

Victoria Döller & Stefan Götz

Einheitsquadrate und Baumdiagramme – zwei Seiten einer Medaille

Zusammenfassung

Im Beitrag werden Baumdiagramme und Einheitsquadrate für die Veranschaulichung sowohl von (absoluten und relativen) Häufigkeiten als auch von Wahrscheinlichkeiten eingesetzt. Während Einheitsquadraten primär zur Darstellung der Ausprägungen zweidimensionaler dichotomer nominalskalierten Merkmale verwendet werden, spielen Baumdiagramme eine wichtige Rolle bei (zweistufigen) Zufallsexperimenten. Im Beitrag zeigen wir, dass sich die Methoden als zwei Seiten einer Medaille sehr gut ergänzen. Für einen praktikablen Einsatz im Unterricht wird das Programm ProVis vorgestellt, mit dem beide schnell und einfach aus Vierfeldertafeln erstellt und voneinander abgeleitet werden können. Für die Arbeit mit Zufallsexperimenten können in ProVis das Urnenmodell simuliert und die entsprechenden Diagramme erstellt werden.

Einleitung

Im neuen, ab dem Schuljahr 2023/24 aufsteigend in Kraft tretenden Lehrplan für den Unterrichtsgegenstand Mathematik in der Sekundarstufe 1 sind nun auch Themen der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der siebenten und achten Schulstufe vorgesehen. Das „Ermitteln von Wahrscheinlichkeiten bei ein- und zweistufigen Zufallsexperimenten (auch mit Hilfe von Baumdiagrammen)“³ in der achten Schulstufe ist eine zentrale Forderung in diesem Zusammenhang. Eine weitere Neuerung betrifft die Statistik in der Sekundarstufe 1: Das „Darstellen, Ergänzen und Interpretieren von absoluten und relativen Häufigkeiten in Kreuztabellen, insbesondere in Vierfeldertafeln“ kann mit dichotomen, nominalskalierten zweidimensionalen Daten realisiert werden. Das Arbeiten mit absoluten Häufigkeiten und das Ermitteln von Wahrscheinlichkeiten knüpfen an eine Forderung des neuen Lehrplans Mathematik für die Volksschule an: „einfache Zufallsexperimente durchführen und wiederholen; Ergebnisse und ihre absoluten Häufigkeiten darstellen sowie Wahrscheinlichkeiten qualitativ vergleichen.“⁴

Um diesen aktuellen Herausforderungen im Unterricht gerecht werden zu können, ist die Software ProVis – Probability Visualized von der Erstautorin entwickelt worden. ProVis ist ein frei verfügbares Tool, das die einfache Verwendung von Einheitsquadraten und Baumdiagrammen für den Unterricht unterstützt und gratis heruntergeladen werden kann⁵. Für die Entwicklung wurden sieben Anforderungen formuliert, vgl. Döller 2020:

³<https://www.paedagogikpaket.at/massnahmen/lehrplaene-neu/materialien-zu-den-unterrichtsgegenstaenden.html>

⁴<https://www.ris.bka.gv.at/NormDokument.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10009275&Artikel=&Paragraf=&Anlage=1&Uebergangsrecht=>

