

*Evita Lerchenberger & Christoph Oberbacher*

# **Mathoprolly – ein Spiel für den Stochastikunterricht in (fast) allen Schulstufen**

## **Zusammenfassung**

Spiele sind nicht nur als motivationsförderndes Mittel im Mathematikunterricht bekannt (u.a. beschrieben bei Engert-Oostingh et al. 2017). Insbesondere der Stochastikunterricht kann dabei helfen, Konzepte aufzubauen, die in Spielen außerhalb des Unterrichts als gewinnbringende Strategien eingesetzt werden können (Sill & Kurtzmann 2019). In diesem Beitrag wird das neu entwickelte Spiel Mathoprolly genauer beleuchtet, dessen mathematische Inhalte und Lernpotentiale für verschiedene Schulstufen analysiert werden. Mathoprolly soll ein (vorerst präformales) Verständnis für Inhalte der Kombinatorik und Statistik bzw. Wahrscheinlichkeitsrechnung fördern, insbesondere auch einen Zugang zu den Konzepten von Erwartungswert und Varianz ermöglichen.

## **Einleitung**

Spiele haben sich im Mathematikunterricht in verschiedenen Themenbereichen als lernförderlich erwiesen, wie etwa der Entwicklung eines grundlegenden Zahlenverständnisses im Kindergarten (Ramani & Siegler 2008) oder auch der Auseinandersetzung mit Konzepten der Wahrscheinlichkeit an Universitäten (Armstrong 2021). Dies nehmen wir zum Anlass, um im vorliegenden Artikel nach einer kurzen theoretischen Einführung zu Spielen im Mathematikunterricht ein von uns entwickeltes Erarbeitungsspiel namens Mathoprolly genauer vorzustellen. Das Spiel ist so konzipiert, dass es vom Anfang der Primarstufe bis zum Ende der Sekundarstufe II gespielt werden kann. Es soll den Aufbau (präformaler) Vorstellungen zu den entsprechenden Lehrplaninhalten in der jeweiligen Schulstufe fördern, wobei es nicht zwingend erforderlich ist, dass die entdeckten Phänomene mathematisch formal benannt werden. Das Spiel wird einerseits beschrieben und andererseits aus fachlicher und fachdidaktischer Perspektive genauer beleuchtet werden. Dabei werden Möglichkeiten und Mehrwert des Spiels für verschiedenen Schulstufen aufgezeigt, insbesondere um verschiedene Zugänge zum Wahrscheinlichkeitsbegriff (Laakmann & Schacht, 2019) aufzuzeigen. Zudem werden die Konzepte von Erwartungswert und Varianz im Zusammenhang mit dem Spiel Mathoprolly erläutert und durch Spielsimulationen verdeutlicht.

## **Spiele im Mathematikunterricht**

Im Kontext von Spielen ist es zunächst von Bedeutung, was Spiele im Mathematikunterricht leisten sollen. Leuders (2009) unterscheidet zwischen Übungs- und Erarbeitungsspielen: Übungsspiele fördern das Memorieren, Automatisieren, Reflektieren und flexible Anwenden von (bekannten) Kenntnissen. Im Gegensatz dazu zielen Erarbeitungsspiele darauf ab, erste (präformale) Erfahrungen zu machen, die als Grundlage für Begriffe und Verfahren dienen sowie Zusammenhänge zu entdecken. Als Beispiele für Erarbeitungsspiele können das Augensummen-

spiel (Prediger, 2005) und Gefangene befreien (Leuders, 2009) genannt werden. In beiden Spielen wird mit zwei Würfeln gewürfelt und die Summe (Augensummenspiel) beziehungsweise die Differenz (Gefangene befreien) gebildet. Es geht jeweils darum, geeignete Spielstrategien zu finden, wobei Kombinatorik, (unterschiedliche) Verteilungen und grundlegenden Zugängen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff eine Rolle spielen.

Den allgemeinen Ablauf beim Spielen eines Erarbeitungsspiels wird bei Leuders (2009) beschrieben und ist in Tabelle 1 dargestellt.

| Spielphase                  | Tätigkeit                                                                                                                | Sozialform                     |
|-----------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|
| (0) Regeln                  | Die Regeln des Spiels werden erklärt.                                                                                    | Klasse/ Gruppe (mit Lehrkraft) |
| (1) Spielen                 | Freies Spielen; Erfahrungen sammeln, Strategieentwicklung                                                                | Gruppen                        |
| (2) Reflexion des Spiels    | Formulierung vermuteter Zusammenhänge, gemeinsame Strategien innerhalb einer Gruppe werden für nächste Phase vereinbart  | in Gruppen (mit Lehrkraft)     |
| (3) Spielen                 | Anwendung vereinbarter Strategien                                                                                        | Gruppen gegeneinander          |
| (4) Reflexion der Strategie | Analyse der Spielereignisse hinsichtlich der Strategien; Suche nach Erklärungen für Erfolg/ Misserfolg dieser Strategien | Klasse (mit Lehrkraft)         |

Tabelle 4: Phasen eines Erarbeitungsspiels in Anlehnung an Leuders (2009)

Nach Erklärung der Regeln für die Klasse sollen die Schüler:innen die Möglichkeit haben (1) frei zu spielen – also unmittelbar zu handeln. Darauf folgend ist es das Ziel, dass Schüler:innen über ihre teilweise unbewussten, unstrukturierten Handlungen – angeleitet durch die Lehrkraft – reflektieren, um insbesondere angewandte Strategien zu erarbeiten (2). Anschließend sollen Personen verschiedener Gruppen – mit ihren unter Umständen unterschiedlichen Strategien – gegeneinander spielen (3). Abschließend sollen die Spielereignisse diskutiert sowie Erklärungen für Erfolg/ Misserfolg diskutiert werden (4) (vgl. Tabelle 1).

Wir werden diese Struktur später für das von uns entwickelte Spiel Mathoprolly aufgreifen. Zudem werden wir die durch das Spiel zu erreichenden Kompetenzen anhand des Lehrplans der Primarstufe bzw. Sekundarstufe I und II diskutieren. Dies ermöglicht es, die Verbindung zwischen den Spielaktivitäten und den mathematischen Lernzielen – die sich je nach Schulstufe unterscheiden – klarer zu erkennen, sowie aus Lehrendenperspektive die Reflexion der Spielereignisse gemäß Schulstufe anzuleiten.

## Erklärung und Spielanleitung von „Mathoprolly“

Beim Spiel „Mathoprolly“ (Material pro Gruppe mit je 2-4 Personen: Spielplan (Abbildung 1), ein Spielwürfel, ein Spielstein pro Person, ein Stift, Spielgeld) werden Spielfiguren je nach gewürfelten Augenzahlen im Uhrzeigersinn auf dem Spielplan bewegt. Im Namen sind Wortteile von „Mathematik“ und „Probability“ (engl. für Wahrscheinlichkeit) zu erkennen.

