

Markus Kapplmüller & Edith Lindenbauer

Von Spielwürfeln und Stolpersteinen

*Ein kritischer Blick auf die individuellen Wahrscheinlichkeitskonzepte
angehender Mathematiklehrkräfte*

Zusammenfassung

Die fachdidaktische Literatur setzt sich eingehend mit den zahlreichen Paradoxa der schulischen Wahrscheinlichkeitsrechnung auseinander und misst der Beforschung trügerischer Intuitionen, Heuristiken und Fehlvorstellungen hohe Bedeutung bei. Dennoch hegen viele Lehrkräfte trotz akademischer Ausbildung derart problematische Konzepte. Der Artikel präsentiert eine qualitative Fallstudie mit vier angehenden Mathematiklehrer:innen der Sekundarstufe (diagnostischer Test, Think-Aloud-Interviews) zur Analyse stochastischer Denkmuster und diskutiert diese auf empirischer sowie theoretischer Basis. Die Studie legt nahe, dass isoliertes formales Wissen nicht vor Trugschlüssen schützt, wenn dieses unzureichend vernetzt ist und daher in konkreten Problemsituationen von intuitiven Vorstellungen überlagert wird.

Auf prominenten Irrwegen

Zwei herkömmliche Würfel und eine vermeintlich triviale Frage reichten aus, um den brillanten Geist eines Gottfried Wilhelm Leibniz (1676–1716) in die Irre zu führen: „Mit zwei Würfeln ist es gleich wahrscheinlich, die Augensumme zwölf zu werfen wie die Augensumme elf, denn das eine wie das andere kann nur auf eine Weise geschehen“ (Leibniz, 1768, zit. n. Gorroochurn, 2011, S. 250). Dass Leibniz' herausragendes mathematisches Verständnis ihn nicht vor diesem Trugschluss bewahrte, ist bezeichnend für die besondere, oft wenig vertraute Art des Denkens, das uns die Wahrscheinlichkeitsrechnung abverlangt – das stochastische Denken (Batanero et al., 2016).

Warum ist eine bestimmte Augensumme beim Würfelspiel wahrscheinlicher als eine andere, obwohl beide völlig zufällig auftreten? Warum ist der fünfte Sechser in Folge gleich wahrscheinlich wie der vierte, obwohl Serien gleicher Augenzahlen doch die Ausnahme bilden? Viele Befunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung wirken auf den ersten Blick gegensätzlich zu unserer Erfahrungswelt (Devlin, 2014). In kaum einer anderen mathematischen Subdisziplin sehen wir uns bereits auf Pflichtschulniveau mit einer solchen Fülle kontraintuitiver Resultate und Paradoxa konfrontiert (Batanero & Sanchez, 2005; Borovcnik & Kapadia, 2014; Batanero et al., 2016). Neben Lernenden tragen jedoch auch viele (angehende) Lehrende problematische Vorstellungen von Wahrscheinlichkeit und Zufall mit sich (Nilsson & Lindström, 2013; Batanero et al., 2014).

Der Lehrplan der Sekundarstufe I sieht ab der siebten Schulstufe die Arbeit mit Wahrscheinlichkeiten vor. Der Wahrscheinlichkeitsbegriff soll „ausgehend vom alltäglichen Sprachgebrauch von ‚wahrscheinlich‘ intuitiv entwickelt“ (BMBWF, 2025) werden. In Fischbeins (1975) Pionierarbeiten zum stochastischen Denken werden Intuitionen als vermeintlich evidente

Überzeugungen beschrieben, deren Berücksichtigung in der individuellen Entwicklung stochastischer Konzepte unumgänglich sei. Dazu müssten Lernende jedoch gezielt mit Situationen konfrontiert werden, die zum Hinterfragen und Aufbrechen vorhandener fälschlicher Intuitionen anregen. Gerade die unterschiedlichen Bedeutungen grundlegender Begriffe wie Möglichkeit, Wahrscheinlichkeit oder Zufall in alltäglicher und mathematischer Sprache bedürfen einer gründlichen Herausarbeitung (Nacarato & Grando, 2014). Angesichts des im Lehrplan gewählten Wortlautes sei daher vor einem unreflektierten Aufbau mathematischer Konzepte auf ‚mitgeschleppten‘ Intuitionen gewarnt, da ein solcher die Entwicklung von Fehlvorstellungen begünstigen kann (Batanero & Sanchez, 2005). Erst einmal gefestigt, haben sich Fehlvorstellungen bei Lernenden aller Altersgruppen und Bildungssektoren als äußerst robust gegenüber schulischer Bildung erwiesen (Wolpers & Götz, 2002). Intuitionen bilden daher sowohl Notwendigkeit als auch Hürde am Weg zu einem mathematisch fundierten Verständnis von Wahrscheinlichkeit.

An den folgenden Literaturbericht knüpft die Präsentation und Diskussion ausgewählter Resultate einer Interviewstudie mit vier Lehramtsstudierenden der Sekundarstufe am Ende ihrer Ausbildung, die im Rahmen der Masterarbeit von Kapplmüller (2024) erzielt wurden. Die Studie untersucht anhand konkreter stochastischer Problemstellungen, inwieweit angehende Lehrer:innen von Intuitionen und Heuristiken (fehl-) geleitet werden.

