

Hans-Kaspar Aebli & Bettina Rösken-Winter

Den Zufall erforschen – eine verstehensorientierte Konzeption zum Empirischen Gesetz der großen Zahlen für die Primarstufe

Zusammenfassung

Tiefgehendes stochastisches Verständnis entsteht dann, wenn Lernende grundlegende Erfahrungen, mentale Repräsentationen und die dem Lerngegenstand inhärenten Verstehenselemente miteinander verknüpfen und aufeinander beziehen. Doch wie können diese drei Aspekte bei der Konzeption von Stochastikunterricht strukturklar, d. h. den Lernenden explizit und konzeptuell begreifbar, vor Augen geführt werden? Am Beispiel des Empirischen Gesetzes der großen Zahlen (EGgZ) wird für die Primarstufe aufgezeigt, wie eine solche Umsetzung gelingen kann. An der Erprobung der Unterrichtsreihe nahmen 91 Schülerinnen und Schüler aus den Klassenstufen 4 bis 6 (9-12 Jahre) teil. Exemplarisch werden für die verschiedenen Lernetappen wichtige Verstehenselemente anhand von Bearbeitungen der Schülerinnen und Schülern veranschaulicht.

Einleitung

Obwohl sich seit der Aufnahme der Leitidee „Daten und Zufall“ in die kompetenzorientierten Rahmenlehrpläne die Anzahl fachdidaktischer Publikationen zu stochastischen Themen deutlich gesteigert hat (Schnell & Prediger, 2012; Bieler & Engel, 2015; Ruwisch, 2021), existieren nach wie vor im Primarstufenbereich nur wenige umfassend konzipierte und empirisch erforschte Unterrichtsreihen, die untersuchen, wie probabilistische Vorstellungen und Konzepte im Lernprozess erworben und verstanden werden. Die in diesem Artikel vorgestellte Entwicklungsstudie möchte einen Beitrag zur Schließung dieser Lücke leisten. Ausgehend von einem theoretisch hergeleiteten, konzeptspezifischen Verstehensmodell geben wir Einblicke in die Konzeption und Lernergebnisse eines ersten Erprobungszykluses.

Verstehensorientiert zum EGgZ

Verschiedene Zugänge zum EGgZ

Das EGgZ beschreibt die Aussagekraft von Stichproben in Abhängigkeit zum Stichprobenumfang. Aus *dynamischer Perspektive* besagt es, dass sich die relative Häufigkeit einer untersuchten Merkmalausprägung mit zunehmender Stichprobengröße stabilisiert (vgl. Büchter & Henn, 2007, S. 174, 348). Im Gegensatz dazu vergleicht eine *kontrastive Perspektive* auf das EGgZ die Häufigkeitsschwankungen von Stichproben unterschiedlicher Größe. Die kontrastive Sichtweise ermöglicht es, Zufallsschwankungen auch bei kleinen Stichprobengrößen zu erkennen. Aus fachdidaktischer Sicht ergeben sich dadurch zwei Vorteile: a) Die Stichprobenumfänge sind

endlich und für Lernende überblickbar. b) Die Zufallsschwankungen selbst stehen stärker im Fokus, da sie nicht durch die Vorstellung einer (unendlich) langen Versuchsreihe „wegexperimentiert“ werden. Entsprechend spricht sich Riemer (2023) dafür aus, das EGgZ unterrichtlich im Sinne des Empirischen Gesetzes der schwachen Zahlen zu behandeln¹.

Den fachdidaktisch-lernpsychologischen Kern der Unterrichtsreihe bildet der *hypothetisch-prognostische Wahrscheinlichkeitsbegriff*: Einerseits werden die Häufigkeiten einer Perlenfarbe vor dem Ziehen *prognostiziert* und andererseits Verteilungen von Perlenfarben auf der Basis von Stichproben *geschätzt* bzw. *hypothetisch* untersucht. Dabei erfahren und verstehen die Lernenden, dass die Aussagekraft und das Vertrauen in die Vorhersagen und Schätzungen mit zunehmender Stichprobengröße wachsen: Mehr Ziehungen (größere Stichprobe) bedeutet genauere Schätzungen bzw. genauere Prognosen (vgl. Sedlmeier & Gigerenzer, 1998, S. 35). Die Empirie besteht aus der Lernendenperspektive jedoch nicht nur aus der Erkenntnis „je mehr Daten, desto genauer“, sondern auch aus der Erfahrung, *wie sich diese Stabilisierung ausbildet und zeigt* bzw. *welches Gesicht ihr der Zufall aufprägt*.