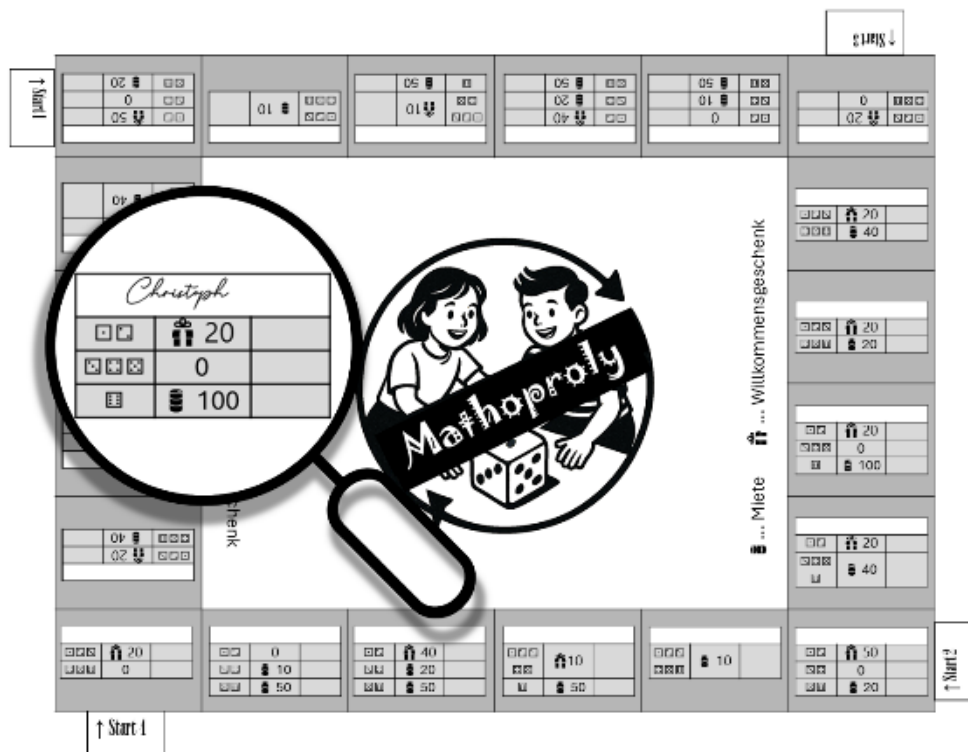


Abb. 7: Spielplan von Mathoprolly mit hervorgehobenem Feld

Es gibt 20 Felder, die von den spielenden Personen gekauft werden können, wenn sie mit ihrer Spielfigur auf das Feld kommen. Besitzt eine Person ein Feld und eine andere Person kommt mit ihrer Spielfigur auf dieses, muss diese würfeln. Entsprechend der Vorgaben in der jeweiligen Tabelle wird dadurch entschieden, wer wie viel Spielgeld als „Miete“ (Münz-Symbol) erhält oder als „Willkommensgeschenk“ (Geschenk-Symbol) abgeben muss. Ziel des Spiels ist es, in einer gewissen Zeit möglichst viel Spielgeld anzusammeln. Die Währung im Spiel heißt Matholos und wir verwenden  $\text{Ml}$  als Währungssymbol.

Anhand eines hervorgehobenen Feldes in Abbildung 1 sei dieses hier genauer erklärt: Im weißen Feld kann der Name der Person eingetragen werden, die das Feld gekauft hat – das ist hier beispielsweise Christoph. Wenn nun Evita auf das Feld kommt, muss sie würfeln. Wenn sie eine 1 oder 2 würfelt, erhält sie als „Willkommensgeschenk“ 20  $\text{Ml}$  von Christoph. Bei einer 3, 4 oder 5 geschieht gar nichts. Würfelt Evita jedoch eine 6, muss sie 100  $\text{Ml}$  als „Miete“ an Christoph bezahlen. In der rechten Spalte wird zudem eine Strichliste geführt, mit welcher festgehalten wird, welche Ereignisse im ganzen Spiel wie oft erzielt wurden.

Zu Beginn des Spiels erhalten alle Spieler:innen je 300  $\text{Ml}$  und starten mit ihren Spielfiguren auf den Startfeldern. Dabei ist „Start1“ das Feld, auf dem jene Person startet, die als erstes würfelt. Auf „Start2“ startet die Person, die als zweites würfelt usw.

Ist eine Person am Zug, würfelt sie mit einem Würfel. Danach bewegt sie ihre Spielfigur um so viele Felder weiter, wie der Würfel anzeigt. Ist das Feld, auf das sie zieht ...

- noch verfügbar, darf sie entscheiden, ob sie es kaufen möchte. Um ein Feld zu kaufen, müssen stets 40  $\text{Ml}$  an die Bank gezahlt werden.
- von einer anderen Person bereits gekauft worden, würfelt sie und bezahlt Miete oder erhält ein Willkommensgeschenk.
- ihr eigenes, bleibt sie einfach stehen.

Danach ist die nächste Person am Zug und würfelt, um mit ihrer Spielfigur um die gewürfelte Anzahl an Feldern weiterzufahren. Entweder nach Ablauf einer bestimmten Zeit (z.B. 30 Minuten) oder wenn eine spielende Person eine Zahlung nicht mehr tätigen kann, wird das Spielgeld gezählt. Wer am meisten besitzt, gewinnt das Spiel. Bei Gleichstand gewinnt jene Person, die mehr Felder besitzt.

## Analyse des Spiels aus Perspektive des Fachs und der Fachdidaktik

Miete und Willkommensgeschenke stellen für die Person, die ein Feld besitzt, Gewinne bzw. Verluste dar. Diese Begriffe verwenden wir im Folgenden, um den Aufbau des Spiels beziehungsweise einige Hintergedanken zu veranschaulichen. Der Verlust bei einem Willkommensgeschenk wird als negative Zahl dargestellt, weil wir hier den Gewinn aus Sicht von Christoph, der das Feld gekauft hat, betrachten.

Willkommensgeschenk wird als negative Zahl dargestellt, weil wir hier den Gewinn aus Sicht von Christoph, der das Feld gekauft hat, betrachten.

Die Wahrscheinlichkeiten für bestimmte Ereignisse lassen sich mittels Laplace-Wahrscheinlichkeit durch Anteile bestimmen: „günstige durch mögliche“. Aufgrund der Symmetrie des Würfels wird angenommen, dass jede Augenzahl mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gewürfelt wird. Damit ergibt sich für das Auftreten einer bestimmten Augenzahl die Wahrscheinlichkeit  $p = 1/6$ . Die Wahrscheinlichkeit kann derart vor dem Experiment (a-priori) definiert werden. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Christoph verliert 20 M“ beträgt demzufolge  $2/6$ , weil zwei Augenzahlen zu diesem Ereignis führen.

Um etwas über die „Güte“ eines Feldes aussagen zu können, bedarf es des mathematischen Konzepts des Erwartungswerts. Mit diesem kann in dem Kontext ein durchschnittlicher Gewinn auf lange Sicht angegeben werden und wird dementsprechend gleich berechnet wie das (gewichtete) arithmetische Mittel der Miete beziehungsweise des Willkommensgeschenkes.

Der Erwartungswert wird berechnet, indem man die Summe aus den Produkten von Gewinn/Verlust mit der jeweiligen Wahrscheinlichkeit bildet. Für Christophs Feld in Abbildung 1 lässt sich der Erwartungswert also wie folgt berechnen:

$$\mu = -20 \text{ M} \cdot \frac{2}{6} + 0 \text{ M} \cdot \frac{3}{6} + 100 \text{ M} \cdot \frac{1}{6} = 10 \text{ M}$$

Also besitzt Christophs Feld einen Erwartungswert von 10 M, was bedeutet, dass Christoph auf lange Sicht betrachtet einen durchschnittlichen Gewinn von 10 Matholos pro „Besuch“ zu erwarten hat.

