

MASTERARBEIT

„Begabungsförderung im Mathematikunterricht der Primarstufe“

eingereicht von

Anna Kirchmayer BEd

zur Erlangung des akademischen Grades
Master of Education (MEd)

Wolfsthal, Juni 2020

Matrikelnummer
Studienrichtung
Betreuung

01594033
Lehramt im Bereich der Primarstufe
HS-Prof. Mag. Dr. Petra Hauer-Typelt

Kurzzusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beinhaltet Diagnosemöglichkeiten und Förderungsmaßnahmen mathematisch begabter Grundschulkinder. Um eine mathematische Begabung zu diagnostizieren, ist zunächst wichtig, sich mit dem Begabungsbegriff auseinanderzusetzen. Grundsätzlich werden unter diesem Begriff hohe mathematische Leistungen, die Kinder im Unterricht zeigen, verstanden. Diese besonderen Leistungen können unterschiedlich ausgeprägt sein. Die mathematischen Fähigkeiten sind bei jeder Schülerin oder jedem Schüler individuell ausgeprägt. Erkennen Lehrpersonen markant hohe Leistungen bei Handlungen von Kindern während des Mathematikunterrichts, so hat deren Förderung höchste Priorität. Durch offene Aufgabenstellungen, die verschiedene mathematische Fähigkeiten fördern, kann diese sogar während des Regelunterrichts gelingen. Bei solchen Aufgaben ist wichtig, dass verschiedene Lösungswege zulässig sind. Besonders durch die Teilnahme an mathematischen Wettbewerben beziehungsweise durch den Besuch von außerschulischen, mathematischen Lernorten können begabte Schülerinnen und Schüler ihr Potenzial entfalten.

Summary

The present work contains diagnostic possibilities and support measures for thematically gifted primary school children. In order to diagnose mathematical giftedness, it is first important to deal with the concept of giftedness. Basically, this term is used to describe the high mathematical achievements that children show in class. These special achievements can be of varying degrees. The mathematical abilities are developed individually for each pupil. If teachers recognize such high achievements in children's actions during mathematics lessons, their promotion is given the highest priority. Open assignments that promote various mathematical skills can even be successful during regular lessons. For such tasks it is important that different solutions are allowed. Gifted pupils can develop their potential especially by participating in mathematical competitions or by attending extracurricular mathematical learning places.

Inhaltsverzeichnis

1	THEMENAUFRISS UND ZIELSTELLUNGEN	10
2	DEFINITION DES BEGABUNGSBEGRIFFS	13
2.1	Begabung	13
2.2	Begabung in Bezug auf die Mathematik	17
2.2.1	Alltagsdenken und mathematisches Denken	17
2.2.2	Geistige Fähigkeiten mathematischen Denkens	18
2.2.3	Definition einer mathematischen Begabung	23
2.2.4	Bedeutung des Problemlösens für mathematisch begabte Kinder	29
3	DIAGNOSE EINER MATHEMATISCHEN BEGABUNG	33
3.1	Relevanz der Diagnose einer mathematischen Begabung	33
3.2	Möglichkeiten und Probleme der Diagnose einer mathematischen Begabung	34
3.3	Merkmale von mathematisch begabten Grundschulkindern	38
3.3.1	Merkmalskatalog für Erziehungsberechtigte	38
3.3.2	Merkmalskatalog für Lehrpersonen	39
3.4	Identifikationsfaktoren einer mathematischen Begabung durch Indikatoraufgaben	40
3.5	Vorgehensweisen und Strategien mathematisch begabter Grundschulkindern bei Problemlöseaufgaben	53
3.5.1	Lernstile von Schülerinnen und Schülern	55
3.5.2	Vorgehensweisen bei Problemlöseaufgaben von mathematisch begabten Schülerinnen und Schülern	57
4	FÖRDERUNG MATHEMATISCH BEGABTER GRUNDSCHULKINDER	63
4.1	Notwendigkeit der Förderung mathematisch begabter Grundschulkindern	63
4.2	Ziele der Förderung mathematisch begabter Grundschulkindern	64
4.3	Förderungsmaßnahmen bei mathematisch begabten Grundschulkindern	65
4.3.1	Integration und Segregation	66
4.3.2	Differenzierung und Individualisierung	66
4.3.3	Akzeleration und Enrichment	67