Das EGgZ in der Primarstufe verstehen

Verstehensorientierung ist ein vielschichtiges Phänomen (Reusser & Pauli, 2013) und bezeichnet im Mathematikunterricht eine Ausrichtung, bei der mathematische Konzepte, Strukturen, und Verfahren auf der Tiefenstruktur fokussiert werden (vgl. Holzäpfel et al., 2024). Das Ziel besteht darin, dass Lernende ein flexibles und tiefgehendes Verständnis mathematischer Konzepte erwerben.

Obwohl Lernende der Primarstufe in der Regel kaum über formale Verstehensgrundlagen und Konzepte im Umgang mit Wahrscheinlichkeiten und relativen Häufigkeiten verfügen, besitzen sie (subjektiv geprägte) Vorstellungen und Vorerfahrungen zu Chancen und Zufall einerseits sowie Anteilen, Brüchen und Prozenten andererseits (vgl. Fischbein, 1975, 1985; Hawkins & Kapadia, 1983; Schnell & Prediger, 2012).

Doch wie sieht konkret ein Unterricht aus, der das Verstehen des EGgZ zum Ziel hat, und welche lokalen Theorien und Modelle können dabei tragend sein? Um diese Forschungsfrage zu beantworten, wurde in Anlehnung an Drollinger-Vetter (2011) theoriegeleitet ein Verstehensmodell für die Anleitung der Lernprozesse zum EGgZ entwickelt. Es weist drei Ebenen aus: Erfahrungen, Repräsentationen und *Verstehenselemente*, die durch den *Verstehensprozess* miteinander verknüpft sind (Abb. 1).

¹ Das Empirische Gesetz der schwachen Zahlen beschreibt die Stabilisation der relativen Häufigkeit mithilfe einer Epsilonumgebung, während das Empirische Gesetz der Starken Zahl eine fast sichere Konvergenz beschreibt (vgl. Krengel, 2005; Büchter & Henn, 2007)

Empirisches Gesetz der großen Zahlen

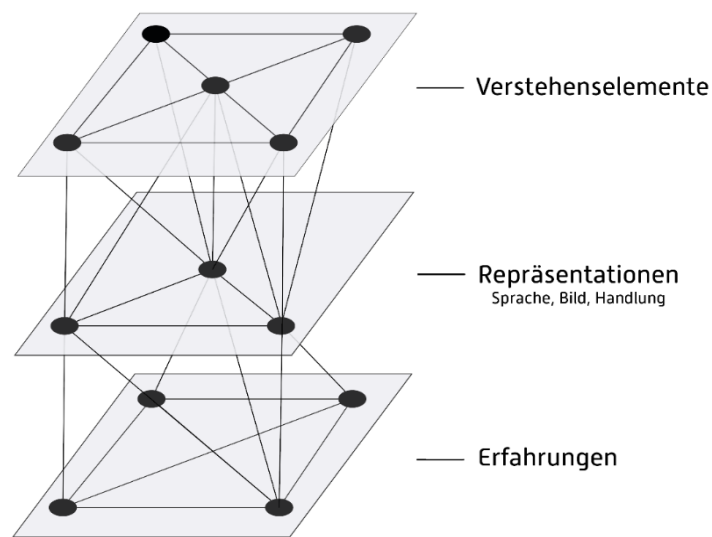


Abb. 2: Verstehensmodell zum EGgZ für die Primarstufe (in Anlehnung an Drollinger-Vetter, 2011, S. 190). Der Verstehensprozess besteht in der wechselseitigen Verknüpfung der drei Ebenen.

Das EGgZ-Verstehensmodell ist ein Analysemodell für konzeptspezifische Verstehensprozesse. Es ermöglicht, die für das Verstehen notwendigen Verstehens-elemente, Repräsentationen und Erfahrungen zu identifizieren, zueinander in Beziehung zu setzen und so mit Blick auf die Lernenden den Lerngegenstand zu strukturieren und spezifizieren. Dabei geht das EGgZ-Verstehensmodell davon aus, dass Verstehen ein Akt des Verknüpfens ist, sei es innerhalb einer Ebene oder zwischen den drei Ebenen (vgl. Drollinger-Vetter, 2011, S. 188 ff.). Abbildung 2 zeigt einen Ausschnitt aus der Ebene der Verstehens-elemente:

