deshalb sind es vier Möglichkeiten." (handschriftliche Notizen zu Testbogen 44)

Weitere Schüler*innen kombinieren auf ihrem Testbogen zwar immer zwei Objekte, zählen jedoch anschließend bei der Bestimmung der Anzahl an Möglichkeiten alle einzelnen Objekte ab, wie folgende Testperson:

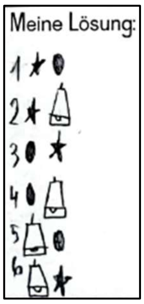


Abbildung 93: Fehlerquelle 2 - Weihnachtsbasteln (Testbogen 27)

Jenes Kind gab im Lösungssatz an, dass es zwölf Möglichkeiten (Notizen auf Testbogen 27) gibt, hingegen bei der Abbildung oberhalb ersichtlich ist, dass nur sechs korrekte Lösungen angegeben werden wurden. In diesem Fall wurden jedoch auch die Doppelungen vergessen, weshalb die Antwort ohnehin nicht korrekt gewesen wäre.

Testperson 60 hingegen war von der Angabe, dass es jedes Objekt vielfach gibt, irritiert: „Man weiß ja nicht, wie viele Kugeln, Glocken und Sterne es gibt, deshalb habe ich viele als Antwort geschrieben." (handschriftliche Notizen zu Testbogen 60) Für jenes Kind war nicht ersichtlich, dass immer zwei Weihnachtsfiguren zusammen kombiniert werden und dabei die Anzahl dieser Objekte keine Rolle spielt. Interessanterweise sprachen auch einige Schüler*innen bei den Einzelgesprächen in der Mehrzahl der Elemente: „Es gibt Sterne mit Kugeln, Kugeln mit Glocken und Glocken mit Sternen." (handschriftliche Notizen zu Testbogen 62) Dies weist darauf hin, dass auch sie durch die Angabe, dass jedes Element vielfach vorhanden ist, verwirrt waren und zusätzlich nicht begriffen, dass immer zwei Objekte zu einem Anhänger kombiniert werden. Bei der Interpretation der Aufgabe hatte auch Testperson 24 Schwierigkeiten:

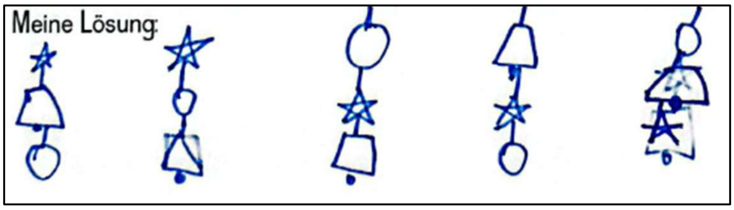


Abbildung 94: Fehlerquelle 3 - Weihnachtsbasteln (Testbogen 24)

Jenes Kind dürfte in der Angabe überlesen haben, dass immer zwei Objekte miteinander zu einem Anhänger kombiniert werden. Wie die Abbildung 94 zeigt, gab das Kind immer drei Objekte zusammen. Zusätzlich wurde nur eine Auswahl an Möglichkeiten angegeben, was darauf hindeutet, dass ein strategisches und systematisches Vorgehen fehlte. Interessant ist auch folgender Testbogen:

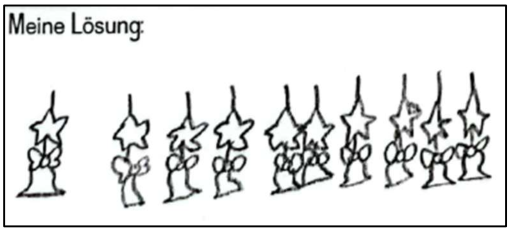


Abbildung 95: Fehlerquelle 4 - Weihnachtsbasteln (Testbogen 45)

Auf diesem Testbogen wurde zehnmal ein identer Anhänger aufgezeichnet. Dieses Kind war nicht Teil des *lauten Denkens*, weshalb leider keine Einsicht in dessen Gedanken vorliegt. Es lässt sich jedoch vermuten, dass auch hierbei die Angabe für das Kind nicht verständlich war und dieses nicht herauslesen konnte, dass verschiedene Anhänger gebastelt werden sollen.

In den Einzelgesprächen gaben bei der Aufgabe 4a auch einige Schüler*innen an, dass sie die Aufgabenstellung nicht erfassen konnten: „Das habe ich einfach nicht verstanden." (handschriftliche Notizen zu Testbogen 16) Eine weitere Testperson beschreibt Folgendes: „Da war ich ein bisschen verwirrt, aber ich habe es trotzdem probiert." (handschriftliche Notizen zu Testbogen 4) Das Kind äußert seine Unsicherheit, zeigt aber trotzdem Initiative und ließ sich nicht entmutigen. Eine weitere Person gibt an: „Da habe ich geraten. Weil es Sterne, Kugeln und Glocken gibt, bin ich auf drei gekommen." (handschriftliche Notizen zu Testbogen 11) Diese verbale Aussage ermöglicht den Einblick, dass jenes Kind das Prinzip der Kombinatorik bei dieser Aufgabe nicht erfassen konnte. Zunächst gibt die Person an, dass keine Strategie verwendet, sondern geraten wurde, ehe die Anzahl an verschiedenen Objekten, welche zur Verfügung stehen, mit der Anzahl an Möglichkeiten gleichgesetzt wird.

7.9 Aufgabe 4b

Die Aufgabe 4b, das Beispiel Fahrradschloss, gehört der kombinatorischen Figur der Variation an und wurde bei der Testung aufgrund der größeren Anzahl an Möglichkeiten als schwierigere Aufgabe aus dem Bereich der Variation zugeordnet.

7.9.1 Quantitative Auswertung

Die Aufgabe 4b wurde von neun Schüler*innen, rund 15% der Teilnehmer*innen, richtig bearbeitet, während 56 Lernende keine korrekte Lösung angeben konnten. Dieses Verhältnis veranschaulicht die Grafik anbei:

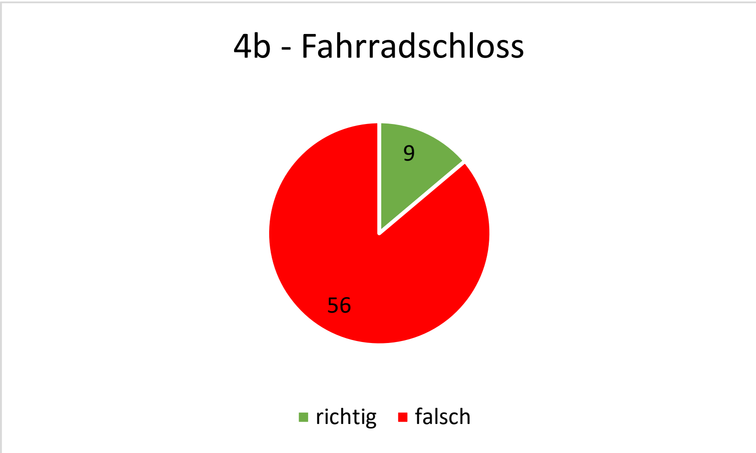


Abbildung 96: 4b - Fahrradschloss

In Relation zu den anderen Aufgabenbeispielen wurde nur eine Aufgabe seltener richtig gelöst. Die Lösungsrate von rund 15% gemeinsam mit dem Vergleich zu den anderen Testaufgaben lässt darauf schließen, dass das Testbeispiel einen hohen Schwierigkeitsgrad für die Lernenden hatte. Die Anzahl an Möglichkeiten, welche ermittelt werden musste, war relativ hoch für Kinder der Grundschule. Dennoch war es Ziel der Testung, auch ein solches Schwierigkeitsniveau abzudecken. Schließlich wurde die Testaufgabe in der Literatur auch als ein Beispiel für den Primarschulbereich deklariert.

7.9.2 Qualitative Auswertung

Anbei erfolgt die qualitative Auswertung der Aufgabe 4b. Die Testbögen sowie die verbalen Daten wurden kategorisiert und werden nun in den folgenden Unterkapiteln näher erläutert.