4.3.4	Mögliche Organisationsformen der Förderung bei einer vorliegenden mathematischen Begabung	69
5	KONKRETE BEISPIELE AUS DER PRAXIS ZUR FÖRDERUNG EINER MATHEMATISCHEN BEGABUNG	71
5.1	Förderschwerpunkt: Einsatz von heuristischen Hilfsmitteln	71
5.2	Förderschwerpunkt: Allgemeine Strategien beziehungsweise Prinzipien des Lösen von Problemaufgaben	75
5.2.1	Systematisches Probieren	75
5.2.2	Vorwärtsarbeiten	77
5.2.3	Rückwärtsarbeiten/Rückwärtsrechnen.....	78
5.2.4	Umstrukturieren	80
5.2.5	Benutzen von Variablen	82
5.2.6	Suchen nach Beziehungen und Aufstellen von Gleichungen oder Ungleichungen.....	83
5.2.7	Analogieprinzip	84
5.2.8	Symmetrieprinzip.....	86
5.2.9	Invarianzprinzip.....	86
5.2.10	Extremalprinzip	87
5.2.11	Zerlegungsprinzip	87
5.3	Förderschwerpunkt: Argumentieren und Begründen	88
5.3.1	Bedeutung der Begriffe <i>Argumentieren</i> und <i>Begründen</i>	88
5.3.2	Aufgabenbeispiele zur Förderung des Argumentierens und Begründens	89
5.4	Förderschwerpunkt: Beweisen	91
5.4.1	Bedeutung des Beweisens in der Grundschule.....	91
5.4.2	Aufgabenbeispiele zur Förderung der Beweisführung.....	92
5.5	Förderschwerpunkt: Erkennen von Mustern und Strukturen beziehungsweise Verallgemeinern und Abstrahieren	93
5.5.1	Aufgabenbeispiele zur Förderung des Erkennens von Strukturen.....	93
5.5.2	Aufgabenbeispiele zur Förderung des Verallgemeinerns und Abstrahierens.....	94
5.6	Förderschwerpunkt: Selbstständiges Erweitern und Variieren von Aufgaben.....	95
5.7	Förderschwerpunkt: räumliches Vorstellungsvermögen.....	96
5.8	Förderschwerpunkt: algebraisches Denken	99

5.9	Wettbewerb: <i>Känguru der Mathematik</i>	100
5.10	Haus der Mathematik	102
5.11	Projekt zum Thema <i>Wahrscheinlichkeit</i>	103
5.11.1	Begriff <i>Wahrscheinlichkeit</i>	103
5.11.2	Erste Unterrichtseinheit zum Thema <i>Wahrscheinlichkeit</i>	107
5.11.3	Zweite Unterrichtseinheit zum Thema <i>Wahrscheinlichkeit</i>	111
5.11.4	Dritte Unterrichtseinheit zum Thema <i>Wahrscheinlichkeit</i>	115
5.11.5	Vierte Unterrichtseinheit zum Thema <i>Wahrscheinlichkeit</i>	121
6	RESÜMEE	127
7	LITERATURVERZEICHNIS	132
8	ANHANG	136
	Eigenständigkeitserklärung	146

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Drei-Ringe-Modell nach Renzulli (1993)	26
Abbildung 2: Zeichnung von Indikatoraufgabe 1 mit zwei Beispielen von Schülerinnen und Schülern (Fast, 2005, S. 50).....	42
Abbildung 3: Zahlenmauer von Indikatoraufgabe 1c mit zwei Beispielen von Schülerinnen und Schülern (Fast, 2005, S. 51).....	43
Abbildung 4: Quadrat von Indikatoraufgabe 1d mit zwei Beispielen von Schülerinnen und Schülern (Fast, 2005, S. 52).....	44
Abbildung 5: Erste Strategie der Indikatoraufgabe 2 eines Schülers der dritten Schulstufe (Fast, 2005, S. 53)	45
Abbildung 6: Zweite Strategie der Indikatoraufgabe 2 mit zwei Beispielen von Schülerinnen und Schülern der vierten Klasse (Fast, 2005, S. 54)	46
Abbildung 7: Dritte Strategie der Indikatoraufgabe 2 mit einem Beispiel eines Kindes (Fast, 2005, S. 55)	47
Abbildung 8: Vierte Strategie der Indikatoraufgabe 2 mit einem Beispiel eines Buben der vierten Klasse (Fast, 2005, S. 56)	47
Abbildung 9: Indikatoraufgabe 3a mit einem Beispiel eines Kindes (Fast, 2005, S. 57)	48
Abbildung 10: Indikatoraufgabe 3b mit einem Beispiel eines Kindes (Fast, 2005, S. 57)	48
Abbildung 11: Indikatoraufgabe 3c mit zwei Beispielen von Kindern (Fast, 2005, S. 57)	49
Abbildung 12: Indikatoraufgabe 4 (Fast, 2005, S. 58).....	49
Abbildung 13: Indikatoraufgabe 4 mit einem Beispiel eines neunjährigen Mädchens (Fast, 2005, S. 58)	50
Abbildung 14: Indikatoraufgabe 5a mit einem Beispiel eines Schülers aus der dritten Klasse (Fast, 2005, S. 60).....	51
Abbildung 15: Indikatoraufgabe 5b mit einem Beispiel eines Schülers aus der dritten Klasse (Fast, 2005, S. 60).....	51
Abbildung 16: Indikatoraufgabe 6b (Fast, 2005, S. 61).....	52
Abbildung 17: Stern-Aufgabe (Käpnick, 1998, S. 251)	57
Abbildung 18: Zusammenfassung der Aussagen von Käpnick (1998) und Grogeroc (1997) (Fuchs, 2006, S. 106)	61