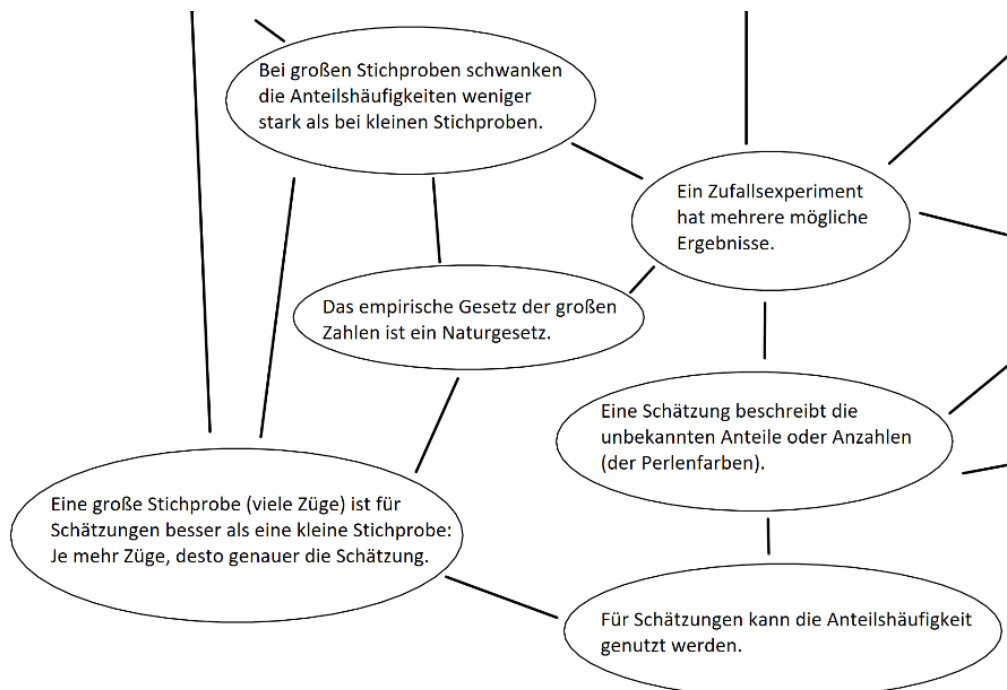


Abb. 2: Verstehens-elemente beim Empirischen Gesetz der großen Zahlen (Ausschnitt)

In einem verstehensorientierten Unterricht zum EGgZ werden (vgl. Drollinger-Vetter, 2011, S. 19) ...

- die für das Verständnis des EGgZ notwendigen Verstehenselemente explizit, d. h. für die Lernenden erkennbar, adressiert und fokussiert,
- Repräsentationen und Verstehenselemente aufeinander abgestimmt und für die Lernenden erkenn- und nachvollziehbar miteinander verknüpft,
- die Vorerfahrungen der Lernenden aufgegriffen und zusammen mit den Erfahrungen des Lernprozesses visualisiert und reflektiert - d. h. wiederum mit Verstehenselementen verknüpft

Diese wichtigen Aspekte werden im folgenden Abschnitt exemplarisch illustriert.

3. Das EGgZ für die Primarstufe erfahrbar und verstehbar machen: Einblicke in Ergebnisse einer empirischen Studie

Im Rahmen des Design Research-Modells für fachdidaktische Entwicklungsforschung (Prediger et al., 2012) wurde zunächst der Lerngegenstand spezifiziert und strukturiert sowie die Unterrichtsreihe entwickelt. Anschließend wurde diese erprobt und qualitativ ausgewertet, wobei lokale Theorien (EGgZ-Verstehensmodell, s. o.) entwickelt wurden. Für die qualitative Analyse der Lernergebnisse war entscheidend, ob die theoretisch hergeleiteten Verstehenselemente in den Begründungen und Argumentationen der Lernenden auftauchten und inwiefern diese untereinander und/oder mit Repräsentationen passend verknüpft wurden.

Der Verstehens- bzw. Wissensaufbau der Unterrichtsreihe zum EGgZ wurde maßgeblich an vier Lernetappen ausgerichtet (siehe Abb. 3).



Abb. 3: Kumulativer Verstehensaufbau der Konzeption zum EGgZ (E: Etappe)

Im Folgenden stellen wir die für das Verstehen des EGgZ zentralen vier Etappen der Unterrichtseinheit kurz vor und dokumentieren exemplarisch die Verstehensprozesse der Lernenden anhand der o. g. Analysekriterien.