⁵<https://www.omilab.org/activities/projects/details/?id=126>

1. *Verschiedene Typen von Baumdiagrammen realisieren:* ProVis unterstützt die Modellierung von Wahrscheinlichkeitsbäumen und Häufigkeitsbäumen, von vollständigen und unvollständigen, sowie von reduzierten Bäumen.
2. *Rechenarbeit automatisieren:* Die Software ermöglicht die automatische Berechnung der Häufigkeiten bzw. Wahrscheinlichkeiten in einem Baum anhand der Pfadregeln.
3. *Baumdiagramme nach dem Spiralprinzip unterstützen:* Schülerinnen und Schülern wird ein niederschwelliger Einstieg in die Welt der Baumdiagramme ermöglicht. Am Anfang kann der gedankliche Prozess der Baumkonstruktion Schritt für Schritt und Ereignis für Ereignis durchlaufen und der Baum optional mit Wahrscheinlichkeiten oder Häufigkeiten versehen werden. Darüber hinaus werden für ein fortgeschrittenes Lernstadium nützliche Funktionen angeboten, um händisch berechnete Wahrscheinlichkeiten zu überprüfen oder Baumdiagramme aus wenigen Angaben zu dessen Teilvorgängen oder auch aus den Angaben eines klassischen Urnenszenarios zu generieren.
4. *Einheitsquadrate automatisch erstellen:* ProVis ermöglicht eine schnelle und einfache Erstellung von Einheitsquadraten direkt aus den Informationen einer Vierfeldertafel. Darüber hinaus ist das Ableiten des transponierten Einheitsquadrats durch ProVis möglich. Einheitsquadrate können weiters unter gegebenen Voraussetzungen direkt aus dem Urnenszenario erstellt werden. Die komplexe Konstruktion fällt damit weg und die Vorteile dieser Darstellungsform können ohne Aufwand genutzt werden.
5. *Baumdiagramm und Einheitsquadrat vernetzen:* Besonderes Potential ergibt sich aus dem verschränkten Einsatz beider Visualisierungsmethoden. ProVis ermöglicht es, aus einem Einheitsquadrat das entsprechende Baumdiagramm abzuleiten. Erfüllt ein Baumdiagramm die notwendigen Voraussetzungen, kann auch umgekehrt das Einheitsquadrat aus einem Baum erstellt werden. Beide Darstellungsmöglichkeiten können aus dem klassischen Urnenszenario gewonnen werden.
6. *Grafische Darstellung dynamisieren, Visualisierung unterstützen:* ProVis zielt auf eine übersichtliche, situationsadäquate Darstellung ab. Hierzu zählen Möglichkeiten Bäume zu bearbeiten, Änderungen wie neue Äste einheitlich zu integrieren und einen Wechsel zwischen horizontaler und vertikaler Anordnung durchzuführen. Weitere hilfreiche Funktionen sind etwa die visuelle Differenzierung von besonderen Knoten in Baumdiagrammen oder die pointierte Hervorhebung des Assoziationsmaßes und anderer Strecken und Flächen in Einheitsquadraten. Ebenso sind das Skalieren der Seitenlänge eines Einheitsquadrats und die einheitliche Ausrichtung von Bäumen möglich.
7. *Zum Experimentieren anregen:* Für einen möglichst nachhaltigen Lerneffekt kann ProVis durch die effiziente Nutzbarkeit von Baumdiagrammen und Einheitsquadraten für Aufgabenstellungen eingesetzt werden, die Schülerinnen und Schüler zu „Was wäre, wenn . . .“-Fragen anregen. Etwa können die Werte in einem Einheitsquadrat variiert und die Änderung der Flächen und Strecken beobachtet werden oder es kann untersucht werden, wie sich die Baumstruktur ändert, wenn der Ereignisraum eines Teilvorgangs angepasst wird oder die Reihenfolge der Teilvorgänge verändert wird. Zusätzlich sollen neue Perspektiven eröffnet werden, wie zum Beispiel durch die Möglichkeit der Ableitung der einen Darstellungsform aus der anderen.

Es ist den Autor:innen kein anderes (freies) Programm bekannt, das aus den Daten von Vierfeldertafeln Einheitsquadrate und Baumdiagramme generiert, so dass eine Verknüpfung dieser drei Darstellungsarten gegeben ist.

Bildungsabschlüsse 2022 in Österreich

Einführendes Beispiel

Im Sinne eines datenorientierten Statistikunterrichts wird im Folgenden eine Vierfeldertafel (Tabelle 1) mit realen Daten diskutiert werden, vgl. Götz & Döller 2020.

	Männer	Frauen	Summe
Mindestens Matura o. Ä.	351 815	448 090	799 905
Schulabschluss ohne Matura	534 131	388 212	922 343
Summe	885 946	836 302	1 722 248

Tabelle 1: Schulbildung 2022 der österreichischen Bevölkerung im Alter von 20 bis 34 Jahren nach Geschlecht⁶

In Tabelle 1 wird die österreichische Bevölkerung im Alter von 20 bis 34 Jahren nach Geschlecht und Schulbildung im Jahre 2022 unterteilt (Daten von der Statistik Austria). Die Vierfeldertafel ist so zu lesen: 534 131 Männer waren 2022 zwischen 20 und 34 Jahren alt und hatten keine Matura oder Ähnliches (z. B. Studienberechtigungsprüfung). Die Einträge der Tafel sind also konjunktive absolute Häufigkeiten. Die Daten von Tabelle 1 können graphisch als sogenanntes Einheitsquadrat dargestellt werden: Abbildung 1, die mit ProVis aus der Vierfeldertafel erzeugt wurde (wie auch die übrigen Abbildungen in diesem Beitrag).

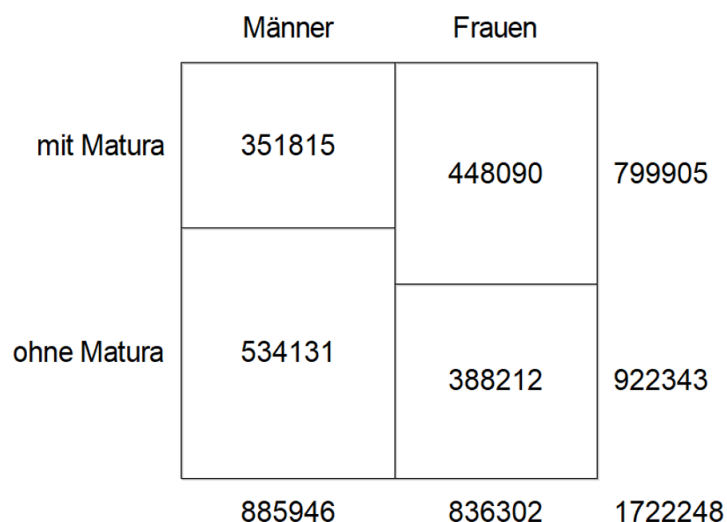


Abb. 4: Schulbildung 2022 der österreichischen Bevölkerung im Alter von 20 bis 34 Jahren nach Geschlecht als Einheitsquadrat