7.9.2.1 Kategorie 1 – Lösungsstrategien

Bei einer Betrachtung der Lösungsstrategien, welche Schüler*innen beim Lösen des Beispiels *Fahrradschloss* verwendeten, zeigt sich, dass etwa die Hälfte der Testbögen der Unterkategorie des intuitiven Lösungsweges zugeordnet wurden. Von den rund 50% der Teilnehmer*innen, welche das freie Lösungsfeld freiließen, konnte keine Person die Aufgabe korrekt lösen. Dies weist darauf hin, dass aufgrund der hohen Anzahl an Möglichkeiten ein intuitiver Lösungsweg, ein Finden aller Variationen im Kopf, zu anspruchsvoll war. Einige dieser Teilnehmenden waren auch Teil des *lauten Denkens*. In der retrospektiven Phase konnten daher trotzdem Einblicke in die Vorgehensweisen gewonnen werden. Diese werden in der Fehleranalyse im Unterkapitel anbei genauer beschrieben.

Weiters führten 20% der Untersuchungsteilnehmenden eine systematische Strategie an. Alle neun richtigen Antworten des Testbeispiels 4b basieren auf einer strukturierten Vorgehensweise. Anbei befindet sich ein Abbild des Testbogens 29, welcher eine adäquate Lösung darlegen konnte:

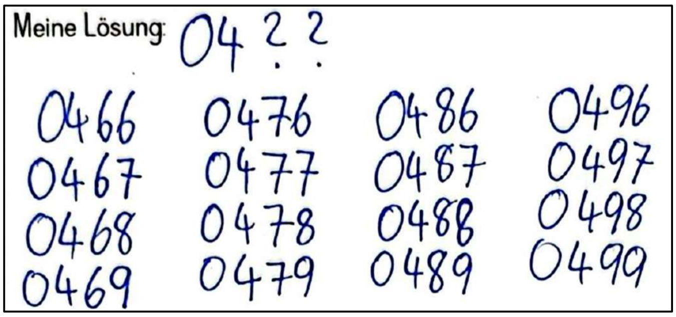


Abbildung 97: systematische Strategie 1 - Fahrradschloss (Testbogen 29)

Es ist ersichtlich, dass diese Person zunächst erkannt hat, dass die ersten beiden Ziffern immer gleich sind und nur die restlichen zwei variieren können. Anschließend wurde immer eine Zahl fixiert, während die andere rotierte. Durch ein solches systematisches Vorgehen konnten alle 16 Möglichkeiten aufgezählt werden. Im Einzelgespräch beschreibt eine weitere Testperson, welche die richtige Antwort finden konnte, das Vorgehen folgendermaßen: „Da habe ich alle über fünf gezählt. Also sechs und sechs, sechs und sieben und so weiter und das bis neun. Ich habe mir da so ein System entwickelt.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 21) Das Kind gibt selbst an, dass es notwendig war, ein System zu finden, um nicht den Überblick zu verlieren. Anbei befindet sich der Testbogen dieses Kindes:

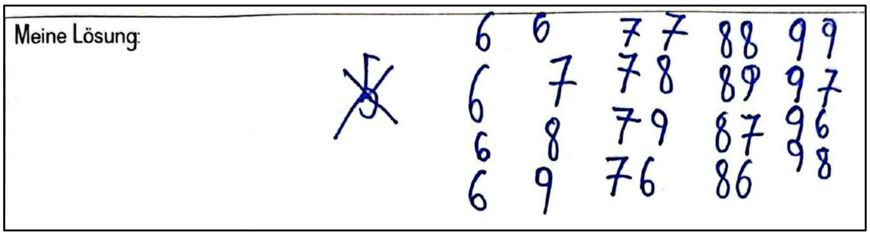


Abbildung 98: systematische Strategie 2 - Fahrradschloss (Testbogen 21)

Wesentlich ist hier, dass erkannt wurde, dass die ersten beiden Ziffern für die Lösungsfindung irrelevant sind und aus diesem Grund nicht angeführt werden müssen. Auch Testperson 65 gibt an, dass die ersten zwei Ziffern nicht berücksichtigt werden müssen: „Also immer null-vier am Anfang, und dann habe ich mit sechs gestartet: sechs-sechs, sechs-sieben, sechs-acht, sechs-neun. Dann geht es weiter mit sieben: sieben-sechs, sieben-sieben, sieben-acht, sieben-neun. Das dann auch noch mit acht und neun“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 65)

Weiters wurden aber auch Testbögen, die nicht die richtige Anzahl an Möglichkeiten ermitteln konnten, einer systematischen Strategie zugeordnet. Dies waren all jene Testbögen, bei denen ein Arbeiten nach einem bestimmten Schema erkennbar war, wobei jedoch einige Zahlen und Möglichkeiten übersehen wurden, wie etwa bei der folgenden Testperson:

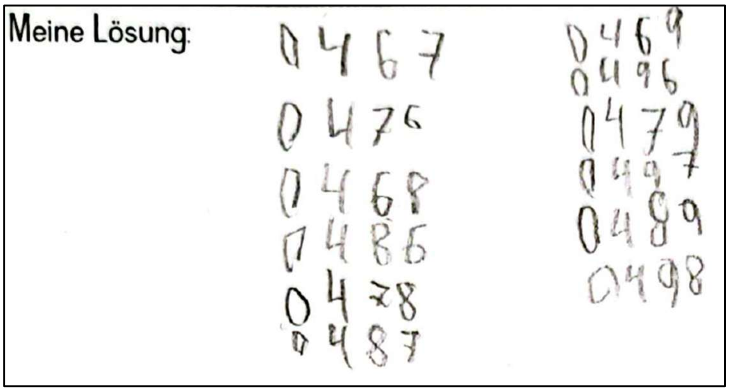


Abbildung 99: Teil-systematische Strategie - Fahrradschloss (Testbogen 5)

Jenes Kind führte zwölf richtige Möglichkeiten an, hingegen vier jedoch fehlten. Es ging nach dem System vor, dass zwei verwendete Ziffern immer vertauscht wurden, ehe zwei neue gefunden und verdreht wurden. Das Prinzip der Aufgabe konnte erfasst und systematisch vorgegangen werden.

Ein weiteres Kind, welches die korrekte Antwort ermitteln konnte und Teil des *lauten Denkens* war, führte an: „Da habe ich einfach ganz viele Möglichkeiten gemacht und aufgezählt, ganz normal aufgezählt. Nur eins, zwei, drei, vier und fünf existieren nicht.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 63) Obwohl das Kind am Testbogen systematisch vorgegangen ist, klingt die verbale Beschreibung eher willkürlich und so, wie wenn durch Zufall alle Möglichkeiten entdeckt worden wären. Ein eher wahlloses Auflisten von Möglichkeiten konnte bei etwas über 25% der Testbögen erkannt werden. Diese wurden der Unterkategorie *Versuch und Irrtum* zugeordnet. Testbogen 16 veranschaulicht ein Beispiel:

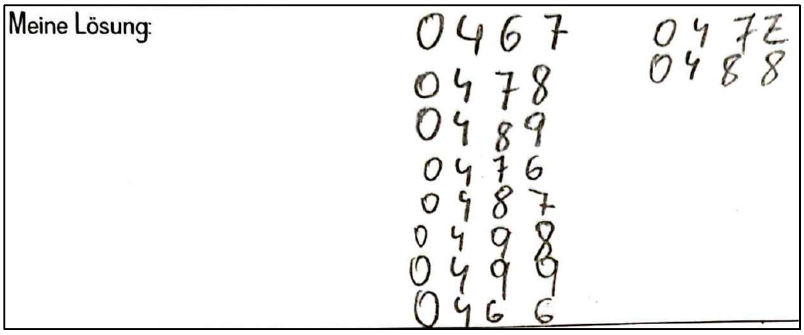


Abbildung 100: unsystematische Strategie - Fahrradschloss (Testbogen 16)

Das Kind konnte zehn korrekte Möglichkeiten aufzählen, hingegen sechs noch fehlen würden. Hierbei ist jedoch ersichtlich, dass Auflistung der Variation ohne sichtliches System erfolgte, weshalb auch viele Möglichkeiten ausgelassen wurden. Das Grundprinzip der Aufgabe konnte jedoch korrekt erfasst werden, was auch die verbale Erläuterung im Einzelgespräch zeigt: „Da habe ich einmal null-vier hingeschrieben, weil das ja immer gleich ist. Dann habe ich die Zahlen bis neun hingeschrieben, also ab sechs, weil es ja größer als fünf sein muss." (handschriftliche Notizen zu Testbogen 16) Dennoch konnten durch die unstrukturierte Vorgehensweise nicht alle Möglichkeiten gefunden werden. Ein solcher Fehler unterlief vielen Testpersonen, worauf jedoch im Unterkapitel der Fehleranalyse noch genauer eingegangen wird.