Etappe 1: Perlenziehen im Kopf – Verstehen, was eine Vorhersage ist

In Etappe 1 ziehen die Lernenden „im Kopf“ fünfzigmal aus einem Säckchen mit bekannter Perlenfarbenverteilung (3 weiße und 7 schwarze Perlen) und dokumentieren die fiktiven Züge bzw. Ergebnisse in einer Tabelle. Bei ihren Prognosen greifen die Lernenden auf qualitative, teilweise quantitative und in wenigen Fällen auf zufallsbezogene Argumente zurück. Marta (4. JgSt) begründet ihre fiktive Stichprobe (22 weiße, 28 schwarze Perlen) qualitativ und antizipiert dabei die Verteilung bzw. Proportionen präformal (Abb. 4).

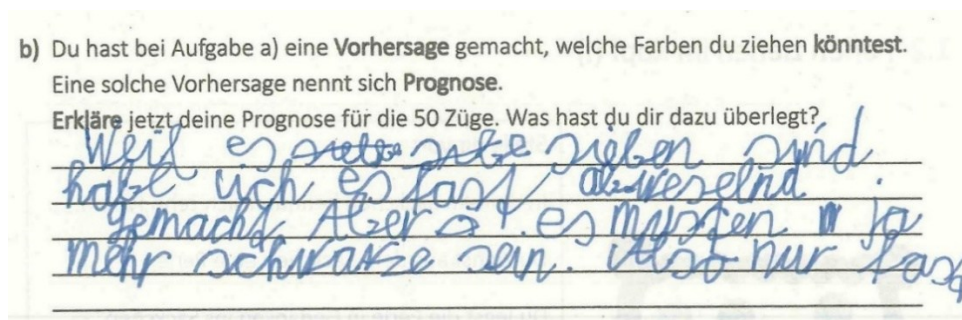


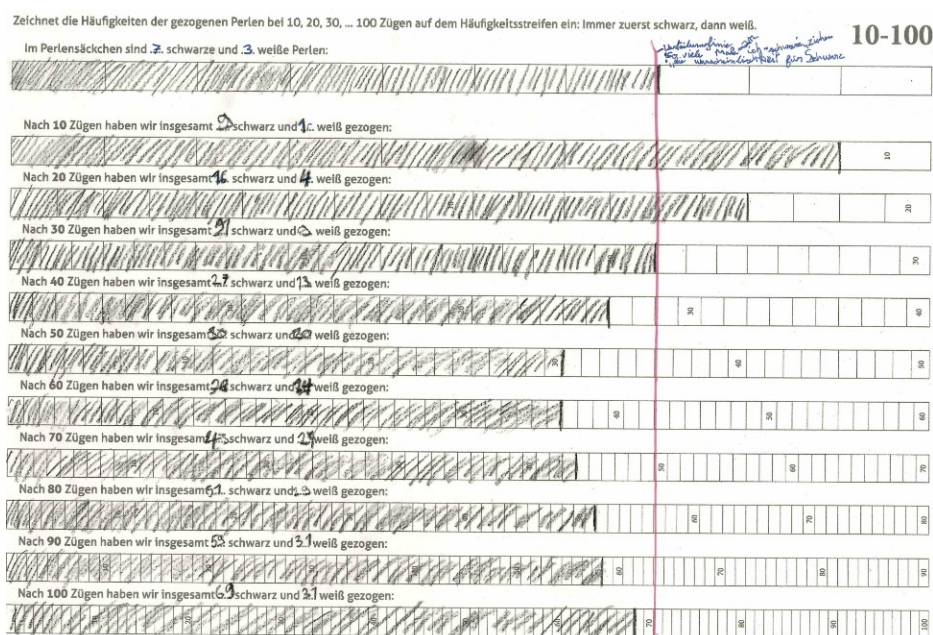
Abb. 4: Marta begründet ihre Prognose von 22 weißen und 28 schwarzen Perlen bei 50 Zügen qualitativ

Dana (5. JgSt) erfasst die Verteilung quantitativ und begründet ihre Prognose von 31 schwarzen Perlen qualitativ: „Ich habe mehr schwarze Perlen gezogen, weil es 70% schwarze Perlen gibt und nur 30% weiße Perlen.“ Tim (6. JgSt) begründet seine fiktive Stichprobe (42 schwarze/8 weiße Perlen) bei einer ähnlichen Aufgabe quantitativ-proportional: „Es waren 8 schwarze und 2 weiße [im Säckchen, Anm. d. Autor:innen], also müssten es ungefähr 4 mal so viel schwarze als weiße sein.“ Elif (5. JgSt) dagegen resümiert bei 3 weißen Perlen/sieben schwarzen Perlen: „Es ist reiner Zufall, dass ich 24 weiße Perlen und dass ich 26 schwarze Perlen gezogen [habe].“

Insgesamt überwiegen die qualitativen Prognosen deutlich. Die Begründungen zeigen, dass die Lernenden bereits ein Verständnis dafür entwickelt hatten, was eine Prognose ausmacht: Sie berücksichtigen Unsicherheit und/oder die Variabilität ihrer Stichproben in ihren Argumentationen und zeigen damit Ansätze eines probabilistischen Denkens.