Abbildung 19: Zusammenfassung der Aussagen von Käpnick (1998) und Grogeroc (1997) (Fuchs, 2006, S. 107)	62
Abbildung 20: Aufgabenbeispiel: Magisches Quadrat (BIFIE, 2013, S. 42)	77
Abbildung 21: Unterschiedliche Anordnungen der Zahlen bei einem 3x3-Quadrat (BIFIE, 2013, S. 61)	78
Abbildung 22: Anwendung des Rückwärtsarbeiten mit der Vorgehensweise eines Buben zum Aufgabenbeispiel: Goldmünzen (Bardy, 2007, S. 149).....	79
Abbildung 23: Vorgehensweise eines Buben beim Lösen des Aufgabenbeispiels: Fingerzählen mithilfe des Umstrukturierens (Bardy, 2007, S. 150).....	81
Abbildung 24: Vorgehensweise eines Kindes beim Aufgabenbeispiel: Addition aller Zahlen von 1 bis 60 (BIFIE, 2013, S. 44)	81
Abbildung 25: Vorgehensweise eines Mädchens beim Aufgabenbeispiel: Vögel auf den Bäumen mithilfe von Wortvariablen (Bardy, 2007, S. 151)	83
Abbildung 26: Vorgehensweise eines Mädchens beim Aufgabenbeispiel: Bilden von Zahlen aus Ziffern (BIFIE, 2013, S. 7).....	85
Abbildung 27: Aufgabenbeispiel: Maximum und Minimum bilden (Böhmer, 2006, S. 35)	90
Abbildung 28: Nuss-Aufgabe (Käpnick, 1998, S. 128)	93
Abbildung 29: Lösungsmöglichkeiten der Nuss-Aufgabe (Käpnick, 1998, S. 128)	94
Abbildung 30: Kreisfelder von Aufgabenbeispiel: Zahlenabstand (Walther, 2004, S. 30)	96
Abbildung 31: Aufgabenbeispiel: Würfel (Bardy, 2007, S. 214).....	98
Abbildung 32: Vier-Punkte-Aufgabenbeispiel aus Ecolier 2019 (Haus der Mathematik, 2019)	101
Abbildung 33: Fünf-Punkte-Aufgabe aus Ecolier 2019 (Haus der Mathematik, 2019)	102
Abbildung 34: Glücksrad (PIKAS, 2019, S. 7)	106
Abbildung 35: Arbeitsblatt 1 des Projektes	109
Abbildung 36: Arbeitsblatt 2 des Projektes	110
Abbildung 37: Arbeitsblatt 3 des Projektes	113
Abbildung 38: Tippkarte 1 zu Arbeitsblatt 3	114
Abbildung 39: Tippkarte 2 zu Arbeitsblatt 3	115

Abbildung 40: Vorderseite des Arbeitsblattes 4 des Projektes.....	117
Abbildung 41: Rückseite des Arbeitsblattes 4 des Projektes	118
Abbildung 42: Vorderseite des Arbeitsblattes 4/1 des Projektes	119
Abbildung 43: Rückseite des Arbeitsblattes 4/1 des Projektes.....	120
Abbildung 44: Arbeitsblatt 5 des Projektes	123
Abbildung 45: Arbeitsblatt 5/1 des Projektes	124
Abbildung 46: Arbeitsblatt 6 des Projektes	125

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Vorgehensweise beim Aufgabenbeispiel Körpergewicht mithilfe einer Tabelle....	74
Tabelle 2: Systematisches Probieren beim Aufgabenbeispiel: Im Puppentheater mithilfe einer Tabelle (vgl. Bardy, 2007, S. 146)	76
Tabelle 3: Kombinationsmöglichkeiten der Augensummen beim Würfeln mit zwei Würfeln	106

1 Themenaufriß und Zielstellungen

Mit Begabungen, die sich bei Schülerinnen und Schülern im Mathematikunterricht zeigen, ist so gut wie jede Lehrperson einer Primarstufe konfrontiert. Daher ist wichtig, diesem Thema eine große Bedeutung im Volksschulbereich zuzuschreiben. Oft erscheint es schwierig, die Kinder während des Unterrichts optimal zu fördern. Daher soll die vorliegende Arbeit Möglichkeiten aufzeigen, welche die Förderung mathematisch begabter Schülerinnen und Schüler während des Regelunterrichts erleichtern. Im Unterricht ist es nicht nur wichtig, leistungsschwachen Kindern Hilfestellungen anzubieten, sondern auch leistungsstarke Schülerinnen und Schüler entsprechend ihrer besonderen Fähigkeiten zu unterstützen.

Das Thema *Begabungsförderung im Mathematikunterricht der Primarstufe* erfordert zuallererst eine ausreichende Auseinandersetzung mit dem Begriff *Begabung*. In der Literatur werden dieser Bezeichnung verschiedene Definitionen zugeordnet. Im folgenden Kapitel werden diese Definitionen einander gegenübergestellt und miteinander verglichen. Fast (2005, S. 22) spricht beispielsweise von einer hohen mathematischen Leistung, die begabte Kinder im Grundschulbereich zeigen. Diese Arbeit bezieht sich auf Kinder, die im Mathematikunterricht besonders hohe Leistungen durch eigenständige und außergewöhnliche Denk- und Handlungsprozesse erbringen. Daher erscheint wichtig, nicht nur die verschiedenen Definitionen von Begabung und im Genaueren von mathematischer Begabung zu erläutern, sondern auch auf die geistigen Fähigkeiten im Bereich der Mathematik, die bei mathematisch begabten Kindern besonders ausgeprägt sind, einzugehen. Weiters wird die Bedeutung des Problemlösens für mathematisch Begabte aufgezeigt, da durch offene Aufgabenstellungen wie Problemlöseaufgaben die mathematischen Fähigkeiten dieser Kinder gefördert werden können.