Weiters wandten nur wenige Lernende eine mathematische Lösungsstrategie an. Testperson 10 beschreibt: „4 + 4 + 4 = 12" (Notizen auf Testbogen 10). Ein weiteres Kind fand folgende rechnerische Lösung: „5 · 4 = 20" (Notizen zu Testbogen 17). Keine dieser Personen wurden zu einem Einzelgespräch eingeladen, weshalb kein genauerer Einblick in die Denkweise der Schüler*innen vorliegt.

7.9.2.2 Kategorie 2 – Darstellungsformen

Bei einer Analyse der Darstellungsformen wird sichtbar, dass, bis auf wenige Ausnahmen, nur zwischen zwei Typen unterschieden werden kann. Am häufigsten, von etwa der Hälfte der Teilnehmer*innen, wurde eine mathematische Darstellungsform gewählt. Nahezu all diese Proband*innen arbeiteten mit einer Zifferndarstellung: „Zuerst 0466, dann 0467, dann 0768, […]" (handschriftliche Notizen zu Testbogen 28). Eine solche Visualisierung veranschaulicht die Abbildung anbei:

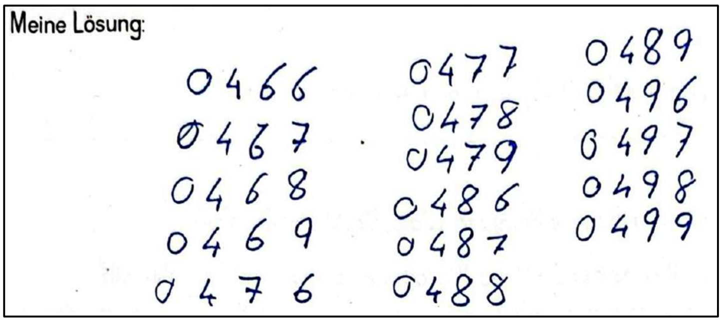


Abbildung 101: Zifferndarstellung - Fahrradschloss (Testbogen 65)

Weiters wurden auch vereinzelt rechnerische Darstellungen verwendet:

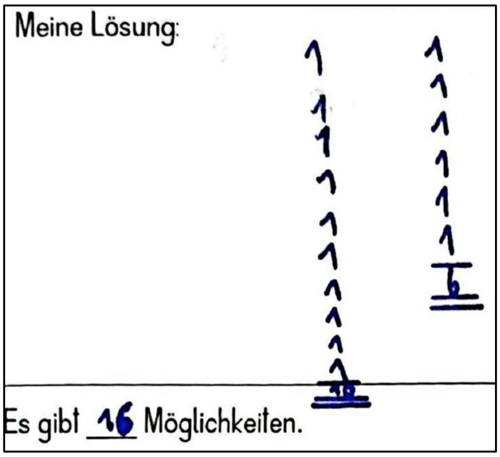


Abbildung 102: rechnerische Darstellung - Fahrradschloss (Testbogen 41)

Testperson 41 beschreibt sein Vorgehen im Einzelgespräch: „Ich habe mir gedacht, es gibt die Möglichkeiten sechs, sieben, acht und neun und dann habe ich immer durchgetauscht.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 41) Die weiteren inkorrekten Rechnungen wurden bereits bei der Kategorie der Lösungsstrategien kurz angeführt.

Neben mathematischen Abbildungen gaben auch rund 45% der Testpersonen keine Darstellung an. Wesentlich ist hierbei, dass, wie bereits bei den Lösungsstrategien beschrieben, keine dieser Teilnehmenden die Aufgabe korrekt lösen konnte. Einige dieser Teilnehmer*innen waren auch Teil des *lauten Denkens*. Auffällig ist hierbei, dass keine einzige Person erwähnte, wie sie sich die Möglichkeiten gedanklich abgebildet hat. Dies zeigt auf, dass es sinnvoll ist, sich eine größere Anzahl an Variationen darzustellen und zu visualisieren.

Lediglich eine Testperson verwendete eine visuelle Darstellung, konkret eine farbliche Darstellung anhand von bunten Strichen:

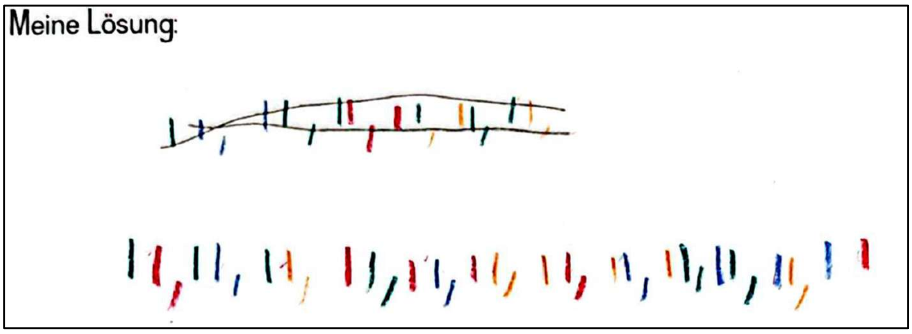


Abbildung 103: farbliche Darstellung - Fahrradschloss (Testbogen 18)

Das Kind ordnete jeder Ziffer eine Farbe zu und variierte die Farben miteinander. Auffällig ist, dass ansatzweise eine systematische Vorgehensweise ersichtlich ist, die Farben aber letztlich unübersichtlich geworden sein dürften: „Ich habe jede Zahl viermal genommen und das dann mal vier gerechnet. Oder doch nicht? Irgendwie bin ich auf zwölf gekommen.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 18)

7.9.2.3 Kategorie 3 – Fehleranalyse

Auf die am häufigsten vorkommende Fehlerquelle wurde bereits im Unterkapitel der Lösungsstrategien kurz eingegangen. Viele Lernenden gingen nicht systematisch vor und führten daher nur einige Möglichkeiten, jedoch nicht alle, an, wie etwa folgende Testperson:

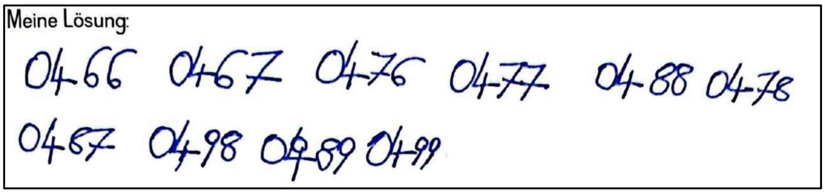


Abbildung 104: Fehlerquelle 1 - Fahrradschloss (Testbogen 28)

Dieses Kind zählt unwillkürlich einige Zahlenvariationen auf, verwendet aber keine Strategie, um alle Kombinationen zu finden. Auch Testperson 32 beschreibt seine unvollständige Aufzählung im *lauten Denken*: „Null und vier waren immer gleich. Dann habe ich sechs-sechs, sechs-sieben, sieben-sieben, sieben-acht, acht-acht, neun-acht und neun-neun noch gefunden.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 32) Dieser Fehler lässt sich bei nicht ganz der Hälfte der inkorrekten Testbögen feststellen.