Im Einheitsquadrat werden die absoluten Häufigkeiten aus Tabelle 1 als Flächeninhalte von (Teil-)Rechtecken dargestellt. Die Spaltensummen geben über die Anzahlen das Geschlecht betreffend Auskunft (Abbildung 1 unten), die Zeilensummen beziehen sich auf das Bildungsausmaß (Abbildung 1 rechts). Die Gesamtanzahl der Beteiligten findet sich rechts unten in Abbildung 1

⁶<https://www.statistik.at/statistiken/bevoelkerung-und-soziales/bildung/bildungsstand-der-bevoelkerung>

Konstruktion

Zur Konstruktion und weiteren Interpretation des Einheitsquadrats sind folgende Schritte zu beachten (vgl. Eichler & Vogel 2013, S. 81): Die senkrechte Unterteilung des Quadrats richtet sich nach den relativen Anteilen des sogenannten dominierenden Merkmals, in Abbildung 1 ist das das Geschlecht. Sie befindet sich fast in der Mitte, da die Anzahl der Männer 51,4 % der Alterskohorte ausmacht. Wir gehen nun also zu relativen Häufigkeiten über, um die waagrechten Unterteilungen des Quadrats in Abbildung 1 zu klären. Die gesuchte Höhe des jeweiligen Teilrechtecks multipliziert mit dem relativen Anteil der Männer bzw. Frauen (48,6%) muss die entsprechende relative konjunktive Häufigkeit ergeben. Zum Beispiel ist für die Höhe h des linken oberen Teilrechtecks in Abbildung 1 die Gleichung

$$h \cdot 0,514 = \frac{351815}{1722248}$$

zu lösen. Das Betrachten der relativen Häufigkeiten erklärt auch die Bezeichnung „Einheitsquadrat“: ein Quadrat mit der Seitenlänge 1.

Bedingte relative Häufigkeiten

Die eben bestimmte Höhe h kann als bedingte relative Häufigkeit $h(\text{mit Matura}|\text{Mann})$ interpretiert werden, denn es gilt ja $h = \frac{h(\text{mit Matura} \wedge \text{Mann})}{h(\text{Mann})}$, das heißt die Grundgesamtheit wird im Beispiel auf die Männer eingeschränkt. Abbildung 2 zeigt die vier bedingten relativen Häufigkeiten $h(.|.)$ als Seiten(längen) von Teilrechtecken im Einheitsquadrat, die auch mit ProVis berechnet werden können. Die konjunktiven relativen Häufigkeiten sind als Flächen(inhalte) der Teilrechtecke im Einheitsquadrat in Abbildung 2 dargestellt.

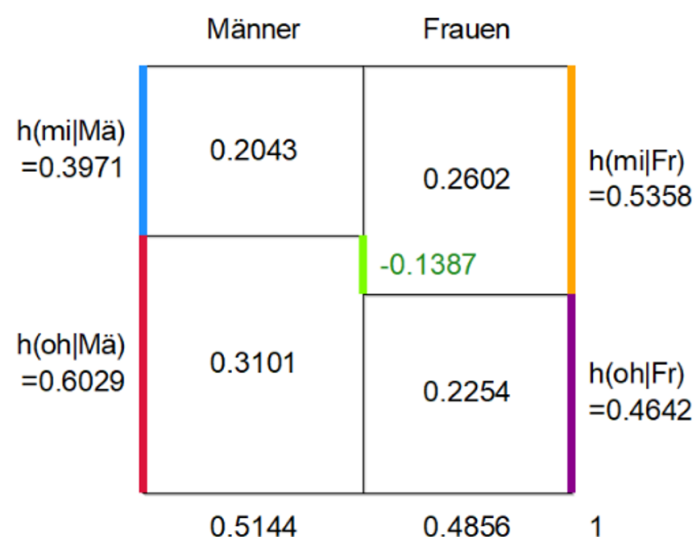


Abb. 2: Einheitsquadrat mit relativen Häufigkeiten im Kontext von Tabelle 1

Assoziationsmaß

Die Differenz zwischen den bedingten relativen Häufigkeiten $h(\text{mit Matura}|\text{Mann})$ und $h(\text{mit Matura}|\text{Frau})$ nennt man das *Assoziationsmaß* $\mathcal{A}$. Es kann betragsmäßig maximal gleich 1 werden. Je größer es ist, desto abhängiger sind beiden Merkmale (hier: Geschlecht und Schulbildung) voneinander. Abbildung 2 lehrt, dass im Beispiel aus Tabelle 1 das Assoziationsmaß $\mathcal{A} = -0,139$ ist. Absolut gesehen, sagt ein Wert meist nicht viel aus (außer in