Die Gegenüberstellung der verschiedenen Definitionen von Begabung hilft Lehrpersonen, sich der Bedeutung von Begabung bewusst zu sein. Folglich finden Beobachtungen innerhalb des Unterrichtsgeschehens statt, um mathematisch begabte Grundschulkinder zu erkennen. Wie wichtig die Diagnose von mathematischer Begabung ist, wann sie sinnvoll ist und welche Möglichkeiten und Probleme sich dabei ergeben, wird in der vorliegenden Arbeit beantwortet. In der Literatur werden unterschiedliche Merkmale von mathematischer Begabung in Form von Merkmalskatalogen für Lehrpersonen und Erziehungsberechtigte, die als Anhaltspunkt dienen sollen, keinesfalls aber eine Voraussetzung für eine Begabung sind, vorgestellt. Die hohen mathematischen Fähigkeiten von begabten Schülerinnen und Schülern können an spezifischen Indikatoraufgaben sichtbar gemacht werden. Da mathematisch Begabte vor allem durch Problemlöseaufgaben, bei denen mehrere Lösungswege möglich sind, gefördert werden können, werden im Bereich der Diagnose auch Vorgehensweisen und Strategien bei solchen Aufgaben

beschrieben, die mathematisch begabte Schülerinnen und Schüler zeigen. So bekommen Lehrpersonen einen Einblick in die Denkprozesse dieser Kinder.

Sobald eine bestimmte mathematische Begabung erkannt wurde, nimmt die Förderung dieser den höchsten Stellenwert ein. Wieso die Förderung dieser Begabung so wichtig ist und welche Ziele sie anstrebt, ist weiters ein wichtiges Thema in dieser Arbeit. Genauso werden Förderungsmaßnahmen wie Akzeleration und Enrichment, Integration und Segregation oder Differenzierung und Individualisierung beschrieben, die bei begabten Kindern angewandt werden können. Die Förderung durch Differenzierung und Individualisierung ist auch im österreichischen Lehrplan der Volksschule (2012, S. 28) in den allgemeinen didaktischen Grundsätzen für die Grundschule verankert. Da sich Schülerinnen und Schüler durch die ständige Entwicklung, der sie ausgesetzt sind, in ihrem Sozialverhalten, ihrer Kommunikationsfähigkeit, der Selbstständigkeit, ihren Interessen, ihrem Vorwissen und dergleichen stark unterscheiden, ist ein differenzierter und teils individueller Unterricht notwendig.

Dies erfordert von der Lehrerin bzw. vom Lehrer, dass sie bzw. er sich um die bestmögliche Förderung jeder einzelnen Schülerin bzw. jedes einzelnen Schülers bemüht. Der Klassenraum soll als lernanregende Umwelt als auch als Raum für kindliches Zusammenleben gestaltet sein [...]. Jeder Unterrichtstag soll inhaltlich und zeitlich so ausgewogen gestaltet sein, dass Arbeit und Spiel, Anstrengung und Entspannung einander ergänzen und durchdringen. Maßnahmen der Individualisierung bzw. inneren Differenzierung sind im Sinne des Förderns und Forderns zu verstehen und zu gestalten. Sie tragen dazu bei, dass die Grundschule die sehr wichtige Aufgabe der Begabungsförderung erfüllt. (Österreichischer Lehrplan der Volksschule, 2012, S. 28)

Die Lehrperson hat also grundsätzlich die Aufgabe, den Unterricht am Kind zu orientieren. Sie soll auf die unterschiedlichen Bedürfnisse, Interessen und Begabungen der Schülerinnen und Schüler eingehen, um so eine optimale Förderung jedes Einzelnen zu erreichen (vgl. Österreichischer Lehrplan der Volksschule, 2012, S. 27).

Abschließend werden, basierend auf den Zielen der Förderung, konkrete Aufgabenbeispiele aus der Praxis vorgestellt, die Lehrpersonen innerhalb des Mathematikunterrichts einsetzen können. Bedeutend ist dabei, dass die Beispiele während der Unterrichtszeit von begabten Kindern bearbeitet werden können. Großer Wert soll darauf gelegt werden, dass diese selbstständig gelöst werden. Des Weiteren werden Möglichkeiten aufgezeigt, Kindern einen abwechslungsreichen Unterricht zu bieten. Um mathematisch begabte Schülerinnen und Schüler zu fördern, aber auch, um den anderen Kindern einer Klasse einen tieferen Einblick in die Mathematik zu gewähren, bietet sich zum Beispiel das Projekt zum Thema *Wahrscheinlichkeit*, das mit der gesamten Klasse durchgeführt werden kann und Differenzierungsmaßnahmen sowohl für begabte als auch für leistungsschwache Kinder beinhaltet, an. Dieses Projekt hat den Vorteil, dass es ohne weiters in den Regelunterricht eingebaut werden kann. Die Schulklasse

kann beispielsweise auch am Wettbewerb *Känguru der Mathematik*, der jährlich stattfindet, teilnehmen oder das *Haus der Mathematik* in Wien besuchen.