Literaturüberblick

Wer sich zum Ziel setzt, Lehrer:innen-Wissen in einem speziellen Teilbereich der Schulmathematik zu untersuchen, kommt an einer Frage nicht vorbei: Ist das fachliche Wissen von Lehrkräften maßgeblich für den Lernerfolg von Schüler:innen? Hatties (2009) prominente Metastudie weist der Lehrperson äußerst hohen Einfluss auf den Lernerfolg zu. Verglichen mit einflussreichen Faktoren (z. B. Lehrer:in-Schüler:innen-Beziehung) spiele die fachliche Expertise aber nur eine marginale Rolle. Insgesamt liefert die Forschung hinsichtlich der Relevanz von Fachwissen jedoch ein diffuses Bild (Blömeke et al., 2022).

Die empirische Perspektive

Nennenswert scheint hierbei die groß angelegte COACTIV-Studie (Baumert et al., 2011), die einen sehr deutlichen Effekt des fachdidaktischen Wissens von Lehrkräften (Pedagogical Content Knowledge, PCK) sowohl auf die kognitive Aktivierung als auch auf die individuelle Förderung von Schüler:innen und damit auf die Unterrichtsqualität zeigt. Für das Fachwissen (Content Knowledge, CK) waren keine derart starken Effekte nachweisbar. Sollten daher fachmathematische Inhalte (CK) aus wissenschaftlicher Sicht zugunsten einer noch intensiveren fachdidaktischen Lehre (PCK) aus den universitären Curricula weichen? Akribische Analysen wie jene von Blömeke et al. (2022) legen nahe, dass CK durchaus positiv auf den Lernzuwachs von Schüler:innen wirkt. Die quantitative Messung dieser Effekte setzt jedoch die Berücksichtigung der entsprechenden Mediatoren voraus, darunter PCK und Brückenkompetenzen wie die sogenannten PID-Skills (Perception, Interpretation, Decision-making). Dies spricht dafür, dass die Annahme eines geringen oder nicht vorhandenen Einflusses von CK auf den Lernzuwachs von Schüler:innen auf einer vereinfachten Interpretation quantitativer Ergebnisse beruht (Baumert et al., 2010; Blömeke et al., 2022).

Die theoretische Perspektive

Aufbauend auf Shulmans (1986) Einteilung in CK und PCK entwickeln Ball et al. (2008) das inzwischen vielfach verwendete Modell zum Mathematical Knowledge for Teaching (MKT). Eine theoretische Fundierung des Lehrer:innen-Wissens speziell in der Wahrscheinlichkeitsrechnung erfolgt erstmalig durch Elbeharys (2022) Modell Mathematics Teachers' Professional Knowledge for Teaching Probability from the Perspective of Probabilistic Reasoning (MKT-P). Diese Spezialisierung ergänzt die Arbeit von Ball et al. (2008) um etablierte Ansätze und didaktische Erkenntnisse zur Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Elbeharys (2022) Modell (Abb. 1) besteht aus den Ebenen Knowledge for Practice (fachliche Linse) und Knowledge in Practice (kognitionspsychologische Linse). Während die erste Ebene das intersubjektive formale Wissen (Büchter & Leuders, 2009) zur Wahrscheinlichkeitsrechnung umfasst, bildet die zweite Ebene jene mentalen Konzepte ab, die jede Lehrkraft für sich herausbildet und stetig weiterentwickelt. Diese individuellen Konzepte sind nie völlig deckungsgleich mit dem idealen Knowledge for Practice und enthalten in aller Regel auch Fehlvorstellungen und verzerrte Auffassungen (engl. Biases). Den für die Unterrichtspraxis essentiellen Prozess des Verknüpfens beider Wissens Ebenen bezeichnet Elbehary (2022) als stochastisches Denken (Probabilistic Reasoning).

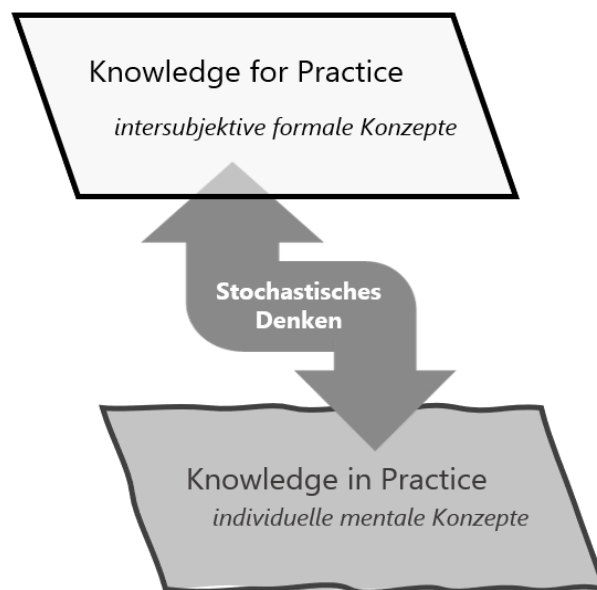


Abb. 9: Adaptierter Ausschnitt aus dem MKT-P-Modell nach Elbehary (2022)

Die fachdidaktische Perspektive

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung setzen sich Lernende mit vielfältigen Situationen auseinander, deren Ausgänge durch den Zufall bestimmt sind. Von zufälligen Ausgängen ist dann die Rede, wenn diese wegen Informationsmangel oder einem zu komplexen („unberechenbaren“) Zusammenspiel verschiedener Variablen nicht oder kaum vorhersehbar sind (Wetterereignisse, radioaktiver Zerfall, etc.) (Savard, 2014). Stochastische Gesetze ermöglichen in derartigen Situationen eine rationale Einschätzung von Wahrscheinlichkeiten, die kausale Denkweisen allein nicht zulassen (Devlin, 2014).