den Extremfällen, in denen $\mathcal{A}$ nahe null oder eins ist), erst im Vergleich mit anderen Abhängigkeiten gewinnt das Maß an Bedeutung. Zum Beispiel könnten die Daten aus Tabelle 1 mit solchen eine ältere Alterskohorte betreffend verglichen werden.

Unabhängigkeit von Merkmalen

Genau dann ist $\mathcal{A} = 0$, wenn $h(\text{mit Matura} \wedge \text{Mann}) = h(\text{mit Matura}) \cdot h(\text{Mann})$ gilt. Das kann einfach nachgerechnet werden. Das heißt $\mathcal{A} = 0$ bedeutet, dass die Merkmale (hier: Geschlecht und Schulbildung in einer bestimmten Altersgruppe in Österreich 2022) unabhängig voneinander sind.

Transponiertes Einheitsquadrat

Natürlich kann auch die Schulbildung als dominierendes Merkmal aufgefasst werden. Abbildung 3 zeigt das zugehörige transponierte Einheitsquadrat (im Vergleich zum ursprünglichen Einheitsquadrat in Abbildung 2).

Im Allgemeinen stimmt das Assoziationsmaß des ursprünglichen Einheitsquadrats mit dem des transponierten Einheitsquadrats nicht überein, wie die Abbildungen 2 und 3 zeigen. Die Flächeninhalte der Teilrechtecke stimmen in Abbildung 2 mit jenen in Abbildung 3 überein (bis auf die Anordnung in der Nebendiagonale), nicht aber die zugehörigen Seitenlängen, wie man ebenfalls diesen beiden Abbildungen entnehmen kann.

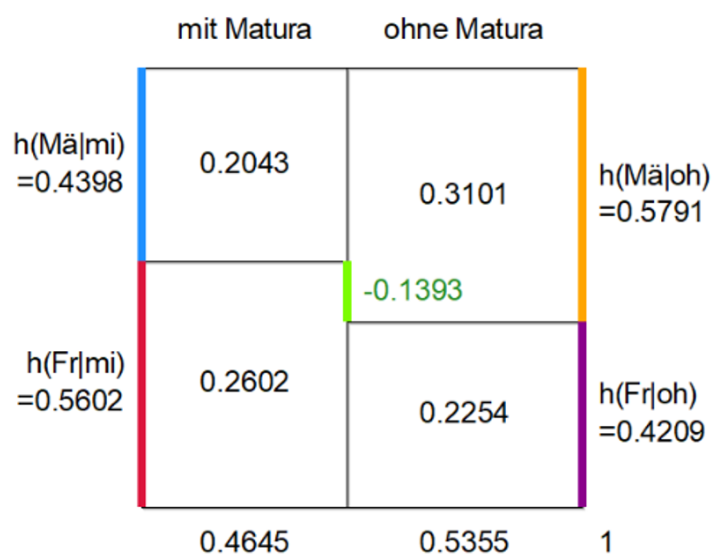


Abb. 3: Transponiertes Einheitsquadrat mit relativen Häufigkeiten im Kontext von Tabelle 1

Urnenexperimente

Im Lehrplan Mathematik für die Sekundarstufe 1 ist in der achten Schulstufe wie in der Einleitung erwähnt die Behandlung zweistufiger Zufallsexperimente mit Hilfe von Baumdiagrammen vorgesehen. Mit ProVis können diese auf Knopfdruck erstellt werden. Üblicherweise werden sogenannte Urnenexperimente als Veranschaulichung solcher Zufallsexperimente herangezogen. Mit der kürzlich veröffentlichten Version von ProVis kann auch diese abgebildet werden.

Einstufige Zufallsexperimente im Gewand des Urnenmodells können ebenfalls mit Technologie simuliert werden⁵. Dabei können absolute Häufigkeiten von gezogenen Kugeln unterschiedlicher Farbe ermittelt werden und so eine Reihung der Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse vorgenommen werden: qualitatives Vergleichen von Wahrscheinlichkeiten, wie es der neue Lehrplan Mathematik für die Volksschule vorsieht².

Ziehen ohne Zurücklegen

Abbildung 4 zeigt ein Experiment mit einer Urne, die 13 Kugeln enthält, acht gelbe und fünf schwarze. Dazu wird in ProVis eine Urne erzeugt, die entsprechend befüllt wird. Dann wird entschieden, ob mit oder ohne Zurücklegen gezogen wird. Es wird zweimal (das ist fix in ProVis!) ohne Zurücklegen gezogen.