Der Arbeit liegt folgende Forschungsfrage zugrunde:

Woran lässt sich mathematische Begabung im Unterricht erkennen und wie können mathematisch begabte Grundschulkinder gefördert werden?

Käpnick (1998) sowie Heller (1996) beschreiben, dass sich Lehrpersonen mit der Diagnose einer mathematischen Begabung Zeit lassen sollen. Kinder aus der ersten und zweiten Schulstufe durchlaufen häufig noch Entwicklungsprozesse. Eine zu frühe Diagnose kann zu Einschränkungen in ihrer weiteren Schullaufbahn führen. Sie werden beispielsweise von der Klassengemeinschaft ausgegrenzt, da sie immer andere Aufgaben bekommen als ihre Mitschülerinnen und Mitschüler. Daher ist wichtig, solche Auswirkungen durch einen sorgfältigen Umgang mit der Diagnose und Förderung von mathematischer Begabung zu vermeiden beziehungsweise zu vermindern.

2 Definition des Begabungsbegriffs

Die Definition von *Begabung* ist umstritten. Der Begriff wird sehr unterschiedlich interpretiert und verstanden, weshalb umso schwieriger ist, sich auf eine konkrete Definition festzulegen. Den Unterschied zwischen Hochbegabung und einer besonderen Begabung in einem bestimmten Bereich zu erkennen, ist somit Voraussetzung für eine tiefgründige Auseinandersetzung damit. Im Folgenden wird zuerst der allgemeine Begabungsbegriff festgelegt und anschließend auf die Definition von mathematischer Begabung näher eingegangen.

2.1 Begabung

Der Begriff *Begabung* wird grundsätzlich sehr unterschiedlich aufgefasst und verstanden. Gleichgesetzt wird dieser oft mit *Hochbegabung*, *Intelligenz* oder *Leistung*. Auch die Begriffe *Talent*, *Fähigkeit* oder *Kreativität* werden in diesem Zusammenhang häufig verwendet. Daher ist besonders wichtig, diese Begrifflichkeiten voneinander abzugrenzen beziehungsweise Gemeinsamkeiten aufzuzeigen. Käpnick (1998, S. 45ff) beschreibt in Bezug auf den Begabungsbegriff vier unterschiedliche Dimensionen, wobei er dabei unter anderem eine Definition von Cropley, Mc Leord und Dehn (1988, S. 17) heranzieht.

Er sieht Begabung in Bezug auf eine bestimmte Tätigkeit oder auf einen bestimmten Tätigkeitsbereich. Häufig wird von begabten oder hochbegabten Kindern gesprochen, wenn sie hohe Intelligenz in einem speziellen Bereich aufweisen. Cropley, Mc Leord und Dehn (1988, S.17) definieren Begabung wie folgt: „(Hoch-)begabte und talentierte Kinder sind diejenigen, die von Experten als solche herausgefunden wurden, die wegen besonderer Qualitäten oder Eigenschaften zu hoher Performanz (praktischer) Intelligenz fähig sind [...]“. (S. 17)

Bei dieser Definition werden die beiden Begriffe *Intelligenz* und *Begabung* miteinander vermischt. Demnach beschreibt Käpnick (1998, S. 45ff), dass begabte Menschen hohe Leistungen in einem bestimmten Tätigkeitsbereich, wie zum Beispiel Musik, Mathematik oder Sport, erbringen.

Die zweite Dimension, die der Autor beschreibt, stützt sich auf relevante Faktoren, die für die Entstehung und Entwicklung von Begabung wichtig sind. Dabei werden drei verschiedene Ansätze in der Begabungsforschung unterschieden:

- Biologische Ansätze: Die Begabung ist erblich bedingt.
- Environistische Ansätze: Soziale Umwelteinflüsse dominieren.
- Zweifaktorenmodell: Die Begabung entwickelt sich durch Erbanlagen und durch Umwelteinflüsse.

Die Vertretung des ersten Ansatzes ist zu überdenken, da in diesem Fall keine historischen Veränderungen des durchschnittlichen IQ-Wertes erkennbar sein dürften. Dies ist allerdings nicht der Fall, da sich Menschen im Laufe der Jahre verändern und demnach auch die Leistungen dieser unterschiedlich sind und sich in verschiedene Richtungen entwickeln können. Auch der zweite Ansatz, dass eine Begabung nur durch soziale Umwelteinflüsse entstehen kann, ist eine sehr extreme Ansicht. Denn selbstverständlich spielt bei der Entwicklung von Begabung die Umwelt eine große Rolle, allerdings sind deren Einflüsse nicht der ausschlaggebende Aspekt für diese Entwicklung. Käpnick (1998, S. 48f) vertritt das Zweifaktorenmodell, da sowohl Umwelteinflüsse als auch genetische Anlagen bei der Entwicklung von Begabungen großen Einfluss haben.