Anstatt auf stochastische Methoden greifen Menschen jedoch häufig auf Intuitionen und Heuristiken (intuitive, informelle Lösungsmuster) zurück (Batanero & Sanchez, 2005; Batanero &

Borovcnik, 2016). Heuristische Zugänge sind im Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht nur unter Schüler:innen aller Altersstufen besonders verbreitet, sondern auch unter Studierenden und Absolvent:innen einschlägiger Studienrichtungen (Nilsson & Lindström, 2013; Batanero et al., 2014). Die Literatur berichtet, dass stochastische Fehlvorstellungen formaler Bildung oft hartnäckig vom primären bis zum tertiären Bildungsbereich trotzen (Wolpers & Götz, 2002; Borovcnik, 2016). Im Folgenden werden zwei verbreitete Heuristiken bzw. Biases kurz umrissen.

Einer dieser problematischen Zugänge ist bekannt als *Representativeness* (Batanero & Borovcnik, 2016) und tritt auf, wenn es Wahrscheinlichkeiten in Situationen einzuschätzen gilt, die als mehrstufige Laplace-Experimente modelliert werden können. Dies ist dann der Fall, wenn mehrere gleichartige Zufallsexperimente hintereinander ausgeführt werden, wobei sämtliche Versuchsausgänge gleich wahrscheinlich sind. Wird beispielsweise eine faire Münze mit den Seiten Kopf (*K*) und Zahl (*Z*) fünf Mal hintereinander geworfen, so halten viele Menschen den chronologischen Ausgang (*Z, K, Z, Z, K*) für wahrscheinlicher als (*K, K, K, K, K*), da ersterer die Gesamtheit der möglichen Ausgänge ihres Empfindens besser ‚repräsentiere‘ (Batanero & Sanchez, 2005). Tatsächlich aber treten alle möglichen Konstellationen mit exakt gleicher Wahrscheinlichkeit auf. Verwandt dazu ist jener Trugschluss (*Gambler's Fallacy*) wonach es unwahrscheinlich sei, dass eine Münze auf Kopf fällt, nachdem sie bereits mehrmals in Serie auf Kopf gefallen war (Jones & Thornton, 2005).

Auch der *Equiprobability Bias* (Lecoutre, 1992) bezieht sich auf mehrstufige Laplace-Experimente. Ist etwa beim Wurf zweier fairer Würfel die Wahrscheinlichkeit für die Augensumme 11 mit jener für die Augensumme 12 zu vergleichen, so wird beiden Ergebnissen oft fälschlicherweise gleiche Wahrscheinlichkeit zugeschrieben. Dabei wird übersehen, dass das erste Ergebnis durch zwei Versuchsausgänge realisiert werden kann, das zweite Ergebnis hingegen nur durch einen.

Forschungsdesign

Die in diesem Artikel präsentierten Ergebnisse sind ausgewählte Teilresultate einer qualitativen Fallstudie von Kapplmüller (2024). Aufbauend auf dem oben ausgeführten theoretischen Rahmen wurden vier Lehramtsstudierende im letzten Semester ihres Masterstudiums zur Offenlegung ihrer mentalen Wahrscheinlichkeitskonzepte angeregt. Voraussetzung für die Teilnahme war die Absolvierung aller Pflichtlehrveranstaltungen aus dem Bereich Stochastik. Die Proband:innen, weiblich und männlich in gleichem Verhältnis, befanden sich alle im Alter zwischen 23 und 26 Jahren.

Den Impuls zur Aktivierung ihres Knowledge in Practice bildete ein diagnostischer Paper Pencil Test, eigens entwickelt auf Basis eingehender Literaturrecherche. Er umfasste sieben typischen Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung der Sekundarstufe (Begriffsdefinition von „Wahrscheinlichkeit“; mehrstufige Laplace-Experimente mit ein- und mehrelementigen Ereignissen; Vergleich von zufälligen und pseudozufälligen Ereignissen; bedingte Wahrscheinlichkeiten), in manchen Fällen ergänzt durch fiktive Lösungsversuche von Schüler:innen (z. B. Abb. 2). Die Proband:innen mussten die gestellten Aufgaben spontan lösen, schüler:innen-gerecht erklären und, sofern vorhanden, die fiktiven Lösungsversuche nachvollziehen und beurteilen. Gemäß dem Think-Aloud-Prinzip waren die Befragten aufgefordert, ihre Denkprozesse während der Durchführung zu verbalisieren. Ein halbstrukturiertes Interview diente der Vertiefung und Ausschärfung der verbalisierten Gedanken.

Methodisch angelehnt an Schwarz (2015), erfolgte die Auswertung des audiovisuellen Datenmaterials (Mitschriften, Kommentare, etc.) in zwei Schritten durch eine evaluative sowie eine inhaltlich strukturierende Inhaltsanalyse (Kuckartz, 2016).