Am fertigen Baumdiagramm in Abbildung 4 sind die Pfadregeln erkennbar: $\frac{5}{13} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{39}$ ist die Wahrscheinlichkeit, zuerst eine schwarze, dann eine gelbe Kugel zu ziehen. Die Wahrscheinlichkeit, zwei gleichfärbige Kugeln zu ziehen, ist $\frac{14}{39} + \frac{5}{39} = \frac{19}{39}$ (ProVis kürzt automatisch die auftretenden Brüche. Sollte aus didaktischen Gründen ungekürzte Darstellungen bevorzugt werden, etwa um die Mächtigkeit der Grundgesamtheit zu erhalten, so kann die Angabe der Ziehungswahrscheinlichkeiten händisch angepasst werden.)

Aus der Urne in Abbildung 4 kann in ProVis auch ein Einheitsquadrat abgeleitet werden: Abbildung 5 links. Die eingefärbten Teilrechtecke geben die eben berechnete Wahrscheinlichkeit an, dass zwei gleichfärbige Kugeln gezogen werden. Wichtig ist zu betonen, dass das Einheitsquadrat in Abbildung 5 (bedingte) Wahrscheinlichkeiten zeigt, keine (bedingten) relativen Häufigkeiten wie das Einheitsquadrat in Abbildung 2. Zum Beispiel ist die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, beim zweiten Zug eine gelbe Kugel zu ziehen, wenn beim ersten Zug eine schwarze gezogen wurde, nach Abbildung 4 gleich $\frac{2}{3}$.

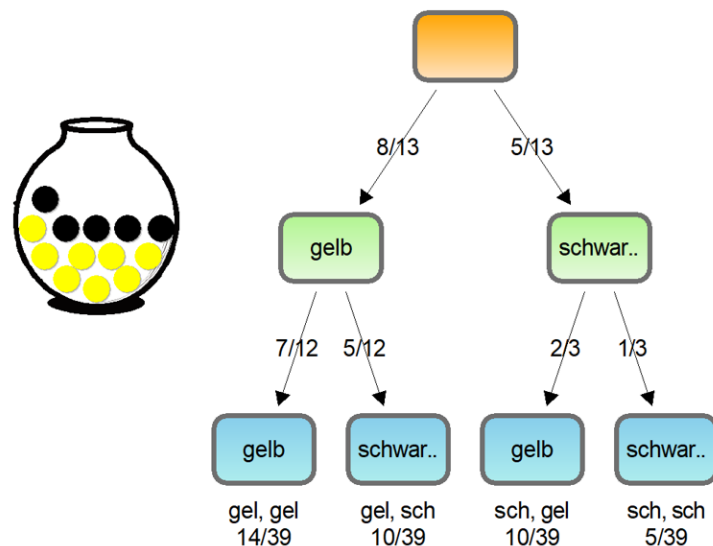


Abb. 4: Aus einer Urne wird zwei Mal ohne Zurücklegen gezogen – Baumdiagramm

Invarianz von Vorschau und Rückschau

Im Kontext unüblich, aber dennoch interessant ist die folgende Beobachtung: das transponierte Einheitsquadrat in Abbildung 5 rechts sieht genauso aus wie das ursprüngliche in Abbildung 5 links. Im Kontext bedeutet das, dass der zweite Zug nun das dominierende Merkmal ist. Auch bei ihm kann gelb oder schwarz gezogen werden. Aus Abbildung 5 rechts kann die Wahrscheinlichkeit

$\frac{10}{39} + \frac{5}{39} = \frac{15}{39} = \frac{5}{13}$ dafür, dass beim zweiten Zug eine schwarze Kugel gezogen wird, abgelesen werden. Sie entspricht der Wahrscheinlichkeit, beim ersten Zug eine schwarze Kugel zu ziehen (Abbildung 4). Damit ist die senkrechte Unterteilung im transponierten Einheitsquadrat gleich der im ursprünglichen. Da nun auch die Wahrscheinlichkeit, zweimal eine schwarze bzw. gelbe Kugel zu ziehen, unabhängig davon ist, welcher Zug das dominierende Merkmal ist, ist auch die waagrechte Unterteilung im transponierten Einheitsquadrat gleich der im ursprünglichen. Das gilt auch allgemein.