Die dritte Dimension beschreibt Begabung als Potential für überdurchschnittliche Fähigkeiten, die höchstwahrscheinlich noch erreicht werden können, oder als bereits vorhandene überdurchschnittliche Fähigkeiten. Ob Begabung als später zu erwartende hohe Leistungen oder als bereits vorhandene Leistungen gesehen wird, hängt von der Entstehung und Entwicklung dieser ab. Dass man sich bei der Entwicklung einer Begabung jedoch nur auf die bereits vorhandenen Fähigkeiten beschränkt, ist unzulässig, da dabei die sozialen Umwelteinflüsse und die Persönlichkeitsmerkmale nicht miteinbezogen werden. Wird eine Begabung erkannt, so kann meist nur eine Vorhersage über die zu erwartenden Leistungen gemacht, nicht aber genau beschrieben werden, wie sich diese Leistungen in Zukunft entwickeln werden.

Bei der vierten und letzten Dimension wird Begabung als eine individuelle Ausprägung hoher Leistungsfähigkeit gesehen und in unterschiedliche Niveaustufen gegliedert. Jeder Mensch weist in existentiellen Tätigkeitsbereichen, wie beispielsweise Geschicklichkeit, Sprache oder Denktätigkeiten, grundsätzlich eine Begabung auf. Diese Begabung kann aber bei jedem Menschen anders ausgeprägt sein, da die sozialen Umwelteinflüsse und die genetischen Anlagen eine unterschiedlich große Rolle spielen. Für die verschiedenen Ausprägungen einer Begabung führt Käpnick (1998, S. 52) Niveaustufen an. Die Benennungen dieser Stufen sind sehr unterschiedlich. Er spricht von mathematisch minderbegabten, durchschnittlich begabten und höher als durchschnittlich begabten Schülerinnen und Schülern. Er weist jedoch auch darauf hin,

dass diese Einteilung häufig sehr schwierig ist, da jeder andere Stärken und Schwächen aufweist und somit auch unterschiedliche Denkprozesse und Lösungswege hat, die nicht immer eindeutig in eine Stufe zuordenbar sind.

Auch Bardy (2007, S. 9ff) legt keine allgemein gültige Definition von Begabung fest. Klar ist jedoch, dass begabte Menschen durch ihre Leistungen und Fähigkeiten in bestimmten Bereichen besonders positiv auffallen. Da bereits viele Definitionen und Modelle zur Begabung bekannt sind, hat Lucito (1964 zit. nach Bardy, 2007, S. 11) eine Klassifikation dieses Begriffs vorgenommen. Diese lautet wie folgt:

1. Klasse (Ex-post-facto-Definitionen): Nach diesen Definitionen sind Menschen begabt, wenn sie etwas Herausragendes geschafft haben. Kinder oder Jugendliche fallen im Normalfall nicht in diesen Definitionsbereich.
2. Klasse (IQ-Definitionen): Dabei spricht man von einer Begabung, wenn der Intelligenzquotient 130 oder mehr beträgt.
3. Klasse (Talentdefinitionen): Durch diese Definition werden herausragende Leistungen in speziellen, gesellschaftlich relevanten Fachgebieten wie Mathematik beschrieben.
4. Klasse (Prozentsatzdefinitionen): Ein bestimmter Prozentsatz der Bevölkerung gilt als begabt. Dies wird durch Schulnoten, Schulleistungstests oder Werte der Intelligenztests gemessen.
5. Klasse (Kreativitätsdefinitionen): Dabei wird die Festlegung einer Begabung mit dem Intelligenzquotienten abgelehnt. Originelle und produktive Leistungen sind in diesem Fall besonders wichtig.

Diese fünf verschiedenen Klassen sind nicht eindeutig voneinander abgegrenzt, sondern können sich auch teilweise überschneiden. Wird die IQ-Definition mit der Kreativitätsdefinition verglichen, so ist sofort erkennbar, dass erstere von einer Begabung ausgeht, wenn der Mensch einen hohen Intelligenzquotienten aufweist. Die Kreativitätsdefinition legt keinen Intelligenzquotienten fest, nach dem Menschen begabt sind. Im Gegenteil zu diesen beiden Auffassungen des Begabungsbegriffs stehen die Klassen 3 und 4 in engem Zusammenhang. Beide nehmen unter anderem den Intelligenzquotienten als Maßstab für eine Begabung.

Nach Heller (1996, S. 12) ist Begabung ein persönliches, relativ stabiles und anhaltendes Fähigkeits- und Handlungspotenzial. Dieses besteht aus kognitiven, emotionalen, kreativen und motivationalen Aspekten, die durch bestimmte Einflussfaktoren weiter ausgeprägt werden

können und so eine Person in die Lage versetzen, in einem bestimmten Bereich hohe Leistungen zu erbringen. Demnach ist eine Begabung aufgrund der unterschiedlichen Stärken, Schwächen und Fähigkeiten bei jedem anders.