Weiters herrschte bei einigen Testteilnehmer*innen folgender Irrtum: „Sechs, sieben, acht und neun sind möglich und das zweimal, deshalb sind es acht Möglichkeiten.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 42) Korrekterweise erkannte das Kind, welche Zahlen eingesetzt werden dürfen und dass diese an zwei Stellen ermittelt werden. Jedoch wurde hierbei auf das Prinzip der Kombination vergessen und keine möglichen Variationen der Ziffern gebildet. Ein ähnlicher Fehler unterlief Testperson 44: „Es gibt nur vier Zahlen zwischen fünf und zehn, deshalb gibt es vier Möglichkeiten.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 44) Hier wurden wieder die Zahlen, die eingesetzt werden können, richtig identifiziert. Jedoch fehlt bei dieser Beschreibung auch das Verständnis, dass die Ziffern an zwei Stellen gesucht werden, sowie wieder das Prinzip der Kombination dieser zwei Zahlen. Auch folgende Testperson überlas, dass zwei Zahlen, die dritte und vierte Zahl, am Zahlenschloss gesucht werden:

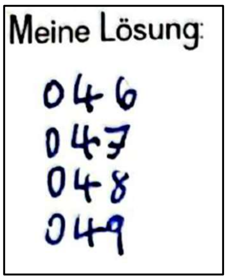


Abbildung 105: Fehlerquelle 2 - Fahrradschloss (Testbogen 4)

Sie führte nur die Möglichkeiten, welche es für die dritte Zahl gibt, an. Dies wiederum erkannte Testperson 55: „Wir wissen ja schon die ersten zwei Zahlen, deswegen bleiben zwei Zahlen übrig.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 55) In der weiteren verbalen Erläuterung des Kindes wird jedoch sichtbar, dass das Prinzip der Aufgabe nicht erfasst wurde. Es wird weder berücksichtigt, dass die Zahl größer als fünf sein soll, noch, dass verschiedene Variationen gefunden werden: „Weil nurmehr zwei Zahlen übrigbleiben, sind es zwei Möglichkeiten.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 55)

Eine weitere Fehlerquelle war die Aufgabenstellung, dass die Zahlen größer als fünf sein müssen. So schloss beispielsweise folgende Testperson die Ziffer fünf mit ein:

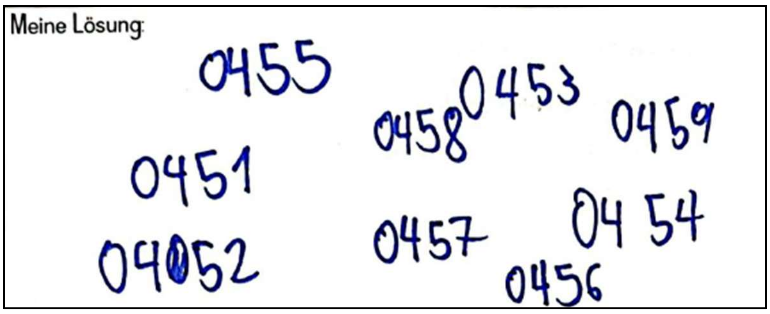


Abbildung 106: Fehlerquelle 3 - Fahrradschloss (Testbogen 33)

Auch Testperson 23 unterlief hierbei ein Fehler: „Die dritte und vierte Zahl ist größer als fünf. Es gibt also sechs, sieben, acht und zehn. Aso, die neun habe ich vergessen. Also eigentlich sind es fünf Zahlen.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 23) Auch wenn das Kind im Einzelgespräch selbst bemerkt, dass es eine Ziffer übersehen hat, wurde die Zahl zehn auch genannt. Diese kann jedoch in einem Zahlenschloss nicht eingestellt werden. Darauf wies ein

Kind im Gespräch genau hin: „Ich habe selbst ein Fahrradschloss und ich weiß, dass die Zahlen nur bis neun gehen.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 18)

Wenige Proband*innen geben im Einzelgespräch an, dass sie die Aufgabe nicht verstanden: „Da weiß ich einfach nicht, wie ich das rechnen soll.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 39) Auch ein weiteres Kind gibt an: „Die Aufgabe war so schwierig. Da habe ich einfach nur geraten.“ (handschriftliche Notizen zu Testbogen 13)

7.10 Diskussion der Ergebnisse

Im folgenden Kapitel werden die Ergebnisse der Forschung zusammenfassend dargestellt und mit den Erkenntnissen aus dem Theorieteil der Arbeit verglichen. Wird die Gesamtzahl der korrekt gelösten Beispiele der vorliegenden Untersuchung ins Verhältnis zur Summe aller gestellten Aufgaben gesetzt, zeigt sich, dass die Schüler*innen im Mittel etwa die Hälfte der Aufgaben richtig bearbeiten konnten. Diese Erkenntnisse entsprechen tendenziell auch den Ergebnissen der Untersuchung von Herzog (2017, S. 276), welcher die Leistungen im Bereich der Kombinatorik von Lernenden der dritten Schulstufe analysierte. Dieser kam jedoch zum Ergebnis, dass nur rund ein Drittel der Teilnehmenden die Lösungen adäquat ermitteln konnte. Aufgrund dessen, dass die Schüler*innen ungefähr im gleichen Alter sind, können die beiden Untersuchungen verglichen werden. Hierbei zeigt sich, dass in der vorliegenden Forschung mehr Kinder die Aufgaben lösen konnten, wenngleich beide Untersuchungen aufzeigen, dass Schüler*innen ohne Vorkenntnisse deutliche Schwierigkeiten beim Lösen von Kombinatorikaufgaben haben.

Weiters werden die unterschiedlichen Aufgabentypen der Untersuchung näher betrachtet. Kipman (2015, S. 59) gibt an, dass die drei kombinatorischen Figuren unterschiedlicher logischer Voraussetzungen bedürfen. Dies zeigen auch die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit auf. Die höchste Lösungsrate konnten die Testteilnehmer*innen bei Permutationsaufgaben erreichen. Dies deckt sich mit der Empfehlung von Neubert (2019c, S. 97), dass in der Primarstufe zunächst mit Aufgaben aus dem Bereich der Permutation gearbeitet werden soll, wenngleich auch Beispiele der weiteren kombinatorischen Figuren Unterrichtsinhalt sein sollen, selbst wenn diese schwieriger zu lösen sind. Am schwierigsten waren in der vorliegenden Studie die Variationsaufgaben, wobei anzumerken ist, dass bei diesen die Anzahl an Möglichkeiten am höchsten war. Beim Testbeispiel 4a mussten insgesamt 16 Möglichkeiten ermittelt werden, was bereits die Obergrenze der Empfehlung an Möglichkeiten in der Primarstufe von Sill und Kurtzmann (2019, S. 187) überschreitet.

Die vorliegende Forschung zeigt auch auf, dass keine wesentlichen geschlechtsspezifischen Differenzen beim Lösen von kombinatorischen Aufgaben bei Schüler*innen der vierten Schulstufe gibt. Lediglich bei der Betrachtung einzelner Testbeispiele waren die männlichen Teilnehmer teilweise im Vorteil. Diese Erkenntnisse stehen im Einklang mit Kipman (2018, S. 147), welcher ebenfalls aufweist, dass das Geschlecht von Kindern keinen großen Einfluss auf die Leistungen in der Kombinatorik hat. Weiterführend zeigt Kipman (2018, S. 66) auch, dass die verwendeten Strategien in keinem Zusammenhang mit dem Geschlecht der Schüler*innen stehen. Des Weiteren deckt sich die Analyse der Untersuchung im Bereich der Korrelation der Selbsteinschätzung der Mathematikleistungen mit den Leistungen im Bereich der Kombinatorik mit den Ergebnissen von Kipman (2018, S. 150). Dieser gibt an, dass es einen signifikanten Zusammenhang zwischen den beiden Variablen gibt. Auch die durchgeführte Analyse im Rahmen dieser Arbeit kommt zu diesem Entschluss. Je besser sich Schüler*innen in Mathematik einstufen, desto besser können sie Kombinatorikaufgaben lösen.