Etappe 2: Perlenziehen in echt – den Einfluss der Stichprobengröße auf die Prognose verstehen

In der 2. Etappe „Perlenziehen in echt“ überprüfen und reflektieren die Lernenden ihre Prognosen aus Etappe 1. In Zweiertteams ziehen die Lernenden Stichproben mit jeweils 100 Zügen, die sie dann auf 1000 Züge kumulieren. Die Ergebnisse stellen sie in einer Folge normierter Häufigkeitsstreifen dar. Diese machen die Variabilität der Stichproben anschaulich sichtbar und vergleichbar (Abb. 5). Anschließend vergleichen sie die absoluten Häufigkeiten der Stichproben und bewerten die Prognosen.

Abb. 5: Lukas stellt die Häufigkeiten seiner Stichproben mithilfe *normierter Häufigkeitsstreifen* dar, die die Abnahme der Zufallsschwankungen sichtbar machen (rot – Erwartungswert)

Die normierten Häufigkeitsstreifen stellen eine fachdidaktische Innovation dar. Sie ermöglichen Lernenden einen verstehensorientierten Zugang zu relativen Häufigkeiten und knüpfen nahtlos an die strukturgleichen Bruch- und Prozentstreifen der Sekundarstufe an. Damit berücksichtigen sie das Prinzip der Durchgängigkeit von Repräsentationen, eines der empirisch fundierten, zentralen Prinzipien qualitätsvollen Mathematikunterrichts (vgl. Holzäpfel et al., 2004).

Etappe 3: Perlenfarben schätzen – den Einfluss von Stichprobengröße auf Schätzung verstehen

In der dritten Etappe wird die Aufgabenstellung der 2. Etappe umgekehrt. Die Schülerinnen und Schüler erhalten ein Perlensäckchen mit einer ihnen unbekannten Anzahl weißer und schwarzer Perlen. Diese sollten sie durch Ziehen mit Zurücklegen schätzen.

In Zweierteams ziehen die Lernenden insgesamt 100-mal und schätzen nach jeweils 10 Zügen die Verteilung der Perlenfarben. Anschließend kumulieren sie ihre Stichproben zu einer großen Stichprobe von 1000 Zügen und vergleichen diese mit ihren ersten Schätzungen von 10 bis 100 Ziehungen, um ihre finale Schätzung ggf. zu optimieren. Erst dann öffnen die Lernenden die Säckchen und vergleichen ihre Schätzungen mit der tatsächlichen Verteilung. Große Überraschung: Fast alle Schätzungen liegen richtig!

Die qualitative Analyse der schriftlichen Lernergebnisse dieser Etappe fokussiert die Begründungen der Lernenden hinsichtlich des Vorkommens der theoretisch hergeleiteten Verstehenselemente. Sie zeigt, dass die Lernenden bereits verschiedene Zugänge zum EGgZ erworben hatten: Nadja (Abb. 8) stellt ihre Schätzung, die sie auf Basis von 10 Zügen ermittelt hatte, kontrastiv ihrer Schätzung auf Basis von 1000 Zügen gegenüber und begründet diese bereits verallgemeinernd. Lara und Aylin beschreiben ihren Schätzprozess dynamisch und betonen, was Modellieren im Kern ausmacht: Ein wiederholtes Anpassen des Modells „Schätzen der Anteile“ an die Realität (Abb. 6).

- b) **Beschreibt** die Veränderung eurer Schätzungen. **Vergleicht** diese mit der wirklichen Anzahl der Perlen im Säckchen. Was fällt euch auf?

Nach 1000 Zügen war unsere Schätzung richtig.
Nach 10 Zügen hatten wir eine völlig falsche Schätzung.
Das beweist, dass das Ergebnis desto öfter man zieht
auch richtiger wird.

- b) **Beschreibt** die Veränderung eurer Schätzungen. **Vergleicht** diese mit der wirklichen Anzahl der Perlen im Säckchen. Was fällt euch auf?

Bei der ersten Ziehung haben wir 7s und 3w gezogen. Unsere Schätzung war allerdings ~~6/4~~ 6/4.
Im Laufe der Ziehungen haben wir allerdings unsere Meinung zu 7/3 geändert. Nach einiger Zeit zogen wir aber 5/5 und änderten unsere deshalb wieder zu 6/4. Als Endergebnis entschieden wir uns dann aber doch für 7/3, denn das zogen wir ~~am~~ mit am meis-
ten.