In der realen Spielsituation muss dies jedoch nicht immer genau so eintreffen. Beispielhaft ist eine mögliche Strichliste von Christophs Feld in Abbildung 2 dargestellt. Es wurden 3-mal die Augenzahlen 1 oder 2, 5-mal die Augenzahlen 3, 4 oder 5 sowie 2-mal die Augenzahl 6 gewürfelt. Der tatsächliche mittlere Gewinn pro Wurf  $\bar{x}$  lässt sich mit dem nachstehenden Term berechnen:

$$\bar{x} = \frac{\text{Gesamteinnahmen}}{\text{Anzahl der Würfe}} = \frac{-20 \text{ M} \cdot 3 + 0 \text{ M} \cdot 5 + 100 \text{ M} \cdot 2}{10} = 14 \text{ M}$$

Hätte man nicht bereits mit der Laplace-Wahrscheinlichkeit gerechnet, könnte man die hier tatsächlich aufgetretene Anteile als Schätzwert für die Wahrscheinlichkeiten  $p$  heranziehen. Bei nur 10 Würfelwürfen ist dieser Schätzwert sehr ungenau, kann jedoch bei größerer Versuchsanzahl genauer bestimmt werden. Diese Herangehensweise beruht auf dem Gesetz der großen Zahlen, welches aussagt, dass sich die relative Häufigkeit (nicht zwingend die absoluten

Häufigkeiten) um den wahren Wert der Wahrscheinlichkeit stabilisiert. Man spricht bei diesem Ansatz vom frequentistischen Zugang (Laakmann & Schacht, 2019) zum Wahrscheinlichkeitsbegriff. Ein Kennzeichen dieser Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten liegt in der Festlegung der Wahrscheinlichkeit nach einem Experiment (a-posteriori).

|                                                                                   |                                                                                       |                                                                                   |
|-----------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| Christoph                                                                         |                                                                                       |                                                                                   |
|  |  20  |  |
|  | 0                                                                                     |  |
|  |  100 |  |

Abb. 2: Feld mit Strichliste

Was sich in Abbildung 2 bereits zeigt, ist, dass die im realen Spielverlauf tatsächlich erwürfelten Ereignisse nicht exakt dem theoretisch errechneten Erwartungswert entsprechen. Christoph hatte in diesen 10 Würfelrunden eben ein bisschen „Glück“.

Der Erwartungswert (der durchschnittliche Gewinn auf lange Sicht) bietet zwar wertvolle Einblicke in die Eigenschaften eines Feldes – ist jedoch allein betrachtet noch unzureichend.

Denn es ist noch entscheidend, wie die Gewinne und Verluste verteilt sind. Es gibt beispielsweise vier verschiedene Felder mit Erwartungswert  $\mu = 10$ , aber unterschiedlicher Verteilung von Gewinn und Verlust (Abbildung 3). Dies kann dazu führen, dass es Spieldurchgänge gibt, bei welchen man bei einem Feld einen Verlust generiert. Christoph kann also mit seinem Feld (C4 in der Abbildung 3) Glück haben und beim ersten „Besuch“ gleich 100 M erhalten, allerdings könnte er auch zuerst öfters Willkommensgeschenke von 20 M machen müssen. Verglichen mit dem Feld, das bei jedem Würfelwert sicher 10 M (Abbildung 3: Feld C1), einbringt, hat Christophs Feld also den gleichen Erwartungswert, aber eben auch die Chance auf einen höheren Gewinn bzw. Verlust. Eine Kennzahl, die den Sachverhalt zu beschreiben versucht, ist die Varianz  $\sigma^2$ . Diese ist das (gewichtete) arithmetische Mittel der quadratischen Abweichungen vom Erwartungswert ( $\sigma^2 = p_1 \cdot (G_1 - \mu)^2 + p_2 \cdot (G_2 - \mu)^2 + \dots$ , wobei  $p_i$  die Wahrscheinlichkeit zum jeweiligen Gewinnbetrag  $G_i$  ist).

Wenn wir wieder Christophs Feld C4 (Abbildung 3) betrachten, errechnet sich die Varianz also wie folgt:

$$\sigma^2 = \frac{2}{6} \cdot (-20 \text{ M} - 10 \text{ M})^2 + \frac{3}{6} \cdot (0 \text{ M} - 10 \text{ M})^2 + \frac{1}{6} \cdot (100 \text{ M} - 10 \text{ M})^2 = 1700 \text{ M}^2$$

In Abbildung 3 sind alle verschiedenen Felder mit ihren Erwartungswerten und Varianzen dargestellt. Jedes Feld existiert in gleicher Form zwei Mal auf dem Feld. Es gibt beispielsweise vier Felder mit Erwartungswert 10, die jedoch verschiedene Varianzen besitzen. Das Spiel ist so konzipiert, dass es Felder mit Erwartungswerten von -10, 0, 10 und 20 und unterschiedlichen Varianzen gibt.