Es folgen zwei ausgewählte Problemstellungen des diagnostischen Tests. Wie auch die übrigen Aufgaben, sind diese im Lehrplan der Sekundarstufe zu verorten. Die erste, angelehnt an Kahneman und Tversky (1972), rief in vergangenen Untersuchungen häufig den Representativeness Bias hervor.

Problemstellung 1: Angenommen, von allen Familien mit sechs Kindern einer Großstadt wird eine Familie zufällig ausgewählt. Welche geordnete Kinderkonstellation (beginnend mit dem ältesten Kind) ist am wahrscheinlichsten?

- a) M W M W M W
- b) W W W M M M
- c) W M W M M W
- d) M M M M M W
- e) Mehrere der gegebenen Konstellationen sind gleich wahrscheinlich.
- f) Es kann keine Aussage über die Wahrscheinlichkeiten der Kinderkonstellation getroffen werden.

Unter der vereinfachten Annahme, dass Kinder der beiden biologischen Geschlechter mit gleicher Wahrscheinlichkeit geboren werden, kann das Problem als Laplace-Experiment mit $\Omega := \{(a_1, \dots, a_6) \mid a_i \in \{M, W\} \text{ für } i = 1, \dots, 6\}$ und $|\Omega| = |\text{Var}_6^2(mW)| = 2^6 = 64$ dargestellt werden. Demnach gilt für jede Geschlechterkonstellation, jeweils repräsentiert durch ein sechsstelliges Tupel aus Ω , die gleiche a-priori-Wahrscheinlichkeit $P = \frac{1}{64}$. Folglich ist Antwort (e) korrekt. Das empirisch belegte marginale Übergewicht männlicher Geburten (Tafuro & Guilmoto, 2020) bleibt hier zugunsten einer simplen Modellierung außer Acht.

Bei der zweiten Problemstellung, unter anderem verwendet von Batanero und Sanchez (2005), handelt es sich um die eingangs erwähnte prototypische Aufgabe zum doppelten Würfelwurf. Erfahrungsgemäß tritt hier der *Equiprobability Bias* vermehrt zum Vorschein.

Problemstellung 2: Wir nehmen an, es werden zwei faire Würfel gleichzeitig geworfen. Welches der folgenden beiden Ereignisse ist wahrscheinlicher?

- a) Es werden 5 und 6 gewürfelt.
- b) Es wird zwei Mal 6 gewürfelt.
- c) Die Versuchsausgänge in (a) und (b) sind gleich wahrscheinlich.
- d) Es kann keine Aussage über die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse getroffen werden.

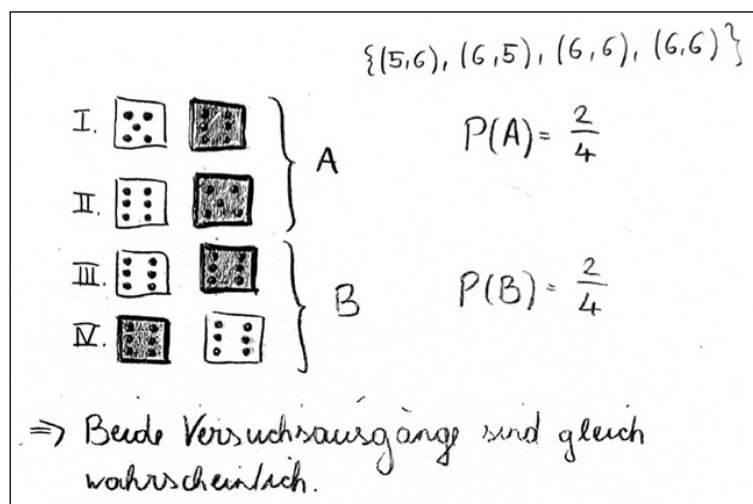


Abb. 2: Fiktiver Lösungsversuch als Teil des diagnostischen Tests

Formal kann auch diese Situation mithilfe eines laplaceschen Wahrscheinlichkeitsraums modelliert werden mit $\Omega := \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), \dots, (6,6)\}$, $|\Omega| = |\text{Var}_2^6(mW)| = 36$ und $P(\{(i,j)\}) = \frac{1}{36}$ für alle $(i,j) \in \Omega$. Eine solche Modellierung ist sinnvoll, unabhängig davon, ob die beiden Würfel gleichzeitig oder hintereinander geworfen werden. Gemäß unserer Modellierung besteht der in (a) beschriebene Versuchsausgang aus den zwei Elementarereignissen $(5,6)$ und $(6,5)$. Aufgrund der Laplace-Formel (Wahrscheinlichkeit als Verhältnis von günstigen zu möglichen Fällen) und der Additionsregel ergibt sich dafür eine Wahrscheinlichkeit von $P(\{(5,6), (6,5)\}) = \frac{2}{36}$. Der in (b) beschriebene Versuchsausgang umfasst hingegen nur das Elementarereignis $(6,6)$, woraus sich die niedrigere Wahrscheinlichkeit $P(\{(6,6)\}) = \frac{1}{36}$ ergibt.