Bei einer genaueren Betrachtung der Strategien, welche Schüler*innen in der vorliegenden Untersuchung verwendeten, zeigt sich, dass am häufigsten keine konkrete Vorgehensweise angegeben wurde und die Lernenden zumeist durch Raten oder spontane Äußerungen zu ihrem Ergebnis kamen, wobei dies in den meisten Fällen inkorrekt war. Ähnliches beschreibt auch Lace (2008). Auch in ihrer Studie zu den Strategien bei Kombinatorikaufgaben geben Teilnehmer*innen häufig keine Lösungsmethode an. Hierzu führt Kipman (2015, S. 66) an, dass ein unstrukturiertes und unsystematisches Vorgehen zum Scheitern führt, hingegen das Entwickeln von Strategien hervorruft, dass Aufgaben wahrscheinlicher gelöst werden können. Zu dieser Erkenntnis kommt auch die vorliegende Analyse. Von all jenen Aufgabenbeispielen, bei denen Strategien erkennbar waren, wurden am häufigsten systematische Strategien angegeben, und diese führten auch zu einer deutlich höheren Lösungsrate. Ein möglicher Grund dafür, dass nur bei etwa einem Drittel der Testaufgaben ein solches Vorgehen erkennbar ist, könnte darin liegen, dass Schüler*innen kombinatorische Aufgaben erst ab einem Alter von etwa elf Jahren systematisch lösen können. Zuvor sind diese verwendeten Strategien häufig noch instabil oder beziehen sich auf eine konkrete Aufgabe (Neubert, 2019a, S. 20).

Ein Bezug zur Grundlagenliteratur lässt sich in der vorliegenden Forschung auch bei der Analyse der Darstellungsformen erkennen. Während etwa die Hälfte der Teilnehmer*innen keine Darstellung angab, wurden weiters hauptsächlich symbolische, visuelle und verbale Darstellungen je nach Aufgabentyp verwendet. Dies deckt sich mit der Erkenntnis von Herzog (2017, S. 278), welcher angibt, dass Darstellungen stark vom Inhalt der Aufgabe abhängen, oft den Inhalt dieser abbilden und zumeist bildliche und typografische, aber kaum organisierte Darstellungen verwendet werden.

Zusammenfassend zeigt sich, dass sich die wesentlichen Erkenntnisse der vorliegenden Forschung weithingehend mit bereits bestehenden Untersuchungen decken.

7.11 Resümee und Beantwortung der Forschungsfrage

Ziel des Kapitels *Forschungsergebnisse* ist es, die Erkenntnisse der Untersuchung der vorliegenden Arbeit so darzulegen, dass die zwei zentralen Forschungsfragen beantwortet werden können. Hinsichtlich der Frage, wie Schüler*innen der vierten Schulstufe kombinatorische Aufgaben lösen, zeigt die vorliegende Untersuchung, dass die Teilnehmer*innen durchschnittlich dreieinhalb von acht möglichen Aufgaben richtig lösten. Dabei konnten deutliche Unterschiede hinsichtlich der einzelnen Testaufgaben festgestellt werden: Während das Beispiel 2a von nahezu allen Schüler*innen gelöst wurde, konnte Aufgabe 4a von nur sehr wenigen Proband*innen korrekt ermittelt werden. Permutationsaufgaben stellten sich hierbei als jene mit der höchsten Lösungsrate dar, während Variationsaufgaben – besonders durch die Berücksichtigung der Reihenfolgen sowie einer höheren Anzahl – am schwierigsten waren. Hinsichtlich des Geschlechts der Teilnehmer*innen zeigten sich kaum Auffälligkeiten – bei einigen Testaufgaben waren die Buben leicht im Vorteil, jedoch nicht wesentlich. Weiters konnte eine Korrelation zwischen der Selbsteinschätzung in Mathematik und der tatsächlich erbrachten Leistung in der Untersuchung festgestellt werden.

In Bezug auf die zweite Forschungsfrage, welche die Lösungsstrategien sowie die Darstellungsformen von Schüler*innen der vierten Schulstufe beim Lösen von kombinatorischen Aufgaben untersucht, kann Folgendes erkannt werden: In Bezug auf die Lösungsstrategien zeigt sich, dass der intuitive Lösungsweg am häufigsten verwendet wurde, wobei dessen Erfolgsquote stark variierte. Systematische Vorgehensweisen wurden seltener gewählt, führten jedoch deutlich häufiger zu einer korrekten Lösung. Ein Rückgriff auf Vorwissen sowie die Strategie des Versuchs und Irrtums traten im Vergleich nur sporadisch auf. In Hinblick auf die Darstellungsformen dominiert das Fehlen einer konkreten Darstellung. Auffällig ist hierbei, dass dennoch in zahlreichen Fällen eine korrekte Lösung gefunden werden konnte. Dies legt nahe, dass die Proband*innen Strukturen identifizierten und mit diesen arbeiteten, diese jedoch nicht verschriftlichten. Visuelle und verbale Darstellungsformen folgten in ihrer Häufigkeit, während mathematische Repräsentationen eher selten verwendet wurden. Bei einer genaueren Analyse der Veranschaulichungen lässt sich feststellen, dass die Form dieser stark von der Aufgabenstellung abhängig war. Während Aufgaben mit grafischen Elementen häufiger visuell dargestellt wurden, führten Beispiele mit Namen in der Angabe eher zu verbalen Ausführungen. Ziffern in der Aufgabenstellung begünstigten eher mathematische Formen.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass Schüler*innen der vierten Schulstufe Kombinatorikaufgaben überwiegend intuitiv angehen, wobei die Verwendung von systematischen Strategien mit einer deutlich höheren Lösungsrate einhergeht. Die Form der Darstellung hängt oft von der Aufgabenstellung ab. Die Ergebnisse stützen sich zum Großteil mit den in den theoretischen Kapiteln dargelegten Erkenntnissen und bestätigen die vorliegende Forschung in deren Aussagekräftigkeit. Zusätzlich folgt anbei das Fazit der Masterarbeit, in dem die wesentlichen Erkenntnisse dargelegt und resümiert werden.

8 Fazit

Die vorliegende Masterarbeit fokussiert die Kombinatorik in der Primarstufe. Bis zur Lehrplanreform 2023 fand diese kaum Berücksichtigung im Unterricht der Volksschule. Erst der neue Lehrplan (2023) sieht in der dritten Schulstufe vor, dass kombinatorische Abzählaufgaben dargestellt und gelöst werden.

Die gegenständliche Arbeit verfolgt daher das Ziel, die Kombinatorik in der Primarschule näher zu beleuchten und untersucht das kombinatorische Können von Schüler*innen der vierten Schulstufe noch vor der Implementierung des neuen Lehrplans. Daher werden folgende Forschungsfragen untersucht: „**Wie lösen Schülerinnen und Schüler der vierten Schulstufe kombinatorische Aufgaben? Welche Lösungsstrategien und Darstellungsformen treten bei Schülerinnen und Schüler der vierten Schulstufe beim Lösen von kombinatorischen Aufgabenstellungen auf?“**

Um eine fundierte Grundlage zur Beantwortung dieser Fragestellungen zu schaffen, wurden zunächst anhand einer Literaturrecherche theoretische Aspekte näher beleuchtet. Die Kombinatorik hat eine hohe Alltagsrelevanz. Einfache Entscheidungen, wie die Auswahl einer Eissorte, legen kombinatorische Fragestellungen dar. Grundsätzlich verfolgt die Kombinatorik in der Volksschule zwei wesentliche Ziele. Einerseits wird ermittelt, welche Möglichkeiten es gibt und andererseits wird die Gesamtanzahl an Möglichkeiten bestimmt. Die Kombinatorik hilft dabei, alle Möglichkeiten geschickt abzuzählen. In der Fachdidaktik wird zwischen dem allgemeinen Zählprinzip sowie zwischen den kombinatorischen Figuren der Permutation, der Variation und der Kombination unterschieden. Auch wenn diese sowie ihre anwendbaren Formeln in der Grundschule keine Rolle spielen, sind sie dennoch wesentlich, insofern sie unterschiedlicher logischer Voraussetzungen und Lösungsprozesse bedürfen. Die Kombinatorik der Primarstufe fokussiert insbesondere den Lösungsprozess und zielt darauf ab, Schüler*innen zu einem systematischen Vorgehen zu führen. Hierfür soll im Sinne eines Spiralprinzips – anhand einer methodischen Progression – gearbeitet werden. Wesentlich ist zunächst ein Handeln mit Materialien auf einer enaktiven Ebene, ehe die gefundenen Möglichkeiten ikonisch, etwa mit Bildern oder Grafiken, dargestellt werden. Erst in einem weiteren Schritt empfiehlt sich ein symbolisches und abstraktes Arbeiten.