| $\mu = -10$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | $\mu = 0$                                                   | $\mu = 10$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | $\mu = 20$                                   |                                                         |   |                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                            |                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                 |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                         |                                                            |                                              |                                                            |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                 |   |                                                         |                                                            |                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                            |  |                                                         |  |  |                                              |                                                            |  |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|---------------------------------------------------------|---|---------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|------------------------------------------------------------|--|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|---|---------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|--|---------------------------------------------------------|--|--|----------------------------------------------|------------------------------------------------------------|--|
| <div>A1 <math>\sigma^2 = 100</math></div> <table><tr><td><div><div><div></div><div></div><div></div></div></div></td><td><div><div><div></div><div></div></div> 20</div></td><td></td></tr><tr><td><div><div><div></div><div></div><div></div></div></div></td><td>0</td><td></td></tr></table>                                                                                                                           | <div><div><div></div><div></div><div></div></div></div>     | <div><div><div></div><div></div></div> 20</div>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                              | <div><div><div></div><div></div><div></div></div></div> | 0 |                                                         | <div>B1 <math>\sigma^2 = 400</math></div> <table><tr><td><div><div><div></div><div></div><div></div></div></div></td><td><div><div><div></div><div></div></div> 20</div></td><td></td></tr><tr><td><div><div><div></div><div></div><div></div></div></div></td><td>20</td><td></td></tr></table> | <div><div><div></div><div></div><div></div></div></div>    | <div><div><div></div><div></div></div> 20</div> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | <div><div><div></div><div></div><div></div></div></div> | 20                                              |  | <div>C1 <math>\sigma^2 = 0</math></div> <table><tr><td><div><div><div></div><div></div><div></div></div></div></td><td><div><div><div></div><div></div><div></div></div> 10</div></td><td></td></tr><tr><td><div><div><div></div><div></div><div></div></div></div></td><td></td><td></td></tr></table> | <div><div><div></div><div></div><div></div></div></div> | <div><div><div></div><div></div><div></div></div> 10</div> |                                              | <div><div><div></div><div></div><div></div></div></div>    |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | <div>D1 <math>\sigma^2 = 467</math></div> <table><tr><td><div><div><div></div><div></div></div></div></td><td>0</td><td></td></tr><tr><td><div><div><div></div><div></div></div></div></td><td><div><div><div></div><div></div><div></div></div> 10</div></td><td></td></tr><tr><td><div><div><div></div><div></div><div></div></div></div></td><td><div><div><div></div><div></div><div></div></div> 50</div></td><td></td></tr></table> | <div><div><div></div><div></div></div></div>    | 0 |                                                         | <div><div><div></div><div></div></div></div>               | <div><div><div></div><div></div><div></div></div> 10</div> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | <div><div><div></div><div></div><div></div></div></div> | <div><div><div></div><div></div><div></div></div> 50</div> |  |                                                         |  |  |                                              |                                                            |  |
| <div><div><div></div><div></div><div></div></div></div>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | <div><div><div></div><div></div></div> 20</div>             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                              |                                                         |   |                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                            |                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                 |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                         |                                                            |                                              |                                                            |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                 |   |                                                         |                                                            |                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                            |  |                                                         |  |  |                                              |                                                            |  |
| <div><div><div></div><div></div><div></div></div></div>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 0                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                              |                                                         |   |                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                            |                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                 |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                         |                                                            |                                              |                                                            |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                 |   |                                                         |                                                            |                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                            |  |                                                         |  |  |                                              |                                                            |  |
| <div><div><div></div><div></div><div></div></div></div>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | <div><div><div></div><div></div></div> 20</div>             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                              |                                                         |   |                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                            |                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                 |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                         |                                                            |                                              |                                                            |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                 |   |                                                         |                                                            |                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                            |  |                                                         |  |  |                                              |                                                            |  |
| <div><div><div></div><div></div><div></div></div></div>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 20                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                              |                                                         |   |                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                            |                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                 |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                         |                                                            |                                              |                                                            |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                 |   |                                                         |                                                            |                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                            |  |                                                         |  |  |                                              |                                                            |  |
| <div><div><div></div><div></div><div></div></div></div>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | <div><div><div></div><div></div><div></div></div> 10</div>  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                              |                                                         |   |                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                            |                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                 |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                         |                                                            |                                              |                                                            |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                 |   |                                                         |                                                            |                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                            |  |                                                         |  |  |                                              |                                                            |  |
| <div><div><div></div><div></div><div></div></div></div>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                              |                                                         |   |                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                            |                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                 |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                         |                                                            |                                              |                                                            |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                 |   |                                                         |                                                            |                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                            |  |                                                         |  |  |                                              |                                                            |  |
| <div><div><div></div><div></div></div></div>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 0                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                              |                                                         |   |                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                            |                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                 |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                         |                                                            |                                              |                                                            |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                 |   |                                                         |                                                            |                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                            |  |                                                         |  |  |                                              |                                                            |  |
| <div><div><div></div><div></div></div></div>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | <div><div><div></div><div></div><div></div></div> 10</div>  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                              |                                                         |   |                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                            |                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                 |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                         |                                                            |                                              |                                                            |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                 |   |                                                         |                                                            |                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                            |  |                                                         |  |  |                                              |                                                            |  |
| <div><div><div></div><div></div><div></div></div></div>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | <div><div><div></div><div></div><div></div></div> 50</div>  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                              |                                                         |   |                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                            |                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                 |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                         |                                                            |                                              |                                                            |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                 |   |                                                         |                                                            |                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                            |  |                                                         |  |  |                                              |                                                            |  |
| <div>A2 <math>\sigma^2 \approx 867</math></div> <table><tr><td><div><div><div></div><div></div></div></div></td><td><div><div><div></div><div></div></div> 50</div></td><td></td></tr><tr><td><div><div><div></div><div></div></div></div></td><td>0</td><td></td></tr><tr><td><div><div><div></div><div></div></div></div></td><td><div><div><div></div><div></div><div></div></div> 20</div></td><td></td></tr></table> | <div><div><div></div><div></div></div></div>                | <div><div><div></div><div></div></div> 50</div>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                              | <div><div><div></div><div></div></div></div>            | 0 |                                                         | <div><div><div></div><div></div></div></div>                                                                                                                                                                                                                                                     | <div><div><div></div><div></div><div></div></div> 20</div> |                                                 | <div>B2 <math>\sigma^2 = 500</math></div> <table><tr><td><div><div><div></div><div></div><div></div></div></div></td><td><div><div><div></div><div></div></div> 10</div></td><td></td></tr><tr><td><div><div><div></div><div></div></div></div></td><td></td><td></td></tr><tr><td><div><div><div></div><div></div></div></div></td><td><div><div><div></div><div></div><div></div></div> 50</div></td><td></td></tr></table> | <div><div><div></div><div></div><div></div></div></div> | <div><div><div></div><div></div></div> 10</div> |  | <div><div><div></div><div></div></div></div>                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                         |                                                            | <div><div><div></div><div></div></div></div> | <div><div><div></div><div></div><div></div></div> 50</div> |  | <div>C2 <math>\sigma^2 = 900</math></div> <table><tr><td><div><div><div></div><div></div><div></div></div></div></td><td><div><div><div></div><div></div></div> 20</div></td><td></td></tr><tr><td><div><div><div></div><div></div><div></div></div></div></td><td><div><div><div></div><div></div><div></div></div> 40</div></td><td></td></tr></table> | <div><div><div></div><div></div><div></div></div></div>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | <div><div><div></div><div></div></div> 20</div> |   | <div><div><div></div><div></div><div></div></div></div> | <div><div><div></div><div></div><div></div></div> 40</div> |                                                            | <div>D2 <math>\sigma^2 = 800</math></div> <table><tr><td><div><div><div></div><div></div></div></div></td><td><div><div><div></div><div></div></div> 20</div></td><td></td></tr><tr><td><div><div><div></div><div></div><div></div></div></div></td><td></td><td></td></tr><tr><td><div><div><div></div><div></div></div></div></td><td><div><div><div></div><div></div><div></div></div> 40</div></td><td></td></tr></table> | <div><div><div></div><div></div></div></div>            | <div><div><div></div><div></div></div> 20</div>            |  | <div><div><div></div><div></div><div></div></div></div> |  |  | <div><div><div></div><div></div></div></div> | <div><div><div></div><div></div><div></div></div> 40</div> |  |
| <div><div><div></div><div></div></div></div>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | <div><div><div></div><div></div></div> 50</div>             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                              |                                                         |   |                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                            |                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                 |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                         |                                                            |                                              |                                                            |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                 |   |                                                         |                                                            |                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                            |  |                                                         |  |  |                                              |                                                            |  |
| <div><div><div></div><div></div></div></div>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 0                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                              |                                                         |   |                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                            |                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                 |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                         |                                                            |                                              |                                                            |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                 |   |                                                         |                                                            |                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                            |  |                                                         |  |  |                                              |                                                            |  |
| <div><div><div></div><div></div></div></div>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | <div><div><div></div><div></div><div></div></div> 20</div>  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                              |                                                         |   |                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                            |                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                 |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                         |                                                            |                                              |                                                            |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                 |   |                                                         |                                                            |                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                            |  |                                                         |  |  |                                              |                                                            |  |
| <div><div><div></div><div></div><div></div></div></div>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | <div><div><div></div><div></div></div> 10</div>             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                              |                                                         |   |                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                            |                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                 |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                         |                                                            |                                              |                                                            |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                 |   |                                                         |                                                            |                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                            |  |                                                         |  |  |                                              |                                                            |  |
| <div><div><div></div><div></div></div></div>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                              |                                                         |   |                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                            |                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                 |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                         |                                                            |                                              |                                                            |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                 |   |                                                         |                                                            |                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                            |  |                                                         |  |  |                                              |                                                            |  |
| <div><div><div></div><div></div></div></div>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | <div><div><div></div><div></div><div></div></div> 50</div>  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                              |                                                         |   |                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                            |                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                 |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                         |                                                            |                                              |                                                            |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                 |   |                                                         |                                                            |                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                            |  |                                                         |  |  |                                              |                                                            |  |
| <div><div><div></div><div></div><div></div></div></div>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | <div><div><div></div><div></div></div> 20</div>             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                              |                                                         |   |                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                            |                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                 |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                         |                                                            |                                              |                                                            |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                 |   |                                                         |                                                            |                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                            |  |                                                         |  |  |                                              |                                                            |  |
| <div><div><div></div><div></div><div></div></div></div>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | <div><div><div></div><div></div><div></div></div> 40</div>  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                              |                                                         |   |                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                            |                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                 |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                         |                                                            |                                              |                                                            |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                 |   |                                                         |                                                            |                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                            |  |                                                         |  |  |                                              |                                                            |  |
| <div><div><div></div><div></div></div></div>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | <div><div><div></div><div></div></div> 20</div>             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                              |                                                         |   |                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                            |                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                 |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                         |                                                            |                                              |                                                            |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                 |   |                                                         |                                                            |                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                            |  |                                                         |  |  |                                              |                                                            |  |
| <div><div><div></div><div></div><div></div></div></div>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                              |                                                         |   |                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                            |                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                 |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                         |                                                            |                                              |                                                            |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                 |   |                                                         |                                                            |                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                            |  |                                                         |  |  |                                              |                                                            |  |
| <div><div><div></div><div></div></div></div>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | <div><div><div></div><div></div><div></div></div> 40</div>  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                              |                                                         |   |                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                            |                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                 |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                         |                                                            |                                              |                                                            |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                 |   |                                                         |                                                            |                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                            |  |                                                         |  |  |                                              |                                                            |  |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                             | <div>C3 <math>\sigma^2 = 1400</math></div> <table><tr><td><div><div><div></div><div></div></div></div></td><td><div><div><div></div><div></div></div> 40</div></td><td></td></tr><tr><td><div><div><div></div><div></div></div></div></td><td><div><div><div></div><div></div><div></div></div> 20</div></td><td></td></tr><tr><td><div><div><div></div><div></div></div></div></td><td><div><div><div></div><div></div><div></div></div> 50</div></td><td></td></tr></table> | <div><div><div></div><div></div></div></div> | <div><div><div></div><div></div></div> 40</div>         |   | <div><div><div></div><div></div></div></div>            | <div><div><div></div><div></div><div></div></div> 20</div>                                                                                                                                                                                                                                       |                                                            | <div><div><div></div><div></div></div></div>    | <div><div><div></div><div></div><div></div></div> 50</div>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                         |                                                 |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                         |                                                            |                                              |                                                            |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                 |   |                                                         |                                                            |                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                            |  |                                                         |  |  |                                              |                                                            |  |
| <div><div><div></div><div></div></div></div>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | <div><div><div></div><div></div></div> 40</div>             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                              |                                                         |   |                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                            |                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                 |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                         |                                                            |                                              |                                                            |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                 |   |                                                         |                                                            |                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                            |  |                                                         |  |  |                                              |                                                            |  |
| <div><div><div></div><div></div></div></div>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | <div><div><div></div><div></div><div></div></div> 20</div>  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                              |                                                         |   |                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                            |                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                 |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                         |                                                            |                                              |                                                            |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                 |   |                                                         |                                                            |                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                            |  |                                                         |  |  |                                              |                                                            |  |
| <div><div><div></div><div></div></div></div>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | <div><div><div></div><div></div><div></div></div> 50</div>  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                              |                                                         |   |                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                            |                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                 |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                         |                                                            |                                              |                                                            |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                 |   |                                                         |                                                            |                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                            |  |                                                         |  |  |                                              |                                                            |  |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                             | <div>C4 <math>\sigma^2 = 1700</math></div> <table><tr><td><div><div><div></div><div></div></div></div></td><td><div><div><div></div><div></div></div> 20</div></td><td></td></tr><tr><td><div><div><div></div><div></div><div></div></div></div></td><td>0</td><td></td></tr><tr><td><div><div><div></div><div></div></div></div></td><td><div><div><div></div><div></div><div></div></div> 100</div></td><td></td></tr></table>                                              | <div><div><div></div><div></div></div></div> | <div><div><div></div><div></div></div> 20</div>         |   | <div><div><div></div><div></div><div></div></div></div> | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                            | <div><div><div></div><div></div></div></div>    | <div><div><div></div><div></div><div></div></div> 100</div>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                         |                                                 |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                         |                                                            |                                              |                                                            |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                 |   |                                                         |                                                            |                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                            |  |                                                         |  |  |                                              |                                                            |  |
| <div><div><div></div><div></div></div></div>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | <div><div><div></div><div></div></div> 20</div>             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                              |                                                         |   |                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                            |                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                 |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                         |                                                            |                                              |                                                            |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                 |   |                                                         |                                                            |                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                            |  |                                                         |  |  |                                              |                                                            |  |
| <div><div><div></div><div></div><div></div></div></div>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 0                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                              |                                                         |   |                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                            |                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                 |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                         |                                                            |                                              |                                                            |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                 |   |                                                         |                                                            |                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                            |  |                                                         |  |  |                                              |                                                            |  |
| <div><div><div></div><div></div></div></div>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | <div><div><div></div><div></div><div></div></div> 100</div> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                              |                                                         |   |                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                            |                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                 |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                         |                                                            |                                              |                                                            |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                 |   |                                                         |                                                            |                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                         |                                                            |  |                                                         |  |  |                                              |                                                            |  |