Im Zusammenhang mit dem Begabungsbegriff spielt auch der Begriff *Leistung* eine wichtige Rolle. Um Begabung zu erkennen, müssen Menschen etwas leisten, woran diese messbar wird. Von Leistung im menschlichen Bereich wird gesprochen, „wenn der Vollzug oder das Ergebnis einer Arbeit in Relation zu einem qualitativen oder quantitativen Gütemaßstab gesetzt wird“ (Fast, 2005, S. 22). Die Durchführung der Aktivitäten als auch das Endprodukt werden zur Wertung der Leistung herangezogen. Somit wird zwischen einem statischen Leistungsbegriff, dem Ergebnis, und einem dynamischen Leistungsbegriff, dem Prozess des Vollzugs, unterschieden (vgl. Schröder, 1997, S. 13ff). Jürgens (1999, S. 50f) stellt zwei Merkmale vor, die Leistung in der Grundschule kennzeichnen: Einerseits ist Leistung produkt- und prozessorientiert. Also ist nicht nur die Bewertung des Ergebnisses wichtig, sondern immer auch die Beachtung des Prozesses, der Bedingungen und der Vorgänge, um Leistungen zu beurteilen. Andererseits entsteht Leistung beim individuellen und sozialen Lernen. Schulische Leistungen sind zwar oft das Ergebnis individueller Lernergebnisse, können aber auch in anderen Sozialformen wie Partner- oder Gruppenarbeit erbracht werden.

Weiters stellt die Intelligenz des Individuums einen ausschlaggebenden Aspekt für eine Begabung dar. Roth (1998, S. 17f) beschreibt verschiedene Feststellungen in Bezug auf Intelligenz, die allgemein gültig sind:

- Intelligenz ist nicht direkt beobachtbar, sondern kann nur durch ein beobachtbares Verhalten erkennbar gemacht werden.
- Verhalten, das als intelligent bezeichnet wird, ist vom Funktionieren des Zentralnervensystems abhängig. Intelligenz kann also mitunter angeboren sein, muss sich jedoch teilweise erst entwickeln.
- Die Merkmale von Intelligenz können nicht eindeutig am Menschen selbst festgestellt werden, sondern sind immer in einem Zusammenspiel mit seiner Umwelt zu erkennen.
- Die Begriffe *Lernen*, *Gedächtnis* und *Denken* sind nicht eindeutig von Intelligenz zu differenzieren, aber auch nicht eindeutig in Relation zueinander zu setzen.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die meisten Autorinnen und Autoren gleiche Ansichten in Bezug auf den Begabungsbegriff haben. Das Zusammenspiel der genetischen Veranlagung und der sozialen Umwelteinflüsse ist bei der Entwicklung von Begabung von großer Bedeutung. Dass Begabung durch besondere Fähigkeiten in einem oder mehreren Bereichen gekennzeichnet ist, beschreiben Bardy (2007), Heller (1996) und Käpnick (1998). Weiters stellt

Intelligenz bei Begabung einen wichtigen Aspekt dar. Denn begabte Menschen weisen, laut dieser Autoren, immer auch eine höhere Intelligenz als andere auf. Nur Lucito (1964 zit. nach Bardy, 2007) beschreibt aufgrund der Kreativitätsdefinition, dass Intelligenz in keinerlei Hinsicht in Zusammenhang mit dem Begabungsbegriff steht. Also intelligente Menschen sind nicht ohne weiters begabt zugleich.

2.2 Begabung in Bezug auf die Mathematik

Nachdem in 2.1 der allgemeine Begabungsbegriff erläutert wurde, soll nun Begabung in Bezug auf die Mathematik genauer beschrieben werden. Zuerst wird in den nachfolgenden Kapiteln der Unterschied zwischen Alltagsdenken und mathematischem Denken dargelegt. Anschließend wird auf geistige Fähigkeiten, die für mathematisches Arbeiten von großer Bedeutung sind, eingegangen. Dabei muss geklärt werden, was überhaupt unter mathematischen Fähigkeiten, mit denen hohe Leistungen erbracht werden können, verstanden wird und welche verschiedenen Aspekte dabei von großer Bedeutung sind. Überdies spielt auch das problemlösende Denken eine wichtige Rolle bei mathematisch begabten Schülerinnen und Schülern, weshalb auch auf die Bedeutung dessen eingegangen wird.

2.2.1 Alltagsdenken und mathematisches Denken

Um konkret über mathematische Begabung sprechen zu können, hat es oberste Priorität, herauszufinden, welche geistigen Fähigkeiten notwendig sind, um sich mit der Mathematik beschäftigen zu können.