Eine Thematisierung der Kombinatorik in der Primarstufe eröffnet viele Lernchancen. Neben einer motivierenden Wirkung für Schüler*innen bietet sie vielfältige Differenzierungsmöglichkeiten, sodass Aufgabenbeispiele für jedes Kompetenzniveau angepasst werden können. Wesentlich ist auch, dass durch sie weitere allgemeine sowie inhaltliche mathematische Kompetenzen gefördert werden. Im Fokus steht hierbei immer der Lösungsprozess, welcher die Schüler*innen zu einem systematischen Denken führen soll. Für diesen können vielfältige Lösungsstrategien und Darstellungsweisen verwendet werden. Auf jene legt die Untersuchung der vorliegenden Masterarbeit ein Hauptaugenmerk.

Um die Forschungsfragen umfassend beantworten zu können, wird ein *Mixed-Methods-Ansatz* verwendet. Hierfür wurde die quantitative Methode des Testbogens mit der qualitativen Methode des *lauten Denkens* kombiniert, um so Schwächen einzelner Methoden auszugleichen und einen weitreichenden Blick zu erhalten. Basierend auf einer Sammlung praktischer Umsetzungsbeispiele der Kombinatorik in der Primarstufe, die im theoretischen Teil der Arbeit vorgestellt wurden, konnte ein Testbogen mit acht kombinatorischen Aufgaben erstellt werden. Jeweils zwei Aufgaben lassen sich dabei einer der kombinatorischen Figuren zuordnen. Diese bedürfen unterschiedlicher logischer Voraussetzungen, weshalb es wesentlich war, alle Figuren in den Testbogen zu integrieren. Neben den acht Testaufgaben, welche in unterschiedlichen Schwierigkeitsniveaus einzuordnen sind, wurden auch persönliche Daten – das Geschlecht, das Alter und die Selbsteinschätzung in Mathematik – erhoben. Die Daten des Testbogens wurden durch qualitative Daten aus dem *lauten Denken*, in welchem zufällig ausgewählte Teilnehmer*innen in der Retrospektive erneut Einblick in ihr Vorgehen baten, ergänzt. Die Forschung wurde in sieben vierten Schulstufen im Raum Waldviertel mit insgesamt 65 Schüler*innen durchgeführt.

Die Untersuchungsergebnisse bieten ein vielschichtiges Bild. Insgesamt konnte im Durchschnitt nicht ganz die Hälfte der kombinatorischen Aufgaben korrekt gelöst werden. Bei einer genaueren Betrachtung der deskriptiven Auswertung zeigt sich, dass im Mittel dreieinhalb der acht gestellten Testbeispiele adäquat modifiziert werden konnten. In der Bearbeitung einzelner Aufgaben gab es große Unterschiede. Während eine Testaufgabe von über 90% der Teilnehmer*innen gelöst wurde, konnte ein anderes Beispiel von weniger als 10% der Schüler*innen richtig bearbeitet werden. Die höchste Lösungsrate konnte bei Permutationsaufgaben erzielt werden, was sich mit den Erkenntnissen der Literaturrecherche deckt.

Bei weiteren deskriptiven Auswertungen zeigt sich, dass kaum geschlechtsspezifische Differenzen bestehen. Sowohl Buben als auch Mädchen konnten kombinatorische Aufgaben nahezu gleich gut lösen, obwohl die männlichen Teilnehmer bei einigen Beispielen etwas im Vorteil waren. Weiters kann eine positive Korrelation zwischen der Selbsteinschätzung und den erbrachten Leistungen festgestellt werden. Je besser sich die Schüler*innen in Mathematik einschätzen, desto mehr Punkte konnten sie in der vorliegenden Testung erreichen.

Bei einer genaueren Analyse der zweiten Forschungsfrage zeigt sich, dass unterschiedliche Lösungsstrategien und Darstellungsformen verwendet werden. Auffällig ist jedoch, dass viele Schüler*innen weder eine Strategie noch eine Darstellung anführten, was darauf hinweist, dass eine gewisse Unsicherheit beim Lösen kombinatorischer Aufgabenformate vorhanden ist. Es wird jedoch auch ersichtlich, dass vereinzelte Schüler*innen, welche am Testbogen keine Lösungsstrategie oder Darstellung angaben, im *lauten Denken* ihr Vorgehen systematisch beschreiben und so auch eine korrekte Lösung ermitteln konnten. Allgemein stellt sich die systematische Strategie als die am häufigsten genutzte Herangehensweise heraus. Kinder, die systematisch vorgingen – etwa durch eine Fixplatzstrategie – erzielten auch die höchste Lösungsrate. Bei den Darstellungsformen zeigt sich, dass diese stark vom Aufgabeninhalt abhängen. Visuell konkretisierte Angaben verleiten zu visuellen Darstellungen, hingegen ein Beispiel, bei welchem Ziffern vorkommen, die Zifferndarstellung hervorrücken oder Namen zur verbalen Auflistung dieser führen.

Zusammenfassend lässt sich eine Vielzahl an verwendeten Strategien und Darstellungen, aber auch an unterlaufenen Fehlern, verzeichnen. Diese Vielfalt verdeutlicht nicht nur die unterschiedlichen kognitiven Zugänge der Schüler*innen, sondern auch die Notwendigkeit einer methodischen Progression im Unterricht der Primarstufe. Ein stufenweiser Aufbau der kombinatorischen Kompetenzen erweist sich als besonders sinnvoll. Letztlich zeigen auch weitere Untersuchungen, dass nur eine Thematisierung der Kombinatorik zur Verbesserung der Leistungen führt. Schüler*innen müssen bei einfachen Aufgaben Strategien entwickeln, um komplexere Beispiele systematisch lösen zu können.

Natürlich müssen die gewonnen Erkenntnisse im Lichte einiger Einschränkungen betrachtet werden. Die Untersuchung wurde gesamt an nur sieben Schulen in einem bestimmten Gebiet, im Waldviertel durchgeführt, was die Generalisierbarkeit der Ergebnisse einschränkt.

Dennoch unterstreichen die Ergebnisse der vorliegenden Masterarbeit, wie wichtig es ist, die Kombinatorik in den Mathematikunterricht der Primarstufe bewusst zu integrieren. Sie bestätigen die didaktische Relevanz der Implementierung des Themenbereichs in den neuen Lehrplan (2023) und unterstreicht das Potential, welches in einer frühen Förderung des kombinatorischen Denkens liegt. Weiterführend können Forschungen, nachdem sich die Kombinatorik im Unterricht der Volksschule implementiert hat, untersuchen, inwiefern sich das kombinatorische Können sowie die verwendeten Strategien und Darstellungen verändert haben. Es wird entscheidend sein, den künftigen Mathematikunterricht so zu gestalten, dass dieser auch den neuen Lehrplanbereich der Kombinatorik fördert.