Ergebnisse

Als nächstes werden relevante Überlegungen der Befragten zu obigen Aufgaben dargelegt und im Anschluss mit Bezug auf bestehende Erkenntnisse diskutiert. Der Interviewer (I) forderte die Proband:innen (P1–P4) dazu auf, sich in ihre zukünftige Rolle als Lehrkräfte zu versetzen und die Aufgaben entsprechend zu lösen und zu erklären.

Zur ersten Problemstellung

Alle Proband:innen beantworten die Aufgabe ad hoc richtig und schreiben allen Elementarereignissen die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{64}$ zu. Zudem weisen drei der vier Befragten richtigerweise darauf hin, dass für eine exakte Aussage die empirischen Wahrscheinlichkeiten für die Geburten von Mädchen und Buben notwendig wären. Die Proband:innen wurden darüber hinaus um ihre Einschätzungen gebeten, wie Lernende auf die Problemstellung reagieren könnten.

I: Was würden wohl Schüler:innen hier ankreuzen?

P1: Die ersten drei [Antwortmöglichkeiten] auf jeden Fall. Wenn nicht sogar das erste am meisten. [...] Weil sie sich vielleicht denken, dass es heißt: Das erste ist ein Bub, darum muss das zweite ein Mädchen sein, weil die Wahrscheinlichkeit ja 50:50 ist.

Des Weiteren gehen die Befragten einheitlich davon aus, dass Serien von Geburten gleichen Geschlechts zu Unrecht als unwahrscheinlich angesehen werden.

I: Was würden Schüler:innen als am unwahrscheinlichsten erachten?

P4: Am unwahrscheinlichsten vermutlich Antwort (d), wo so oft hintereinander männlich kommt. [...] Weil ich glaube, dass sie denken, dass es sich immer abwechselt und dass nicht so oft hintereinander männlich kommen kann.

P3: Ich glaube, dass z. B. der Fall (d) ganz viele Schüler:innen aus dem Konzept wirft, weil die subjektive Einschätzung von Wahrscheinlichkeiten oft so ist, dass es sehr unwahrscheinlich ist, dass ganz oft hintereinander derselbe Fall eintritt.

Demnach geht neben sachgemäßen Lösungen aus den dargelegten Aussagen auch ein adäquates Bewusstsein über potentielle Fehlvorstellungen bei Lernenden hervor.

Zur zweiten Problemstellung

Die Befragung zum doppelten Würfelwurf ergibt ein deutlich differenzierteres Bild. P3 demonstriert ein Lösungsverfahren, das abgesehen von vereinzelt Schwierigkeiten bei der Notation weitgehend der dargelegten Musterlösung entspricht. P2 vernachlässigt zwar die formale Modellierung des Grundraumes, argumentiert jedoch ebenso im Sinne der Laplace-Formel.

P2: Man hat den ersten und den zweiten Würfel. Dann müssen beim Ereignis in (b) der erste und der zweite Würfel beide 6 sein, aber in (a) quasi muss der erste Würfel 5 oder 6 sein und der andere Würfel halt dann dementsprechend 6 oder 5. Also kommen von allen möglichen Würfeln in (a) zwei infrage und in (b) nur einer. Also ist das Ereignis in (a) wahrscheinlicher.

Unter Anwendung der Additions- und Multiplikationsregel berechnet P2 in weiterer Folge die korrekten Wahrscheinlichkeiten.

P1 verschriftlicht den Grundraum „ $\{(1, 1), (1, 2), \dots, (5, 6), (6, 6)\}$ “, missachtet dabei jedoch sämtliche ‚gespiegelten‘ Paare, darunter auch den relevanten Versuchsausgang $(6, 5)$ und geht am Ende fälschlicherweise davon aus, dass die Wahrscheinlichkeiten über diesem Grundraum gleichverteilt seien. Dies führt zu dem Trugschluss, dass in (a) und (b) beiderseits von Elementarereignissen die Rede sei und dass diese folglich mit gleicher Wahrscheinlichkeit eintreten würden. P4 übergeht die Modellierung des Grundraumes völlig und erkennt wie schon P1 keinen relevanten Unterschied zwischen den in (a) und (b) beschriebenen Ereignissen.

P4: Für mich sind (a) und (b) gleich wahrscheinlich, weil es macht keinen Unterschied, ob ich gleichzeitig werfe oder hintereinander. Und ob ich beim ersten 5 und beim zweiten 6 würfle, ist gleich wahrscheinlich als beim ersten gleich 6 und dann nochmal würfle und wieder 6.

Auf den eigenständigen Lösungsversuch folgte die Begutachtung des fiktiven Lösungsversuchs (Abb. 2). Von den Proband:innen leicht zu identifizieren ist die Missachtung aller Elementarereignisse mit den Augenzahlen 1 bis 4.

P4: Ja das Problem ist, der hat quasi nur mit diesen möglichen Ausgängen gerechnet. Also er hat alle anderen vernachlässigt. Er hat gedacht, dass es nur die vier Ausgänge gibt.

In der Darstellung ist aber noch ein zweiter grundlegender Fehler zu erkennen, nämlich die doppelte Auflistung des Elementarereignisses $(6, 6)$. Bemerkenswert ist, dass nur jene beiden Studierenden P3 und P4 diesen Trugschluss als solchen erkennen, die die Aufgabe im Vorfeld richtig gelöst haben.