Abb. 3: Erwartungswerte und Varianzen der einzelnen Felder

Eine hohe Varianz beeinflusst also vor allem den durchschnittlichen Gewinn auf kurze Sicht – je kleiner die Varianz, desto kürzer ist die Dauer, bis sich der durchschnittliche Gewinn um den Erwartungswert stabilisiert. Dies ist durch durchgeführte Simulationen in den Abbildungen 4 und 5 zu erkennen. Dabei wurde der durchschnittliche Gewinn pro Würfelwurf der Felder C1, C2 und C4 (siehe Abbildung 3), welche alle denselben Erwartungswert  $\mu = 10 \text{ M€}$  haben, in Abhängigkeit von der Anzahl der Würfe 12-mal simuliert. Das bedeutet, dass eine der vielen Linien in Abbildung 4 einem zufällig entstandenen Verlauf des tatsächlichen durchschnittlichen Gewinns pro Würfelwurf entspricht. Es zeigt sich folgendes Bild: Auf lange Sicht stellt sich bei allen Feldern ein mittlerer Gewinn von 10 M€ ein. Bei Feld C1 (Abbildung 3: gelb) gilt dies auch auf kurze Sicht, da der Gewinn pro Würfelwurf konstant 10 M€ beträgt. Dies gestaltet sich bei den Feldern C2 (rot) und C4 (blau) ganz anders. Es zeigt sich, dass der durchschnittliche Gewinn vor allem beim Feld C4 zu Beginn („auf kurze Sicht“) sehr stark schwankt und sich erst bei ausreichend vielen Würfeln um den Wert 10 einpendelt. Es ist zu beachten, dass es auch Spielszenarien gibt, in welchen man trotz Vorhandensein eines positiven Erwartungswertes auf kurze Sicht Verlust macht. Dies ist insbesondere in Abbildung 5 durch zwei Spielverläufe exemplarisch noch einmal hervorgehoben. Dabei wird deutlich, dass in manchen Spielrunden Christoph mit seinem Feld C4 „auf kurze Sicht“ auch deutlich mehr oder deutlich weniger Gewinn (oder sogar Verlust) machen könnte als durchschnittlich erwartbar wäre. Da davon auszugehen ist, dass in einem Spiel ein Feld nur begrenzt oft besucht wird, hat die Varianz eine beträchtliche Auswirkung für den Erfolg.

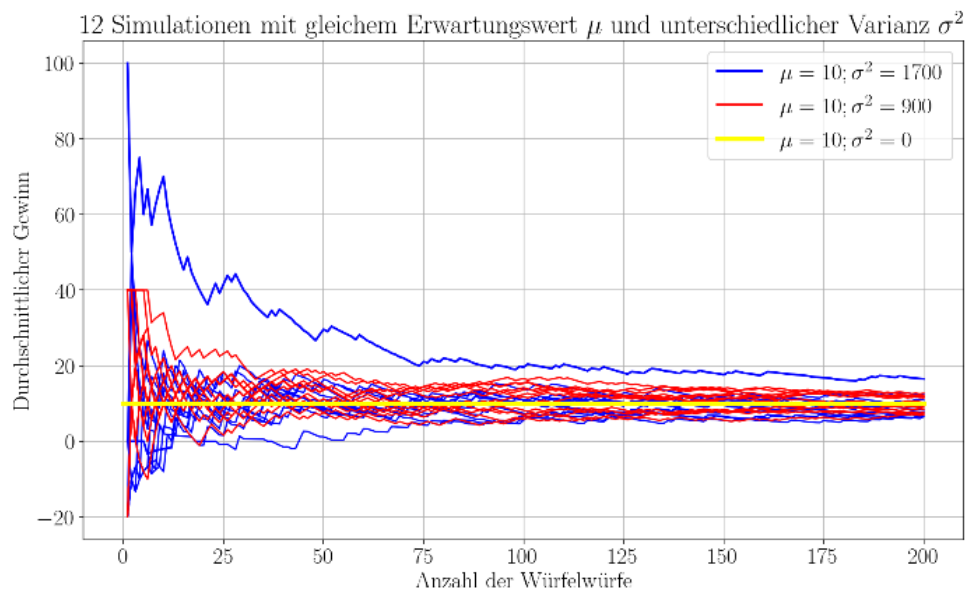


Abb. 4: 12 Simulationen bei 200 Würfeln von drei Feldern mit gleichem Erwartungswert und verschiedener Varianz