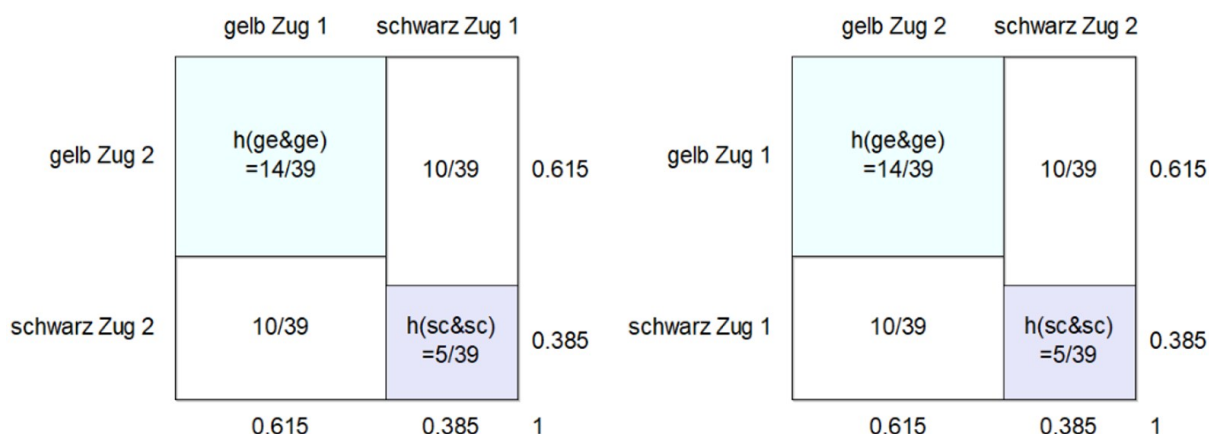


Abb. 5: Aus einer Urne wird zwei Mal ohne Zurücklegen gezogen – (transponiertes) Einheitsquadrat

Die Wahrscheinlichkeit, dass im zweiten Zug eine gelbe Kugel gezogen wird, entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass beim ersten Zug eine gelbe Kugel gezogen wurde. Es seien g gelbe und s schwarze Kugeln in der Urne, es werde zweimal ohne Zurücklegen gezogen. Dann ist $P(2 \text{ gelb}) = \frac{g-1}{g+s-1} \cdot \frac{g}{g+s} + \frac{g}{g+s-1} \cdot \frac{s}{g+s} = \frac{g}{g+s-1} \cdot \left(\frac{g-1}{g+s} + \frac{s}{g+s} \right) = \frac{g}{g+s-1} \cdot \frac{g+s-1}{g+s} = \frac{g}{g+s} = P(1 \text{ gelb})$. Dabei bedeuten "P"(2 "gelb"), dass beim zweiten Zuge eine gelbe Kugel gezogen wird, und entsprechend "P"(1 "gelb"), dass beim ersten Zug eine gelbe Kugel gezogen wird. Das ist überraschend, dass die Vorgeschichte keinen Einfluss auf die a priori Ziehungswahrscheinlichkeit danach hat. Das kann noch einmal verallgemeinert werden. In einer Urne seien N Kugeln, S davon sind schwarz, $N - S$ gelb. Es werde N -mal ohne Zurücklegen aus der Urne gezogen. Für jede Ziehung Z_i mit $1 \leq i \leq N$ gilt a priori für das Ziehen einer schwarzen Kugel, dass $P(Z_i = \text{schwarz}) = \frac{S}{N}$. Unter Berücksichtigung der Reihenfolge der Ziehungen gibt es a priori S schwarze Kugeln für den i -ten Zug und $(N - 1)!$ Möglichkeiten, a priori die restlichen $N - 1$ Kugeln auf die anderen $N - 1$ Züge zu verteilen. Das sind $S \cdot (N - 1)!$ günstige Fälle. Möglich sind $N!$ Fälle. Division Anzahl der günstigen durch Anzahl der möglichen Fälle liefert die Behauptung.

Was bedeutet nun die „Stufe“ in Abbildung 5, das Assoziationsmaß $\mathcal{A}$ in diesem Kontext? Ihre Höhe ist $P(\text{gelb}|\text{schwarz}) - P(\text{gelb}|\text{gelb}) = \frac{2}{3} - \frac{7}{12} = \frac{1}{12}$ nach Abbildung 4. Dabei bezeichnet der zweite Eintrag in $P(.|.)$ das Ergebnis des ersten Zuges (die „Bedingung“). Um verschiedene Werte von Assoziationsmaßen miteinander vergleichen zu können, seien wiederum g gelbe und s schwarze Kugeln in der Urne, wieder werde zweimal ohne Zurücklegen gezogen. Eine einfache Rechnung ergibt $|\mathcal{A}| = \frac{1}{g+s-1}$ für die „Stufenhöhe“ z. B. in Abbildung 5. Das heißt, je mehr Kugeln in der Urne liegen, desto weniger hängt das Ergebnis des zweiten Zuges von jenem des ersten ab.