9 Literaturverzeichnis

Apfler, S., Musilek, M., & Summer, A. (2023). Zufällig Mathematik: Daten, Wahrscheinlichkeit und Kombinatorik für die Grundschule handlungsorientiert aufbereitet. *R&E-SOURCE*, *10*(2), 4–11. https://doi.org/10.53349/resource.2023.i2.a1169

Baack, W. (2013). *Alles Zufall? Datenerfassung, Kombinatorik und Wahrscheinlichkeit. Eine Lernwerkstatt für Klasse 3-4*. Lernbiene.

Berger, P. (2023). *Kombinatorik: Einführung in die Theorie des intelligenten Zählens*. Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-67396-6

Bettner, M., & Dinges, E. (2018). *Stochastik in der Grundschule: Kombinieren, schätzen, Daten erfassen und auswerten* (7. Auflage). Persen.

BIFI & BMUK (Hrsg.). (2011). *Praxishandbuch für „Mathematik", 4. Schulstufe* (2., durchges. und erw. Aufl., überarb. Neuausg.). Leykam. https://www.bifie.at/node/370

BIFI & BMUK (Hrsg.). (2013). *Themenheft Mathematik „Problemlösen" Volksschule Grundstufe I + II*. Leykam.

Bilandzic, H. (2017). Lautes Denken. In L. Mikos & C. Wegener (Hrsg.), *Qualitative Medienforschung: Ein Handbuch* (2., völlig überarbeitete und erweiterte Auflage). UVK Verlagsgesellschaft mbH.

BMBWF. (o. J.). *Volksschul-Lehrplan*. Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung. Abgerufen 11. Januar 2025, von https://www.bmbwf.gv.at/Themen/schule/schulpraxis/lp/lp_vs.html

BMBWF. (2023). *Lehrplan der Volksschule. BGB1. II Nr. 1/2023, Anlage A zu Artikel 1*.

Boesten, J. (2014). *Daten, Wahrscheinlichkeit und Kombinatorik 1/2. Handlungsorientierte Übungsaufgaben mit Lösungen*. Verlag an der Ruhr.

Bortz, J., & Döring, N. (2006). *Forschungsmethoden und Evaluation: Für Human- und Sozialwissenschaftler; mit 87 Tabellen* (4., überarb. Aufl.). Springer-Medizin-Verl.

Breiter, E., Pfeil, C., & Neubert, B. (2009). Welche Möglichkeiten gibt es und wie viele? Kombinatorische Überlegungen in der Vorweihnachtszeit. *Praxis Grundschule*, *6*, 53–56.

Büchter, A., & Henn, H.-W. (2007). *Elementare Stochastik: Eine Einführung in die Mathematik der Daten und des Zufalls* (2., überarbeitete und erweiterte Auflage). Springer.

Büchter, A., & Padberg, F. (Hrsg.). (2019). *Einführung in die Arithmetik: Primarstufe und Sekundarstufe* (3., überarbeitete und erweiterte Auflage). Springer Spektrum.

Eichhorn, K. (2024). *Mit Kombinatorik durch das Schuljahr: Aufgaben mit Spaß zum Entdecken, Erproben und Darstellen von Möglichkeiten - Klasse 1-4* (1. Auflage). Auer.

Gläser-Zikuda, M., Seidel, T., Rohlfs, C., Gröschner, A., & Ziegelbauer, S. (2012). Mixed-Methods in der empirischen Bildungsforschung—Eine Einführung in die Thematik. In *Mixed methods in der empirischen Bildungsforschung*. Waxmann.

Haftendorn, D. (2011). *Mathematik sehen und verstehen: Schlüssel zur Welt* (Korrigierter Nachdruck). Spektrum.

Herzog, M., Ehlert, A., & Fritz, A. (2017). Kombinatorikaufgaben in der dritten Grundschulklasse: Darstellung, Abstraktionsgrad und Strategieeinsatz als Einflussfaktoren auf die Lösungsgüte. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *38*(2), 263–289. https://doi.org/10.1007/s13138-017-0118-8

Höveler, K. (2014). *Das Lösen kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme—Eine Untersuchung zu den Strukturierungs- und Zählstrategien von Drittklässlern*. TU Dortmund. http://hdl.handle.net/2003/33604

Huhmann, T. (2020). Wie viele? Von wie vielen? *Grundschulmagazin*, *05*.

Hussy, W., Schreier, M., & Echterhoff, G. (2013). *Forschungsmethoden in Psychologie und Sozialwissenschaften für Bachelor* (2. Aufl.). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-34362-9

Kipman, U. (2015). Kombinatorik in der (Grund) Schule. Problemkompetenzen früh und spielerisch fördern. *PH Script*, *8*, 54–67.

Kipman, U. (2018). *Problemlösen: Begriff – Strategien – Einflussgrößen – Unterricht – (häusliche) Förderung*. Springer Gabler.

Klunter, M., & Raudies, M. (2010). So ein Zirkus! Wie lösen Kinder mit unterschiedlicher Leistungsfähigkeit kombinatorische Aufgaben? *Grundschule*, *42*(5), 30–32.

Klunter, M., Raudies, M., & Veith, U. (2020a). *Daten, Zufall und Unterrichtsideen zum Beobachten und Kombinieren für die Klassen 1 und 2* (A 4). Westermann.

Klunter, M., Raudies, M., & Veith, U. (2020b). *Daten, Zufall und Wahrscheinlichkeit. Unterrichtsideen zum Beobachten und Kombinieren für die Klassen 3 und 4* (1 Aufl.). Westermann.

Konrad, K. (2020). Lautes Denken. In G. Mey & K. Mruck (Hrsg.), *Handbuch Qualitative Forschung in der Psychologie: Band 2: Designs und Verfahren* (S. 373–393). Springer.

Kortenkamp, U., & Kuze, A. (2023). *Didaktischer Kommentar von Prof. Kortenkamp und Prof. Kuze. Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht. Leitidee „Daten und Zufall“*. Bildungsserver Berlin-Brandenburg. https://s.bsbb.eu/leitidee5001

Krauthausen, G. (2018). *Einführung in die Mathematikdidaktik – Grundschule* (4.). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-54692-5

Krüger, K.-H. (2020). *Grundwissen Stochastik* (1. Auflage). UVK Verlag.

Kütting, H., & Sauer, M. J. (2011). *Elementare Stochastik: Mathematische Grundlagen und didaktische Konzepte* (3.). Spektrum Akademischer Verlag.

Lace, G. (2008). *Von den Schülern gewählten Strategien für die Lösung der Problemaufgaben in der Kombinatorik*. https://doi.org/10.17877/DE290R-11538

Mayring, P. (2015). *Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken* (12., vollständig überarbeitete und aktualisierte Aufl). Beltz.

Mayring, P. (2020). Qualitative Inhaltsanalyse. In G. Mey & K. Mruck (Hrsg.), *Handbuch Qualitative Forschung in der Psychologie: Band 2: Designs und Verfahren* (2., erweiterte und überarbeitete Auflage, S. 495–512). Springer.

Meersmann, W. (Hrsg.). (1998). *Mathematiklexikon: Kompaktwissen für Schüler und junge Erwachsene* (5.). Cornelsen Scriptor.

Mende, U. (2020). *Grundlagen der Kombinatorik*. https://mathe-gut-erklaert.de/pdfs/000_Kombinatorik.pdf

Musilek, M., Apfler, S., & Summer, A. (2023). Daten, Wahrscheinlichkeit und Kombinatorik (DaWaKo) in der Primarstufe. Eine deskriptive Untersuchung zum fachlichen und methodisch-didaktischen Vorwissen von angehenden Lehrpersonen. In C. Fridrich, B. Herzog-Punzenberger, H. Knecht, N. Kraker, P. Riegler, & G. Wagner (Hrsg.), *PH Wien—Forschungsperspektiven* (S. 81–96). LIT. https://doi.org/10.52038/978364351139_7

Neubert, B. (Hrsg.). (2019a). Kombinatorik im Mathematikunterricht der Grundschule—Beispiele. In *Kombinatorik. Aufgabenbeispiele und Impulse für die Grundschule*. Mildenberger.