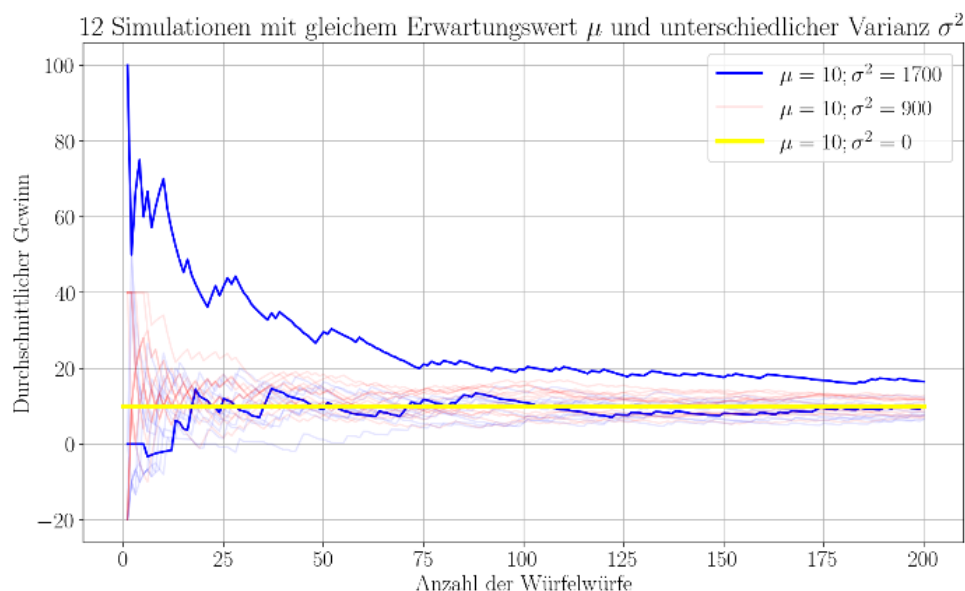


Abb. 5: Zwei hervorgehobene Simulationen mit hoher Varianz; Gewinne / Verluste streuen mehr

Zusätzlich zu den Überlegungen rund um Erwartungswert und Varianz kommen bei diesem Spiel Erfahrungen in Form der verschiedenen Zugänge zur Wahrscheinlichkeit hinzu, denn es wird im Laufe des Spiels durchaus passieren, dass jemand mit einem Feld mit negativem Erwartungswert, aber hoher Varianz auch einmal gewinnt. Dabei gilt: auf lange Sicht werden sich die relativen Häufigkeiten der Augenzahlen des Würfels in etwa um den theoretischen Wert  $1/6$  stabilisieren, sodass sich auf lange Sicht der mittlere Gewinn um dem Erwartungswert stabilisiert und sich eine passende Strategie mit positiven Erwartungswerten als gewinnbringend herausstellt – auf kurze Sicht kann der durchschnittliche Gewinn auf Grund der Varianz sehr stark schwanken.

Schüler:innen könnten es im konkreten Spiel subjektiv und qualitativ als wahrscheinlicher erachten, dass gewisse Augenzahlen häufiger vorkommen. Solche Fehlvorstellungen könnten im Laufe des Spielverlaufs sichtbar werden. Aus der Literatur ist beispielsweise bekannt, dass Schüler:innen fälschlicherweise häufig nicht die Symmetrie der Situation erkennen: Da die

Augenzahl 6 in vielen Spielen eine besondere Rolle spielt, neigen viele dazu zu glauben, dass diese Zahl seltener geworfen wird als die anderen (Tietze et al. 2002).

## Mathoprolly im Mathematikunterricht verschiedener Schulstufen

Nach dem Ansatz des low floor – high ceiling ist das Spielen von Mathoprolly von der Primarstufe bis hin zur Sekundarstufe II möglich. Je nach Alter beziehungsweise Schulstufe lassen sich unterschiedliche Kompetenzen anstreben, was unterschiedlicher Zugänge und Diskussionsanstöße im Unterricht bedarf. Dies wird in den folgenden Abschnitten dargelegt und in Abbildung 6 zur Übersicht in Form einer Zeitleiste dargestellt.

### Mathoprolly in der Primarstufe

In der Primarstufe liegt der Fokus auf Datensammlung, deren Darstellungen sowie qualitativer Beschreibungen von Wahrscheinlichkeiten (Abbildung 6). In diesem Zusammenhang ermöglicht Mathoprolly die Erstellung von Strichlisten und Tabellen mit absoluten Häufigkeiten sowie die qualitative Beschreibung der Tabelle im Kontext des Spiels.

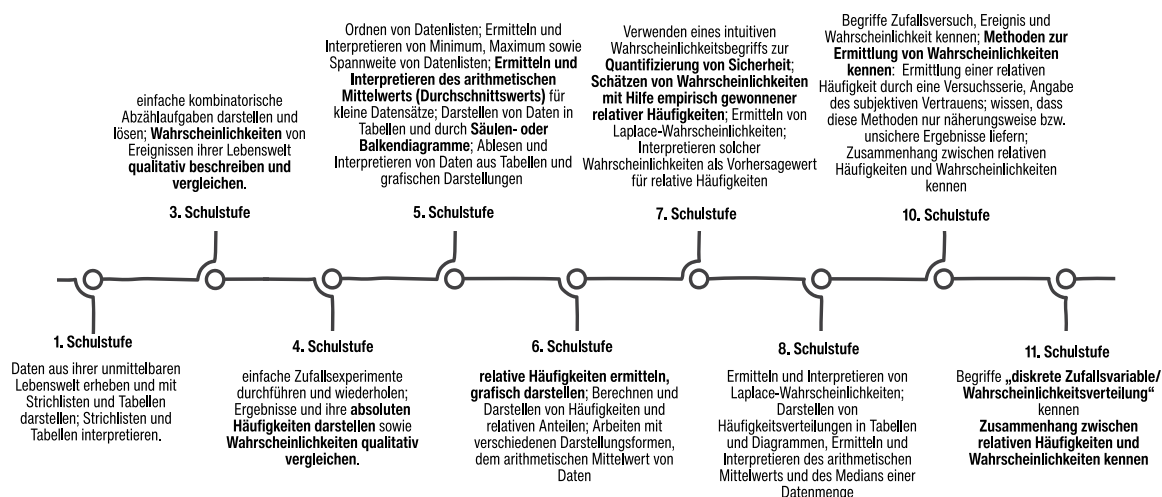


Abb. 6: Zeitleiste (Lehrplan der Volksschule 2024; Lehrplan der AHS 2024)

Nach Erklärung der Spielregeln sollen Schüler:innen in der ersten Phase des Spielens (1) (siehe Tabelle 1) individuelle Erfahrungen machen und werden auch auf Grund der probabilistischen Eigenschaft des Spiels natürlich verschiedene Tabellen erstellen. Diese Phase stellt einen Prozess des Erkundens (Prediger et al. 2013) dar, welcher dem Erkunden noch unbekannter mathematischer Zusammenhänge und als Basis für den Begriffsbildungsprozess dient. Im anschließenden ersten Reflexionsprozess innerhalb der Gruppe (siehe Tabelle 1) sollen die Ideen, gefundenen Muster und Strukturen im Zuge des Prozesses des Ordnen (Prediger et al. 2013) systematisiert werden – insbesondere unter Lenkung der Lehrkraft, da individuelle Kenntnisse, die nicht in einen systematischen und strukturierten Zusammenhang gebracht werden, isoliert bleiben und höchstens als aneinandergereihte Informationen wahrgenommen werden (Barzel et al. 2012). Die Muster und Strukturen können dabei auf verschiedenen Ebenen (Friel et al. 2001) diskutiert werden.