- c) „Wenn Aisha und Theo mehr schwarze als weiße Perlen ziehen, dann sind auch mehr schwarze als weiße Perlen im Säckchen.“ Stimmt das?

Abb. 6: Nadja (Bild oben) kontrastiert verschiedene Stichprobenumfänge und begründet bereits verallgemeinernd. Lara und Aylin (Bild unten) beschreiben den Einfluss der Stichprobengröße auf ihre Hypothesen als zyklischen Modellierungsprozess.

Etappe 4 – Perlenrätsel: Das EGgZ verstehen

Um das Verständnis des EGgZ zu überprüfen, werden die Lernenden aufgefordert, zwei Stichproben verschiedenen Umfangs (10 bzw. 200 Ziehungen) zwei Perlensäcken zuzuordnen und zu tippen, aus welchem Säckchen die Perlen gezogen wurden (Abb. 7, oben)². Da die Anteile der Perlenfarben in beiden Stichproben gleich groß sind, sollen die Lernenden bei ihrem Tipp (im Sinne des EGgZ) von der größeren Stichprobe ausgehen. Die Begründungen der Tipps werden ein folgendes Lösungsfeld eingeordnet (Abb. 7, unten).

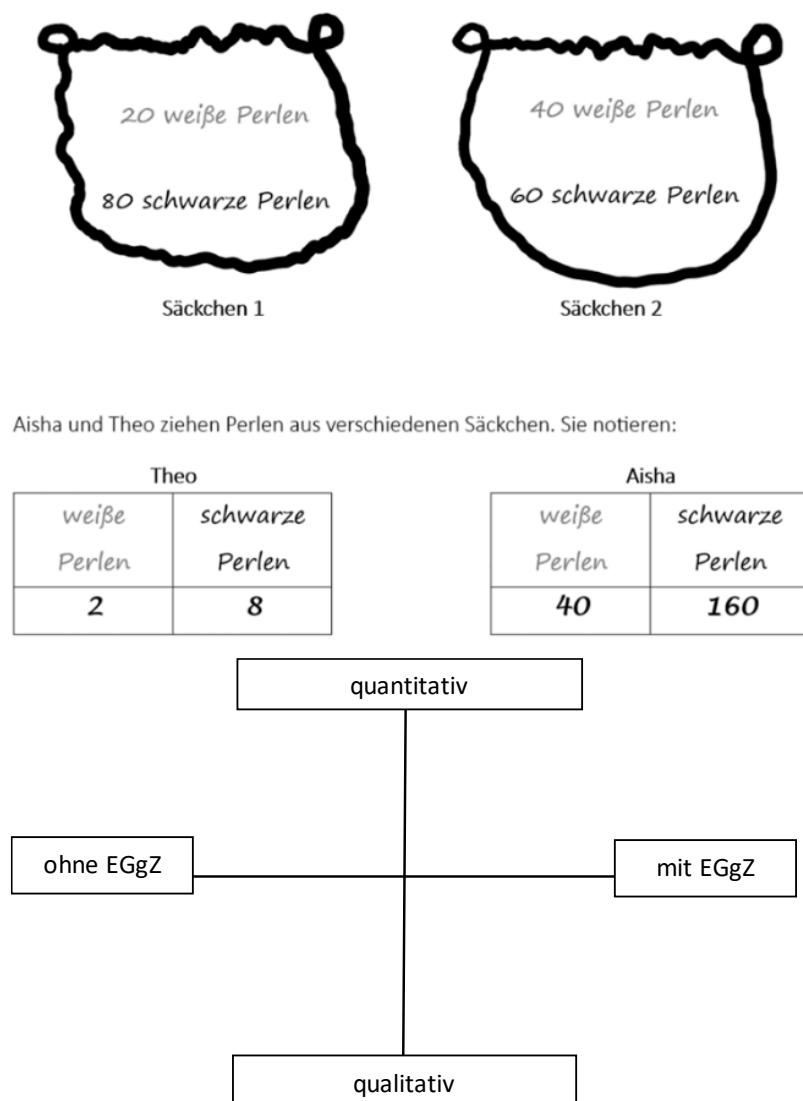


Abb. 7: Perlenrätsel: Stichproben zuordnen und Lösungsfeld für das Perlenrätsel

Eine qualitative Begründung formuliert Ana: „Ich glaube [sic] das [sic] Theo aus Säckchen 2 gezogen hat, weil es weniger weiß als schwarz [sic] im Säckchen sind und er mehr schwarze als weiße gezogen hat. Somit hat Aisha meiner Meinung nach aus Nummer 1 gezogen. (...) Außer dem [sic] hat niemand gesagt wie oft sie gezogen haben.“ Obwohl Ana mit dem gleichen Argument auch das andere Säckchen hätte tippen können, fällt auf, dass sie nicht relative, sondern absolute Häufigkeiten vergleicht, was ihr offenbar leichter fällt. Die Stichprobengröße berücksichtigte Ana nicht.