Ziehen mit Zurücklegen

Wenn aus der Urne mit fünf schwarzen und acht gelben Kugeln (Abbildung 4) zweimal mit Zurücklegen gezogen wird, so bilden die waagrechte und senkrechte Unterteilung im zugehörigen Einheitsquadrat ein Kreuz. Das heißt, die „Stufe“ ist verschwunden, das Assoziationsmaß ist gleich null. Im Kontext bedeutet das, dass die beiden Züge unabhängig voneinander sind, das Zurücklegen der ersten gezogenen Kugel bedingt, dass der zweite Zug dieselben Voraussetzungen hat wie der erste (vgl. Abbildung 6 rechts).

Was wäre, wenn ...?

Wir ändern das Urnenszenario: nun sind sieben gelbe und sieben schwarze Kugeln in der Urne. Abbildung 6 zeigt das Szenario und zwei zugehörige Einheitsquadrate. Das erste stellt das Ziehen ohne Zurücklegen dar, es ist nun „punktsymmetrisch“ entsprechend der Gleichheit der Ziehungswahrscheinlichkeiten von schwarzen und gelben Kugeln. Das zweite ist „vollständig symmetrisch“, da durch das Zurücklegen der erste und der zweite Zug „gleichberechtigt“ (d. h. unabhängig voneinander) sind.

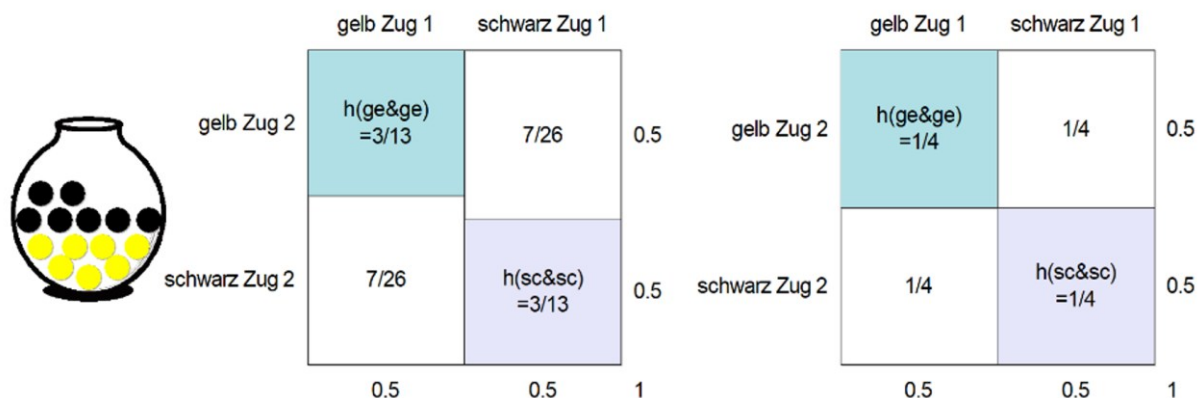


Abb. 6: Aus einer Urne wird zwei Mal ohne bzw. mit Zurücklegen gezogen – Einheitsquadrate

Fazit

Im Beitrag wurde gezeigt, dass die Visualisierung von nominalskalierten, zweidimensionalen Daten mit je zwei Ausprägungen in einem Einheitsquadrat eine wertvolle Ergänzung zum üblichen Baumdiagramm darstellt. Im Vergleich zum Baumdiagramm sind die bedingten und absoluten Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten nicht nur numerisch, sondern auch geometrisch abgebildet. Dies ermöglicht ein einfaches, intuitiv leicht zugängliches Ablesen der Zusammenhänge und es ist empirisch nachgewiesen, dass das Einheitsquadrat das Verständnis von Abhängigkeiten und Beziehungen besser unterstützt als das Baumdiagramm, vgl. Böcherer-Linder 2017 und Böcherer-Linder et al. 2017. Auf diese Weise kann sehr früh das Konzept der (Un-)Abhängigkeit von Merkmalen und von Zufallsexperimenten bzw. Ereignissen thematisiert, quantifiziert und im Einheitsquadrat geometrisch veranschaulicht werden (Eichler & Vogel 2013, S. 209). Später, in der Sekundarstufe 2, kann dieses Konzept im Sinne des Spiralprinzips auf Zufallsvariablen erweitert werden. Daten für eine Vierfeldertafel können in einer Schulklasse leicht erhoben (z. B. Geschlecht und Besitz eines Haustiers) und wie in diesem Artikel angedeutet ausgewertet werden: „Hängt das Geschlecht stärker mit der Musik- oder Sportaffinität in einer bestimmten Klasse zusammen?“ ist eine mögliche Fragestellung.