**Beschreibende Ebene:** Die Schüler:innen analysieren die gesammelten Daten, z. B. durch Anleitung der Lehrkraft wie „Welche Augenzahlen wurden wie oft geworfen?“. Schüler:innen

könnten wie folgt antworten: „Die Augenzahlen 1 und 2 wurden 6-mal geworfen, während die Augenzahlen 3, 4, 5 und 6 insgesamt 16-mal geworfen wurden.“

**Vergleichende Ebene:** Hier sollen Schüler:innen die Häufigkeiten vergleichen (mehr/ weniger; doppelt so oft/ halb so oft; in etwa gleich oft ...), z. B. „Die Augenzahlen 3, 4, 5 und 6 wurden öfter geworfen als die Augenzahlen 1 und 2.“

**Interpretierende Ebene:** Die Schüler:innen diskutieren mögliche Ursachen für die Häufigkeiten, indem sie qualitative Wahrscheinlichkeitsaussagen treffen, z. B. „Die Augenzahlen 3, 4, 5 und 6 sind wahrscheinlicher als die Augenzahlen 1 oder 2, da sie häufiger auftreten.“

Betrachtet man das Spiel aus Perspektive des Erwartungswertes, so kommt noch hinzu, dass Gewinn und Verlust betrachtet werden müssen. Insbesondere qualitative Überlegungen wie „Ich kann bei vier verschiedenen Augenzahlen 40 M gewinnen, und bei 2 Augenzahlen 20 M verlieren, also ist das Feld (D2) besser für mich“ oder Gegenüberstellung von Gewinn und Verlust bei Feldern mit Erwartungswert  $\mu = 0 \text{ M}$  sollen nach dem ersten Spieldurchgang diskutiert werden. Diese Muster, Strukturen und Argumentationen können sich von Gruppe zu Gruppe während der ersten Phase des Spiels unterscheiden. Die Gruppen sollen sich für eine Strategie entscheiden und das Spiel nochmals durchspielen (Tabelle 1). Abschließend sollen im Plenum die gefundenen Strategien diskutiert und systematisiert werden. Die Schüler:innen sind angehalten, ihre Strategien zu äußern bzw. zu erläutern, ob ihre vereinbarten Strategien zielführend waren. Auf Grund des Vorhandenseins mehrere Gruppen sollen Gemeinsamkeiten und Unterschiede gesammelt, strukturiert und diskutiert werden sowie auf qualitativer Ebene argumentiert werden. Dabei kann zur qualitativen Beschreibung auf die Strichlisten/ Häufigkeitstabellen im Kontext der frequentistischen Wahrscheinlichkeit zurückgegriffen werden. Um die Idee der frequentistischen Wahrscheinlichkeiten zu verdeutlichen („auf lange Sicht“) bietet sich die Addition aller Häufigkeiten eines bestimmten Feldes aller Gruppen an, da die relativen Häufigkeiten der einzelnen Gruppen auch streuen können bzw. werden. Es ist hierbei darauf zu achten, dass sich die absoluten Häufigkeiten der gewürfelten Augenzahlen nicht zwingend ausgleichen müssen. Lediglich die relativen Häufigkeiten stabilisieren sich. Konkret ist damit die falsche Vorstellung gemeint, dass wenn die Augenzahlen 2 bis 6 jeweils schon 5-mal gewürfelt wurden, die Augenzahl 1 hingegen erst 4-mal, dass dann die Augenzahl 1 wahrscheinlicher ist. Diese Vorstellung ist falsch! Sie können diesem Fehlschluss mit einem Spiel entgegen: Lassen Sie die Hälfte der Schüler:innen eine Münze 200-mal werfen und 0 für Zahl und 1 für Kopf notieren. Die andere Hälfte der Schüler:innen denkt sich eine „zufällige“ Zahlenfolge aus. Anschließend behaupten Sie, Sie können die echten Münzwürfe von den erfundenen unterscheiden, denn Schüler:innen werden es eher vermeiden, dass öfter als drei oder viermal Zahl/ Kopf in Folge kommt bzw. die Liste der ausgedachten Zahlenfolge wird regelmäßiger aussehen, da sie glauben, dass sich die Häufigkeiten ausgleichen müssen (Idee von Univ.-Prof. Mag. Dr. Walter Schachermayer, siehe Katalenić 2016). Außerdem kann die qualitative Beurteilung von Wahrscheinlichkeiten (4. Schulstufe) auch auf theoretischer Ebene (Laplace Wahrscheinlichkeit) stattfinden, welche am Feld optisch mit der Anzahl der Würfel dargestellt ist, denn mehr Würfelchen bedeuten eine höhere Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des jeweiligen Ereignisses. Die Begriffe des Erwartungswertes und der Varianz werden im Spiel nicht gebraucht oder verwendet. Stattdessen kann mithilfe dieses Spiels ein präformales Verständnis zu diesen Phänomenen geschaffen werden.

## Mathoprolly in der Sekundarstufe

In der Sekundarstufe – siehe dazu wieder Abbildung 6 – kann darauf aufbauend mit dem arithmetischen Mittel sowie Maximum, Minimum und Spannweite argumentiert werden. Außerdem können die präformalen Vorstellungen formalisiert werden. Die gewonnenen Daten in Form von Strichlisten auf den Feldern können als Häufigkeitsverteilungen (relativ oder absolut) dargestellt werden (5. / 6. Schulstufe), sowie die genannten Zugänge zum Wahrscheinlichkeitsbegriff explizit (7. Schulstufe) diskutiert werden. Die Besonderheit von Mathoprolly ist, dass das Spiel sogar die Möglichkeit der Erarbeitung von Themen der Sekundarstufe II zulässt – beispielsweise die Mathematisierung des Spiels durch Zufallsvariablen, Ereignisse und dazugehörige Wahrscheinlichkeiten (10. Schulstufe) sowie die konkrete Bestimmung der Erwartungswerte und Varianzen der einzelnen Felder, um formal über Spielstrategien nachzudenken. Außerdem können die in der Sekundarstufe I erarbeiteten Häufigkeitsverteilung als Anlass genommen werden, um den Begriff der „diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilung“ sowie deren Eigenschaften zu diskutieren.