² Das Rätsel orientiert sich am Fortbildungsmaterial „Stochastik in der Grundschule“, Modul 3, Baustein 2, von Grassmann und Binner (2019), abrufbar unter <https://dzlm.de/node/1362>

Eine quantitative Erklärung mit proportionalen Argumenten, aber ohne Einbezug der Stichprobengröße, geben Tristan und Ali: „Säckchen 1: Aisha weil $20 \cdot 2 = 40$, $80 \cdot 2 = 160$ also hat Aisha aus Säckchen 1 und Theo Säckchen 2.“

Lernende, die die Stichprobengröße miteinbezogen, argumentieren durchweg mit quantitativ-proportionalen Argumenten. Viktor schreibt: „Theo hat ganz wenig nur gezogen [sic] deswegen ist es unklar. Aisha hat aus Sack 1 gezogen, weil wenn man die Summe [der absoluten Häufigkeiten] halbiert, kommen 20W 80S raus.“ Den gleichen Zusammenhang formulieren Nadja und Milena explizit und verallgemeinernd: „Säckchen eins: Aisha. Säckchen zwei: Theo. Begründung: Die schwarzen Perlen sind immer viermal so viel wie die weißen Perlen. Deswegen würde bei beiden Säckchen 1 besser passen. Da aber je häufiger man zieht tes do [sic] genauer würd [sic] das Ergebniss [sic]. Deswegen wurde die höhere zahl [sic] [die Stichprobe von Aisha mit mehr Zügen] besser zu Säckchen eins passen [sic] weil sie genauer ist. Theos ist kleiner und ist nicht so genau und kann deswegen auch nur Zufall sein [...]“.“

Insgesamt ist festzustellen, dass knapp die Hälfte der Lernenden in Etappe 4 die Stichprobengröße nicht explizit in ihre Begründungen einbezieht, wohl aber anzahl- und/oder anteilsbezogene Argumente anbringt. Insgesamt überwiegen Argumente mit Anzahlen bzw. absoluten Häufigkeiten. Bei den anteilsbezogenen Argumenten fällt auf, dass Anteile weit häufiger mit Prozenten anstelle von Bruchzahlen angegeben werden. Etwas 15 % der Lernenden beziehen die Stichprobengröße in ihre Überlegungen mit ein und kombinieren diese durchgängig mit quantitativ-proportionalen Überlegungen.

Zusammenfassung

In diesem Beitrag haben wir eine verstehensorientierte Konzeption zum Empirischen Gesetz der großen Zahlen für die Primarstufe vorgestellt. Wir haben herausgestellt, wie Schülerinnen und Schüler im Kontext eines Urnenexperiments den Zufall erforschen können, indem sie datengestützt Prognosen und Schätzungen anstellen und dabei die Stichprobengröße berücksichtigen. Dabei zeigt sich, dass dieser informelle, inferenzstatistische Ansatz bereits für Grundschülerinnen und -schüler erfahr- und erlebbar ist. Dies bestätigt Forschungsergebnisse zu informellem, inferenz-statistischem Denken (vgl. Makar & Rubin, 2018; Garfield & Ben-Zvi, 2018a und 2008b). Die Analyseergebnisse des ersten Erprobungszykluses stützen ebenfalls den didaktischen Wert des hypothetisch-prognostischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs. Dieser fördert tragfähige Grundvorstellungen für das Verstehen formaler, inferentieller Verfahren der beurteilenden Statistik, wie beispielsweise von Prognose- und Vertrauensintervallen. Diese Themengebiete sind sowohl in der Sekundarstufe als auch der universitären Mathematik als Verstehenshürden bekannt (vgl. Garfield, J. B. & Ben-Zvi, D., 2008a, S. 264). Eine frühe Förderung von informellem, inferentiellen Denken auf Grundlage eines passenden Wahrscheinlichkeitsbegriffs in der Grundschule erscheint uns daher als wesentlich.