P3: Das ist einfach derselbe Fall, wenn die beiden Würfel 6 sind, dann ist der eine Würfel 6 und der andere Würfel 6. Das heißt, dieser eine Fall ist einfach redundant.

P1 und P4 identifizieren die doppelte Auflistung dieses redundanten Falls hingegen nicht als Fehler. Was die Skizze im fiktiven Lösungsversuch betrifft, kann weder P1 noch P4 nachvollziehen, wozu zwischen einem weißen und einem schwarzen Würfel unterschieden worden ist. Dahingegen erkennen P2 und P3 in der farblichen Unterscheidung zwischen den zwei Würfeln einen sinnvollen Lösungsansatz. Tatsächlich kann diese Analogie gewinnbringend sein, da durch die Unterscheidung deutlicher ins Auge fällt, dass in (a) ein zweielementiges und in (b) ein einelementiges Ereignis beschrieben wird.

Am Ende sind nur P2 und P3 spontan in der Lage, das stochastische Problem zu lösen und die Fehler im Lösungsversuch zu identifizieren, wohingegen P1 und P4 primär aufgrund falscher oder unterlassener Modellierung des Grundraumes falsche Schlüsse ziehen.

Diskussion & Schlussfolgerungen

Keine:r der Befragten ließ sich bei der ersten Problemstellung zu einer heuristischen Herangehensweise verleiten. Stattdessen schienen alle Proband:innen für gewisse Heuristiken sensibilisiert zu sein, möglicherweise aufgrund ihrer gemeinsamen akademischen Ausbildung. Auf die Frage hin, welche Antworten sie bei der ersten Problemstellung von Schüler:innen vermehrt erwarten würden, umschrieben sie treffend die Trugschlüsse *Representativeness und Gambler's Fallacy* (Jones & Thornton, 2005). Im Falle der zweiten Problemstellung trat jedoch bei zwei der vier Befragten der Equiprobability Bias (Lecoutre, 1992) zutage, der zuvor sowohl bei Sekundarstufenschüler:innen (Batanero & Sanchez, 2005) als auch bei Mathematiklehrer:innen (Nilsson & Lindström, 2013) beobachtet wurde. Insgesamt ergaben unsere diagnostischen Tests, wie hier anhand des doppelten Würfelwurfs exemplarisch geschildert, dass auch die Proband:innen selbst eine Reihe irreführender Intuitionen hegten. Dabei sei erwähnt, dass alle im Test enthaltenen Aufgaben zur Gänze mit den für die Sekundarstufe lehrplanmäßig vorgesehenen Mitteln der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu lösen waren.

Unsere Fallstudie unterstreicht die im obigen Literaturbericht erörterte Relevanz fachlichen Wissens von Mathematiklehrer:innen für den individuellen Lernzuwachs bei Schüler:innen. Die Aussagen der Proband:innen zeigen, dass fachliche Defizite Lehrkräfte daran hindern können, individuelle Fehler beziehungsweise Fehlertypen bei Schüler:innen zu erkennen, auf Verständnisprobleme zu reagieren und alternative Lösungswege zu beurteilen. Dieses Beispiel konkretisiert den in unterschiedlichen Settings gemessenen quantitativen Zusammenhang, wonach CK eine wichtige Voraussetzung für PCK darstellt (Baumert et al., 2010; Baumert et al., 2011; Blömeke et al., 2022).

Informelle Lösungswege als Ursache für Trugschlüsse

Unsere Beobachtungen fügen sich in das Bild bestehender Ergebnisse (Wolpers & Götz, 2002), wonach selbst Studierende vor allem dann dazu neigen, formale Lösungswege zu umgehen, wenn ihnen Aufgabenstellungen Schwierigkeiten bereiten. Auch in unserer Studie tendieren die Proband:innen im Zweifelsfall wiederholt zu intuitiven Entscheidungen und heuristischen Ansätzen, obwohl sie aufgrund ihrer bisherigen akademischen Ausbildung über die nötigen stochastischen Konzepte verfügen sollten. Unsere Studie zeigt, dass oft genau jene Lösungswege in Trugschlüssen münden, in denen bereits der erste reguläre Schritt zur Lösung eines

stochastischen Problems fehlt oder unzureichend umgesetzt wird, nämlich die Modellierung eines adäquaten Grundraumes.

Theoretische Einordnung

Die präsentierten Ergebnisse unterliegen gewissen Limitationen. Zugunsten einer möglichst eingehenden Untersuchung basiert unsere qualitative Fallstudie auf einem sehr kleinen Sample. Dementsprechend stehen die Resultate nicht repräsentativ für alle angehenden Mathematiklehrkräfte, sondern bilden eine tiefgehende Betrachtung von Einzelfällen, anhand derer stochastische Denkprozesse im Detail herausgearbeitet und dadurch individuelle mentale Wahrscheinlichkeitskonzepte offengelegt werden sollten.

Die dargelegten Teilergebnisse der Gesamtstudie von Kapplmüller (2024), können mit dem oben erläuterten Modell von Elbehary (2022) in Bezug gesetzt werden. Aufgrund der Auswahl des Samples kann davon ausgegangen werden, dass das auf akademischem Wege angeeignete Knowledge for Practice teilweise isoliert zu sein scheint und in praktischen Herausforderungen nicht zweckentsprechend zur Anwendung kommt. Stattdessen dürfte das Knowledge in Practice neben idealtypischen Konzepten auch von Intuitionen und Heuristiken geprägt sein, die erstere in Situationen des Zweifels häufig überlagern. Das führt uns zu der Hypothese, dass ein erheblicher Teil der empirisch belegten Schwierigkeiten, mit denen viele Mathematiklehrkräfte beim Lösen stochastischer Probleme kämpfen, in der mangelhaften Verknüpfung von *Knowledge for Practice* und *Knowledge in Practice* gründen.