## Diskussion und Ausblick

Die vorgestellten Überlegungen rund um Mathoprolly könnte man mit dem pädagogischen Ansatz *low floor – high ceiling* zusammenfassen. Mathematisches Lernen kann durch Aktivitäten bereichert und auch gefördert werden, die einen niedrigen Einstieg (*low floor*) aber ein hohes Maß an Entwicklungsmöglichkeit (*high ceiling*) für Schüler:innen bieten. Ein niedriger Einstieg ermöglicht es Schüler:innen auch mit minimalem Fachwissen zu beginnen, während ein hohes Maß an Entwicklungsmöglichkeit ihnen die Möglichkeit geben, über ihr eigenes Niveau hinaus zu denken und zu lernen (English 2017). Mathoprolly ist spielbar ohne curriculares Vorwissen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die nötigen Fähigkeiten beschränken sich auf einfache arithmetische Fertigkeiten, sodass die Spiele selbst schon im Laufe der Primarstufe spielbar sind. Je nach Ziel kann auf unterschiedlichen Niveaus über die Inhalte der Spiele diskutiert werden, beispielsweise könnte für jüngere Schüler:innen „nur“ eine Diskussion über die beste Spielstrategie erfolgen, für ältere Schüler:innen auch ein Überführen in Formalismen stattfinden. In unserer Analyse der verschiedenen Spiele haben wir uns auf bestimmte Schulstufen und die zu erwerbenden Kompetenzen konzentriert. Dies liegt zum einen daran, dass wir die Zugänge zum Wahrscheinlichkeitsbegriff (Laakmann & Schacht, 2019) und deren Verbindungen zu statistischen Kennzahlen wie der relativen Häufigkeit auch im vorliegenden Kontext als bedeutend erachten: (a) frequentistische Wahrscheinlichkeit (*Relative Häufigkeit als Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit*), (b) Laplace-Wahrscheinlichkeiten (*Wahrscheinlichkeit als Anteil*) sowie die (c) subjektive Wahrscheinlichkeit, welche auf die eigenen (nicht zwangsläufig korrekten) *Erfahrungen, Kenntnisse oder Intuitionen* zurückgreift.

Zum anderen hat der Erwartungswert, ein zentrales Konzept der Wahrscheinlichkeitsrechnung, welcher sich mit dem arithmetischen Mittel in der Statistik vergleichen lässt (Krüger et al. 2015), eine hohe praktische Relevanz. Er ist entscheidend für die Vorhersage von Gewinnen und Verlusten sowie für Entscheidungsprozesse (Investitionen, Risikomanagement von Versicherungen, usw.).

In bereits gespielten Spielrunden konnten wir bereits unterschiedliche Strategien und Argumentationen der Spielenden beobachten – unter anderem hinsichtlich der Risikofreudigkeit

beim Kauf von Feldern mit „schlechterem“ Erwartungswert, aber hoher Varianz. Für aussagekräftige Ergebnisse hierzu braucht es jedoch genauere empirische Untersuchungen.

Als Spielerweiterung (besonders in der Sekundarstufe II) könnte die Regel eingeführt werden, dass eine Person auf ihrem eigenen Feld nochmal würfeln darf: Wenn sie eine  $\square$  würfelt, erhält sie 100 M von der Bank. Dadurch ändert sich die Überlegung, ein Feld zu kaufen, da auch Felder mit negativem Erwartungswert einen großen Nutzen haben könnten. Aufgrund der Komplexität der Überlegungen empfehlen wir aber, diese Zusatzregel nur für fortgeschrittene Lernende einzusetzen.

## Literatur

- Armstrong, A. (2021). *Playing Settlers of Catan Enhances Student Learning of Probability in Liberal Arts Mathematics*. PRIMUS, 31(10), 1136–1148.  
<https://doi.org/10.1080/10511970.2020.1818335>
- Barzel, B., Hussmann, S., Leuders, T., & Prediger, S. (2012). *Nachhaltig lernen durch aktives Systematisieren und Sichern—Konzept und Umsetzung in der mathewerkstatt*. Beiträge zum Mathematikunterricht, 93–96.
- Bewersdorff, J. (2018). *Glück, Logik und Bluff*. Springer Fachmedien Wiesbaden.
- Engert-Oostingh, I., Borovcnik, M., & Fuchs K. J. (2017). *Stochastik spielend unterrichten*. Mathematik im Unterricht, 2017(8), 115–126.
- English, L. D. (2017). *Advancing Elementary and Middle School STEM Education*. International Journal of Science and Mathematics Education, 15(S1), 5–24.  
<https://doi.org/10.1007/s10763-017-9802-x>
- Friel, S. N., Curcio, F. R., & Bright, G. W. (2001). *Making Sense of Graphs: Critical Factors Influencing Comprehension and Instructional Implications*. Journal for Research in Mathematics Education, 32(2), 124–158. <https://doi.org/10.2307/749671>
- Katalenić, T. (2016). „Entdeckendes Lernen“ Ausgewählte Aufgaben zur Aufhebung von Fehlschlüssen und -vorstellungen im Mathematikunterricht. Masterarbeit. Universität Wien.  
<https://doi.org/10.25365/thesis.43160>
- Krüger, K., Sikora, C., & Sill, H.-D. (2015). *Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I*. Springer Spektrum.
- Laakmann, H., & Schacht, F. (2019). *Wahrscheinlich oder wahrscheinlich nicht? Aufbau eines vorstellungsorientierten Wahrscheinlichkeitsbegriffs in der Primarstufe und den Sekundarstufen*. In A. Büchter, M. Glade, R. Herold-Blasius, M. Klinger, F. Schacht, & P. Scherer (Hrsg.), *Vielfältige Zugänge zum Mathematikunterricht* (S. 77–90). Springer Fachmedien Wiesbaden. [https://doi.org/10.1007/978-3-658-24292-3\\_6](https://doi.org/10.1007/978-3-658-24292-3_6)
- Lehrplan der AHS (BGBl. Nr. 88/1985) in der Fassung BGBl. II Nr. 204/2024
- Lehrplan der Volksschule (BGBl. Nr. 134/1963) in der Fassung BGBl. II Nr. 204/2024
- Leuders, T. (2009). *Spielst du noch - oder denkst du schon? Produktive Erarbeitungsspiele*. In PM: Praxis der Mathematik in der Schule (Bd. 51, Nummer 25, S. 1–9).

Prediger, S., Leuders, T., Barzel, B., & Hussmann, S. (2013). *Anknüpfen, Erkunden, Ordnen, Vertiefen. Ein Modell zur Strukturierung von Design und Unterrichtshandeln*. Beiträge zum Mathematikunterricht, 769–772.

Prediger, S. (2005). *Wenn man Schwein gehabt hat, kann man zwei Dreien kriegen. Fallbeispiel zu Überschneidungseffekten bei stochastischen Vorstellungen*. In: Graumann, G. (Hrsg.) Beiträge zum Mathematikunterricht 2005 Vorträge auf der 39. Tagung für Didaktik der Mathematik, Bielefeld, 28.2. bis 4.3.2005. S. 445–448. Franzbecker, Hildesheim.

Ramani, G. B., & Siegler, R. S. (2008). *Promoting broad and stable improvements in low-income children's numerical knowledge through playing number board games*. Child Development, 79(2), 375–394. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2007.01131.x>

Sill, H.-D., & Kurtzmann, G. S. (2019). *Didaktik der Stochastik in der Primarstufe* (F. Padberg & A. Büchter, Hrsg.). Springer Spektrum.

Tietze, U.-P., Klika, M., & Wolpers, H. (Hrsg.). (2002). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II*. Vieweg+Teubner Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-322-83144-6>

## Zur Autorin/Zum Autor

Mag. Evita LERCHENBERGER, PhD, studierte Mathematik und Musik, unterrichtete an einem Grazer Gymnasium und promovierte in Fachdidaktik Mathematik an der Universität Graz, wo sie aktuell in Lehre und Forschung tätig ist. Sie ist Mitarbeiterin beim Känguru der Mathematik, Itemwriterin für die Mathematik-Reifeprüfung und Mitinitiatorin des Interessensförderungsprojekts „Mathe-mag-ich!“ und beschäftigt sich dadurch auch mit mathematischen Spielen.

Christoph OBERBUCHER, BEd BSc MEd, studierte Mathematik und Physik und promoviert derzeit an der Universität Graz, wo er als Universitätsassistent arbeitet. Er verfügt über Unterrichtserfahrung in der Sekundarstufe, leitet Lehrveranstaltungen zur Didaktik der Stochastik und ist ebenfalls im Projekt „Mathe-mag-ich!“ sowie beim Känguru der Mathematik tätig.