Für die Qualität der Verstehensprozesse erwies sich das EGgZ-Verstehensmodell als ein geeignetes Instrument, um die Verstehensprozesse auf der Tiefenstruktur von Unterricht konzeptspezifisch zu modellieren und die Verknüpfung von Verstehens-elementen mit Repräsentationen und (Vor-)Erfahrungen der Lernenden qualitativ zu bewerten. In einem zweiten Erprobungszyklus werden diese Erkenntnisse in die Weiterentwicklung der Unterrichtseinheit eingebracht und vertieft. [sic]

Literatur

- Biehler, R., & Engel, J. (2015). *Stochastik: Leitidee Daten und Zufall*. In Handbuch der Mathematikdidaktik (S. 221–251). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-35119-8_8
- Büchter, A. & Henn, H.-W. (2007). *Elementare Stochastik. Eine Einführung in die Mathematik der Daten und des Zufalls* (2. Aufl.). Springer.
- Drollinger-Vetter, B. (2011). *Verstehenselemente und strukturelle Klarheit*. Waxmann Verlag.
- Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Reidel.
- Fischbein, E. (1982). *Intuition and proof*. For the Learning of Mathematics 3(2), 9–19.
- Garfield, J. B. & Ben-Zvi, D. (2008a). *Learning to reason about statistical inference*. In J. B. Garfield & D. Ben-Zvi (Eds.), *Developing students' statistical reasoning* (pp. 261–288). Springer.
- Garfield, J. B. & Ben-Zvi, D. (2008b). *Learning to reason about samples and sampling distributions*. In J. B. Garfield & D. Ben-Zvi (Eds.), *Developing students' statistical reasoning* (pp. 235–259). Springer.
- Hawkins, A. & Kapadia R. (1984). *Childrens' conceptions of probability - a psychological and pedagogical review*. Educational Studies in Mathematics, 15, 349–377.
- Holzäpfel, L., Prediger, S., Götze, D., Rösken-Winter, B., & Selter, C. (2024). *Qualitätsvoll Mathematik unterrichten: Fünf Prinzipien*. Mathematik lehren, 242.
- Krengel, U. (2005). *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. Springer.
- Makar, K & Rubin, A. (2018). *Learning about statistical inference*. In D. Ben-Zvi, K. Makar & Garfield, J. (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 261–294). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_8
- Prediger, S., Link, M., Hinz, R., Hußmann, S., Thiele, J. & Ralle, B. (2012). *Lehr-Lernprozesse initiieren und erforschen. Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell*. MNU, 65(8), 452–457.
- Reusser, K., Pauli, C. (2013). *Verständnisorientierung in Mathematikstunden erfassen. Ergebnisse eines methodenintegrativen Ansatzes*. Zeitschrift für Pädagogik 59(3), 308–335. <https://doi.org/10.25656/01:11940>
- Riemer, W. (2023). *Statistik unterrichten. Eine handlungsorientierte Didaktik der Stochastik*. Kallmeyer/Klett.
- Ruwisch, S. (2021). *Statistisches Denken in der Grundschule: Alles nur Zufall?* University of Bamberg Press.
- Schnell, S. & Prediger, S. (2012). *From “everything changes” to “for high numbers, it changes just a bit”, Theoretical notions for a microanalysis of conceptual change processes in stochastic contexts*. ZDM – Mathematics Education, 44, 825–840.
- Sedlmeier P. & Gigerenzer G. (1997). *Intuitions about sample size: The empirical law of large numbers*. Journal of Behavioral Decision Making, 10, 33–51.

Wollring, B. (1994). *Qualitative empirische Untersuchungen zum Wahrscheinlichkeitsverständnis bei Vor- und Grundschulkindern*. Habilitationsschrift im Fachbereich Mathematik der Universität Münster.

Zum Autor/Zur Autorin

Hans-Kaspar AEBLI ist in der Aus- und Fortbildung von Mathematiklehrkräften für das Land Berlin tätig. Er ist wissenschaftlicher Mitarbeiter in der Arbeitsgruppe von Bettina Rösken-Winter am Institut für grundlegende und inklusive mathematische Bildung an der Universität Münster. Sein Forschungsschwerpunkt liegt im Bereich der Didaktik der Stochastik.

Bettina RÖSKEN-WINTER ist als Professorin für Didaktik der Mathematik in die Ausbildung von Primarstufenlehrkräften an der Universität Münster eingebunden. Sie verfolgt ihren Forschungsschwerpunkt, der insbesondere im Deutschen Zentrum für Lehrerbildung Mathematik (DZLM) und im Projekt QuaMath zum Tragen kommt, in der Professionalisierung von Lehrkräften.