Ausblick

Die Ergebnisse unserer Studie werfen die Frage auf, wie eine solche Verknüpfung in der Lehrer:innen-Bildung gegebenenfalls gefördert werden kann, mit dem Ziel, die Weitergabe heuristischer Zugänge und Fehlvorstellungen an Lernende unbedingt zu vermeiden. Empirische Belege weisen darauf hin, dass es in der Ausbildung eine gezielte Aufarbeitung spezifischer Fehlvorstellungen und den Aufbau methodisch-diagnostischer Kompetenzen braucht (Leuders & Prediger, 2020). So scheint etwa die Empfehlung von Borovcnik und Kapadia (2014) zur intensiven Auseinandersetzung mit den zahlreichen stochastischen Paradoxa der Schulmathematik vielsprechend. Unsere Beobachtungen lassen zudem vermuten, dass die Sensibilisierung für verbreitete Heuristiken nicht nur den Blick für problematische Denkweisen von Lernenden schärft, sondern auch das eigene Verständnis maßgeblich verbessern kann. Formate wie Interventionen mit authentischem Videomaterial (z. B. ViviAn-Tool; Hofmann & Roth, 2020) und handlungsorientierte Zugänge wie Fallarbeit zur systematischen Analyse und Reflexion von Fehlvorstellungen (Leuders & Prediger, 2020) haben sich hierzu bewährt.

Ein weiterer Fokus gebührt der Schnittstelle zur Primarstufe, deren aktueller Lehrplan einen qualitativen Zugang zum Wahrscheinlichkeitsbegriff vorsieht, der an lebensweltliche Sachsituationen der Schüler:innen anknüpfen soll. Wie schon der Lehrplan der Sekundarstufe setzt also auch jener der Primarstufe zunächst auf eine intuitive Begriffsbildung. Dies hebt erneut die Notwendigkeit hervor, bei Lehrkräften ein verstärktes Bewusstsein für (fehlerhafte) Intuitionen zu schaffen, die möglicherweise in die bzw. aus der Primarstufe mitgebracht werden. Lehrer:innen aller Schulstufen sollten in der Lage sein, problematische Präkonzepte altersadäquat und produktiv aufzugreifen. Dass gerade Primarstufenlehrkräfte in zahlreichen Untersuchungen vermehrt eigene Fehlvorstellungen aufwiesen (Batanero et al., 2014),

verdeutlicht die Relevanz unserer bisherigen Empfehlungen auch für die Lehrer:innen-Ausbildung der Primarstufe.

Schlussendlich bleibt zu klären, inwieweit eine anwendungsorientierte universitäre Lehre es angehenden Lehrkräften erleichtern kann, ihr Fachwissen stärker zu vernetzen und in herausfordernden Unterrichtssituationen zielgerichtet und fruchtbringend zum Einsatz zu bringen.

Literatur

- Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). *Content knowledge for teaching: What makes it special?*. Journal of teacher education, 59(5), 389–407.
- Batanero, C., Arteaga, P., Serrano, L., & Ruiz, B. (2014). *Prospective Primary School Teachers' Perception of Randomness*. In E. Chernoff, & B. Sriraman (Hrsg.), Probabilistic Thinking. Advances in Mathematics Education. Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0_19
- Batanero, C., & Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school*. Sense Publishers.
- Batanero, C., Chernoff, E. J., Engel, J., Lee, H. S., & Sánchez, E. (2016). *Research on teaching and learning probability*. Springer Open.
- Batanero, C., & Sanchez, E. (2005). *What is the Nature of High School Students' Conceptions and Misconceptions About Probability?*. In G. A. Jones (Hrsg.), Exploring probability in school: Challenges for Teaching and Learning (S. 241–266). Springer.
- Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., & Tsai, Y.-M. (2010). *Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress*. American Educational Research Journal, 47(1), 133–180.
- Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S., & Neubrand, M. (2011). *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften, kognitiv aktivierender Unterricht und die mathematische Kompetenz von Schülerinnen und Schülern (COACTIV) – Ein Forschungsprogramm*. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss, & M. Neubrand (Hrsg.), Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV (S. 7–25). Waxmann.
- Blömeke, S., Jentsch, A., Ross, N., Kaiser, G., & König, J. (2022). *Opening up the black box: Teacher competence, instructional quality, and students' learning progress*. Learning and Instruction, 79, Artikel 101600. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2022.101600>
- Borovcnik, M. (2016). *Probabilistic thinking and probability literacy in the context of risk*. Educação Matemática Pesquisa, 18(3), 1491–1516.
- Borovcnik, M., & Kapadia, R. (2014). *From Puzzles and Paradoxes to Concepts in Probability*. In E. J. Chernoff, & B. Sriraman (Hrsg.), Probabilistic Thinking, Advances in Mathematics Education (S. 35–74). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0_3
- Büchter, A. & Leuders, T. (2009). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln: Lernen fördern - Leistung überprüfen* (4. Aufl.). Cornelsen.

- Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF). (2025). *Gesamte Rechtsvorschrift für Lehrpläne – allgemeinbildende höhere Schulen*, Fassung vom 11.05.2025.
<https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568> (abgerufen am 11.05.2025).
- Devlin, K. (2014). *The Most Common Misconception About Probability?*. In E. J. Chernoff & B. Sriraman (Hrsg.), *Probabilistic Thinking: Presenting Plural Perspectives* (S. ix–xiii). Springer.
- Elbehary, S. G. A. (2022). *Rethinking mathematics teachers' professional knowledge for teaching probability from the perspective of probabilistic reasoning: A proposed framework*. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 17(3), Artikel em0695.
<https://doi.org/10.29333/iejme/12145>
- Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Reidel.
<https://doi.org/10.1007/978-94-010-1858-6>.
- Gorroochurn, P. (2011). *Errors of Probability in Historical Context*. *The American Statistician*, 65(4), 246–254. <https://doi.org/10.1198/tas.2011.11146>
- Hattie, J. A. C. (2009). *Visible learning*. A synthesis of over 800 metaanalyses relating to achievement. Routledge.
- Hoffmann, R., & Roth, J. (2020). *Arbeiten mit Funktionsgraphen – Zur Diagnose von Fehlern und Fehlvorstellungen beim funktionalen Denken*. *Mathematica Didactica*, 44(1).
<https://doi.org/10.18716/ojs/md/2021.1165>
- Jones, G. A., & Thornton, C. A. (2005). *An overview of research into the learning and teaching of probability*. In G. A. Jones (Hrsg.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (S. 65–92). Springer.
- Kahneman, D., & Tversky, A. (1972). *Subjective Probability: A Judgment of Representativeness*. In C.-A. S. Staël von Holstein (Hrsg.), *The Concept of Probability in Psychological Experiments* (S. 25–48). Reidel. https://doi.org/10.1007/978-94-010-2288-0_3
- Kapplmüller, M. (2024). *Von Urnen und Kugeln: Professionswissen von angehenden Mathematiklehrkräften der Sekundarstufe im Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung* [Masterarbeit, Universität Linz]. ePUB Publikationsserver der Universitätsbibliothek Linz.
<https://epub.jku.at/obvulihs/content/pageview/10056842?query=kapplm%C3%BCller>
- Kuckartz, U. (2016). *Qualitative Inhaltsanalyse: Methoden, Praxis, Computerunterstützung* (3., überarbeitete Auflage). Beltz.
- Lecoutre, M. P. (1992). *Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations*. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 557–568.
- Leuders, T., & Prediger, S. (2020). *Mathematik (Sekundarstufe) in der Lehrerinnen- und Lehrerbildung. Professionswissen und Professionalisierungsforschung*. In C. Cramer, J. König, M. Rothland, & S. Blömeke (Hrsg.), *Handbuch Lehrerinnen- und Lehrerbildung* (S. 470–481). Klinhardt.
- Nacarato, A. M., & Grando, R. C. (2014). *The role of language in building probabilistic thinking*. *Statistics Education Research Journal*, 13(2), 93–103. <https://doi.org/10.52041/serj.v13i2.283>

- Nilsson, P. & Lindström, T. (2013). *Prolifing Swedish teachers´ knowledge base in probability*. Nordic Studies in Mathematics Education, 18(4), 51–72.
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1975). *The origin of the idea of chance in children*. Norton. (Erstveröffentlichung: 1951).
- Savard, A. (2014). *Developing probabilistic thinking: What about people’s conceptions?*. In E. J. Chernoff, & B. Sriraman (Hrsg.), Probabilistic thinking: presenting plural perspectives (S. 283–298). Springer.
- Schwarz, B. (2015). *A Study on Professional Competence of Future Teacher Students as an Example of a Study Using Qualitative Content Analysis*. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, & N. Presmeg (Hrsg.), Approaches to qualitative research in mathematics education: Examples of methodology and methods (S. 381–401). Springer.
- Shulman, L. S. (1986). *Those who understand: Knowledge growth in teaching*. Educational researcher, 15(2), 4–14.
- Tafuro, S., & Guilmoto, C. Z. (2020). *Skewed sex ratios at birth: A review of global trends*. Early Human Development, 141, Artikel 104868. <https://doi.org/10.1016/j.earlhumdev.2019.104868>
- Wolpers, H., & Götz, S. (2002). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II*. Bd. 3: Didaktik der Stochastik (1. Aufl.). Vieweg.

Zum Autor/Zur Autorin

Markus KAPPLMÜLLER, MEd ist als Mathematiklehrer am Gymnasium tätig und wirkte als wissenschaftlicher Projektmitarbeiter am Institut für MINT-Didaktik der Johannes Kepler Universität Linz an der Forschung zur Lehrer:innen-Bildung mit.

Dr.ⁱⁿ Edith LINDENBAUER promovierte 2018 an der Johannes Kepler Universität Linz und ist derzeit Hochschulprofessorin für Mathematikdidaktik an der Pädagogischen Hochschule Oberösterreich. In Lehre und Forschung widmet sie sich unter anderem der Lehrer:innen-Bildung im Sekundarstufenbereich.