Neubert, B. (Hrsg.). (2019b). Kombinatorik im Mathematikunterricht der Grundschule—Didaktisch-methodische Überlegungen. In *Kombinatorik. Aufgabenbeispiele und Impulse für die Grundschule*. Mildenberger.

Neubert, B. (Hrsg.). (2019c). Was ist Kombinatorik? - Mathematischer Hintergrund. In *Kombinatorik. Aufgabenbeispiele und Impulse für die Grundschule*. Mildenberger.

Neubert, B. (Hrsg.). (2019d). Was ist Kombinatorik? Historischer Hintergrund. In *Kombinatorik. Aufgabenbeispiele und Impulse für die Grundschule*. Mildenberger.

Neubert, B. (2024). Gute Aufgaben zur Kombinatorik in der Grundschule. In S. Ruwisch & A. Peter-Kopp (Hrsg.), *Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule* (10. Aufl.). Mildenberger.

Quak, U. (2010). *60 Unterrichtsideen für Mathematik*. Cornelsen Scriptor.

Reiss, K., & Hammer, C. (2013). *Grundlagen der Mathematikdidaktik: Eine Einführung für den Unterricht in der Sekundarstufe*. Birkhäuser.

Rolles, G., & Bossek, H. (Hrsg.). (2005). *Mathematik. Basiswissen Schule* (2., aktualisierte Aufl.). Duden Paetec Schulbuchverlag & Dudenverlag.

Sandmann, A. (2014). Lautes Denken—Die Analyse von Denk-, Lern- und Problemlöseprozessen. In D. Krüger, I. Parchmann, & H. Schecker (Hrsg.), *Methoden in der naturwissenschaftsdidaktischen Forschung* (S. 179–188). Springer Spektrum.

Schipper, W. (2023). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen* (Druck A). Schroedel, Westermann.

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2019a). *Handbuch für den Mathematikunterricht. 1. Schuljahr* (Druck A3). Schroedel Westermann.

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2019b). *Handbuch für den Mathematikunterricht. 3. Schuljahr* (Druck A 3). Schroedel Westermann.

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2021a). *Handbuch für den Mathematikunterricht. 2. Schuljahr* (Druck A 5). Schroedel, Westermann.

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2021b). *Handbuch für den Mathematikunterricht. 4. Schuljahr* (Druck A 3). Schroedel, Westermann.

Schmidt, J. (2015). *Basiswissen Mathematik: Der smarte Einstieg in die Mathematikausbildung an Hochschulen* (2. Auflage). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-43546-5

Selter, C., & Spiegel, H. (2004). Zählen, ohne zu zählen. In G. N. Müller & P. Bender (Hrsg.), *Arithmetik als Prozess* (2. Aufl). Kallmeyer mit Klett bei Friedrich in Velber.

Sill, H.-D., & Kurtzmann, G. S. (2019). *Didaktik der Stochastik in der Primarstufe* (F. Padberg & A. Büchter, Hrsg.). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-59268-7

Sturm, N., & Huhmann, T. (2022). Kombinatorik meets Wahrscheinlichkeit. Ausgehend vom Denken in Möglichkeiten das Denken in Wahrscheinlichkeiten anbahnen—Und zwar von Anfang an. *Grundschulmagazin*, *05*.

Tittmann, P. (2019). *Einführung in die Kombinatorik* (3. Auflage). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-58921-2

Ulm, V. (2010). *Stochastik in der Grundschule. Tagung der Regionalkoordinatoren von „SINUS an Grundschulen" in Augsburg am 11. Mai 2010*. http://www.sinus-an-grundschulen.de/downloads/media/Workshop_Ulm_Stochastik.pdf

Weber, K., & Ott, D. (2022). Neue Blumen für den Vorgarten. Zusammenhänge und Strukturen kombinatorischer Aufgaben. *Grundschulmagazin*, *05*.

Wolf, W. (Hrsg.). (2018). *Lehrplan der Volksschule (BGBl. Nr. 134/1963 in der Fassung BGBl. II Nr. 261/2015): Mit Anmerkungen und Ergänzungen* (Stand: 1. Jänner 2018). Leykam.

10 Anhang

10.1 Genehmigung der Durchführung einer wissenschaftlichen Erhebung

Bildungsdirektion Niederösterreich

bildung-noe.gv.at

Pädagogischer Dienst
Bildungsregion 1
Außenstelle Zwettl

HR Alfred Grünstäudl,
Leiter der Bildungsregion 1

office@bildung-noe.gv.at
+43 2742 280 9100
Rennbahnstraße 29, 3109 St. Pölten

Antwortschreiben bitte unter Anführung der Geschäftszahl:
I/S- 420/3452-2025

Ihr Zeichen: -

29.01.2025

Frau
Stefanie Maria Hartl
Per Mail:

stefanie1.hartl@kphvie.ac.at

Genehmigung der Durchführung einer wissenschaftlichen Erhebung

Die Bildungsdirektion für Niederösterreich genehmigt die Durchführung der vorgelegten Untersuchung im Rahmen Ihrer Masterarbeit zum Thema „Kombinatorik in der Primarstufe“.

Aus datenschutzrechtlicher Sicht besteht kein Einwand.

Für den Bildungsdirektor:
HR Alfred Grünstäudl
Leiter der Bildungsregion 1

Elektronisch gefertigt

Signaturwert	b00126298f5a4610b2187224006e5242	
REPUBLIK ÖSTERREICH Bildungsdirektion für Niederösterreich Amtssignatur	Unterzeichner	Bildungsdirektion für Niederösterreich
	Datum/Zeit-UTC	02.02.2025 12:27:29
	Aussteller-Zertifikat	CN=a-sign-corporate-07, OU=a-sign-corporate-07, O=A-Trust Ges. f. Sicherheitssysteme im elektr. Datenverkehr GmbH, C=AT
	Serien-Nr.	882422936063
Prüfinformation	Dieses Dokument wurde amtssigniert. Informationen zur Prüfung der elektronischen Signatur finden Sie unter: http://www.a-trust.at/pdfverify/. Informationen zur Prüfung des Ausdrucks finden Sie unter: http://www.a-trust.at/pdfverify/	
Hinweis	Dieses Dokument wurde amtssigniert. Auch ein Ausdruck dieses Dokuments hat gemäß § 20 E-Government-Gesetz die Beweiskraft einer öffentlichen Urkunde.	

10.2 Einverständniserklärung Eltern

EINVERSTÄNDNISERKLÄRUNG

Vor- und Nachname des Kindes: ___________________________

Vor- und Nachname des/der Erziehungsberechtigten: ___________________________

Hiermit erkläre ich mich als Erziehungsberechtigte/r mit den folgenden Punkten einverstanden:

1. Teilnahme am Testbogen:
   ☐ Ich bin mit der Teilnahme meines Kindes am Testbogen einverstanden.
   ☐ Ich bin mit der Teilnahme meines Kindes am Testbogen nicht einverstanden.

2. Teilnahme am Einzelgespräch:
   ☐ Ich bin mit der Teilnahme meines Kindes am Einzelgespräch einverstanden.
   ☐ Ich bin mit der Teilnahme meines Kindes am Einzelgespräch nicht einverstanden.

Die erhobenen Daten werden vertraulich behandelt und ausschließlich in meiner Masterarbeit in anonymisierter Form veröffentlicht.

Vielen Dank für Ihre Mithilfe!

Datum: ____________ Unterschrift: ___________________________

10.3 Eigenständigkeitserklärung

„Ich erkläre, dass ich die vorliegende Masterarbeit selbst verfasst habe und dass ich dazu keine anderen als die angeführten Hilfsmittel verwendet habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten und nicht veröffentlichten Publikationen entnommen sind, sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit wurde in gleicher oder ähnlicher Form weder im Innoch im Ausland in irgendeiner Form als Prüfungsarbeit vorgelegt."

Hartl Stefanie

Ludweis, 4. Mai 2025