Ebenfalls wird im Beitrag die strikte Unterscheidung von relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten angesprochen, vgl. Eichler & Vogel 2013, S. 160 ff. Da sowohl Baumdiagramme als auch Einheitsquadrate für beide Konzepte genutzt werden können, wie der Artikel zeigt, ist eine entsprechende Orientierung eminent wichtig, um welche Art von Größe es sich handelt. Relative Häufigkeiten sind empirische Größen, Wahrscheinlichkeiten theoretische, die auf Annahmen fußen. Für den Laplace'schen Wahrscheinlichkeitsbegriff sind endlich viele gleichwahrscheinliche Elementarereignisse [meist sind (geometrische) Symmetrien der Grund für die Gleichwahrscheinlichkeits-annahme] diese Grundannahmen. Im frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff wird eine Beziehung zwischen relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit hergestellt, vgl. Malle & Malle 2003, die der neue Lehrplan der Sekundarstufe 1 auch in einer Richtung anspricht: „Schätzen von Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe empirisch gewonnener relativer Häufigkeiten“ ist in der achten Schulstufe vorgesehen¹. Umgekehrt sagen Wahrscheinlichkeiten relative Häufigkeiten (in Stichproben oder Grundgesamtheiten) voraus. Diese beiden Wahrscheinlichkeitsbegriffe spielen in der Sekundarstufe 1 eine Rolle, daher ist es auch hier wichtig, immer zu unterscheiden, woher die gerade in Rede stehende Wahrscheinlichkeit kommt.

Insgesamt soll dieser Artikel anregen, einerseits Vierfeldertafeln mit realen Daten auf Abhängigkeiten zu untersuchen, vgl. Götz & Döller 2020 und Döller & Götz 2024, andererseits zweistufige Zufallsversuche (das Urnenszenario ist ein in vielen Fällen passendes Modell dazu) zu analysieren. Welche Wahrscheinlichkeiten bzw. relativen Häufigkeiten sind bedingt, welche absolut, welche konjunktiv? Die in beiden Fällen verwendeten Darstellungsformen Baumdiagramm und Einheitsquadrat können – richtig verwendet – Synergieeffekte mit sich bringen und bilden zwei Seiten einer Medaille.

Literatur

- Böcherer-Linder, K. (2017): *Visualisierung bedingter Wahrscheinlichkeiten: eine Untersuchung aus kognitionspsychologischer, mathematikdidaktischer und schulpraktischer Perspektive*. Dissertation, Pädagogische Hochschule Freiburg.
https://www.researchgate.net/publication/327722172_Visualisierung_bedingter_Wahrscheinlichkeiten
- Böcherer-Linder, K., Eichler, A. & Vogel, M. (2017). *Representing subset relations with tree diagrams or unit squares?* CERME 10, Feb 2017, Dublin, Ireland. hal-01950553.
<https://hal.science/hal-01950553v1/document>
- Döller, V. (2020): *ProVis – Probability Visualized. Technologische Unterstützung für den Einsatz von Einheitsquadraten und Baumdiagrammen im Stochastikunterricht*. Diplomarbeit, Universität Wien. doi.org/10.25365/thesis.61461
- Döller, V. & Götz, S. (2024): *Zusammenhänge nominalskalierter Daten – Einheitsquadrate mit ProVis*. Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der ÖMG, Heft 56, 21-41.
<http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2024%20Band%2056/VortragDoellerGoetz.pdf>
- Eichler, A. & Vogel, M. (2013): *Leitidee Daten und Zufall: Von konkreten Beispielen zur Didaktik der Stochastik* (2., aktualisierte Auflage). Springer, Wiesbaden. doi.org/10.1007/978-3-658-00118-6

Götz, S. & Döller, V. (2020): *Vorschläge für einen datenorientierten Stochastikunterricht in der Sekundarstufe*. R&E-SOURCE, S19. journal.ph-noe.ac.at/index.php/resource/article/view/882

Malle, G. & Malle, S. (2003): *Was soll man sich unter einer Wahrscheinlichkeit vorstellen?* *mathematik lehren*, 118, 52–56.

Zur Autorin/Zum Autor

Mag. Victoria DÖLLER, Studium Diplom Mathematik und Mathematik und Psychologie & Philosophie Lehramt an der Universität Wien von 2006 bis 2013 bzw. 2007 bis 2020. Doktoratsstudium Informatik an der Universität Wien von 2018 laufend. Entwicklung und Betreuung des didaktischen Tools ProVis sowie regelmäßige Schulungen zu dessen Verwendung.

Mag. Dr. Stefan GÖTZ, Studium Mathematik und Physik Lehramt an der Universität Wien von 1984 bis 1990. Dissertation in Mathematik 1998, Habilitation für „Didaktik der Mathematik und Elementarmathematik“ 2002, beides an der Universität Wien. Unterricht an Wiener Gymnasien von 1991 bis 2006. Seit 2002 außerordentlicher Universitätsprofessor an der Universität Wien. Publikationen in Didaktik der Stochastik, Didaktik der Analysis, über Beliefs, Fachausbildung im Lehramt Mathematik u. v. a. m. Herausgeber einer Schulbuchreihe in Mathematik für die Oberstufe.