Ob Alltagsdenken und mathematisches Denken zwei völlig verschiedene Denkweisen sind oder im Zusammenhang zueinanderstehen, soll in diesem Kapitel erläutert werden. Heymann (2013) nennt dafür zwei unterschiedliche Standpunkte: die Differenzannahme und die Kontinuitätsannahme. Die Differenzannahme beschreibt er wie folgt:

Alltägliches und mathematisches Denken sind grundsätzlich verschieden. Das Alltagsdenken ist – wie die Alltagssprache, auf die es sich stützt – vage, unpräzise und führt zu keinen klaren Ergebnissen. Eine Ursache von Fehlern ist, dass die Schüler ihrem Alltagsdenken verhaftet bleiben. Im Mathematikunterricht ist jedoch die mathematische Denkweise die allein angemessene. Ein vorrangiges Ziel des Mathematikunterrichts muss es sein, das Alltagsdenken der Schüler möglichst weitgehend durch mathematisches Denken zu ersetzen. Schülern, denen das 'Umschalten' auf das mathematische Denken nicht gelingt, ist die Unvollkommenheit und Problemunangemessenheit des Alltagsdenkens zu demonstrieren. (S. 224)

Der Differenzannahme nach ist das mathematische Denken nicht mit dem alltäglichen Denken verknüpft. Orientieren sich Lehrerinnen und Lehrer im Mathematikunterricht an dieser Ansicht, so können sie kaum zwischen diesen beiden Denkweisen vermitteln.

Die Kontinuitätsannahme beschreibt Heymann (2013) so:

Das mathematische Denken stellt gleichsam eine systematische Fortschreibung des Alltagsdenkens dar: Das Alltagsdenken wird durch Schärfung seiner Begrifflichkeit und durch systematische und bewusste Anwendung bestimmter Schlussweisen und Strategien, die im Prinzip (aber häufig eben inkonsequent) auch im Alltagsdenken schon nachweisbar sind, für eine bestimmte Klasse von Problemen (eben die sogenannten 'mathematischen' Probleme) effektiviert. Zwischen dem Alltagsdenken (bzw. der Fachsprache) gibt es eine Fülle von Zwischenstufen, die für das Mathematiklernen wichtig sind. Mathematisches Lernen hat desto größere Erfolgschancen, je weniger die Lernenden zwischen ihrem Alltagsdenken und dem Unterricht geforderten mathematischen Denken eine Kluft empfinden. (S. 224)

Bei dieser Ansicht werden die Absichten der Vermittlung von mathematischen Inhalten zwischen dem Alltagsdenken und dem mathematischen Denken sowie mathematischen Inhalten und der Allgemeinbildung deutlich.

Letztlich scheint aber wichtig, die beiden verschiedenen Annahmen nicht völlig getrennt voneinander zu betrachten. Denn im Mathematikunterricht wird trotz des spezifischen Faches oft auch auf das alltägliche Denken Bezug genommen, weshalb dieses von jenem Fach nicht ausgeschlossen werden sollte. Genauso benötigen Kinder und selbstverständlich Erwachsene mathematisches Denken für den Lebensalltag (vgl. Bardy, 2005, S. 29f). Beispielsweise wird beim Einkaufen von Lebensmitteln auch Bezug zur Mathematik hergestellt, wenn der ungefähre Endbetrag des Einkaufs geschätzt werden möchte.

2.2.2 Geistige Fähigkeiten mathematischen Denkens

Devlin (2003, S. 26ff) beschreibt Grundlagen geistiger Fähigkeiten mathematischen Denkens, die teilweise im Zusammenhang miteinander stehen. Bardy (2007, S. 31ff) greift diese auf, wählt in seinem Werk jedoch eine etwas andere Reihenfolge, da er die Grundlagen nach ihrer Relevanz geordnet hat. Folgende Fähigkeiten sind in der Reihenfolge nach Bardy (2007, S. 31ff) für das Betreiben von Mathematik notwendig:

- (1) Die Ausprägung eines Zahlensinns: Menschen, die einen ausgeprägten Zahlensinn aufweisen, sind in der Lage, simultan, das heißt auf einen Blick, eine bestimmte Anzahl von Gegenständen zu erkennen (vgl. Bardy, 2007, S. 31f). In den meisten Fällen gelingt dies bei höchstens vier bis fünf Objekten. Selten können Menschen auch sechs oder mehr Objekte auf diese Weise erfassen (vgl. Schipper, 2009, S. 71). Die Simultanauffassung kann vor allem durch das unstrukturierte Legen von kleinen Anzahlen in der

Höhe von vier bis fünf mit Legematerial geübt werden. Die Lehrperson legt beispielsweise drei Plättchen auf den Tisch und das Kind muss diese Anzahl sofort auf einen Blick erfassen (vgl. Schipper, 2009, S. 293).

- (2) Numerische Kompetenz: Die numerische Kompetenz beschreibt jene Fähigkeit, kleine Mengen zu unterscheiden und miteinander zu vergleichen (vgl. Bardy, 2007, S. 32). So werden für Schülerinnen und Schüler beispielsweise zwei unterschiedlich große Mengen mithilfe von Legeplättchen auf dem Tisch platziert. Die Kinder vergleichen diese miteinander und nennen, welche Menge größer beziehungsweise kleiner ist.
- (3) Algorithmische Fähigkeiten: Algorithmische Fähigkeiten ermöglichen den Menschen, unter der Beachtung von Rechenvorschriften rechnerische oder algebraische Aufgaben zu lösen. In der Grundschule wäre solch ein Algorithmus beispielsweise die schriftliche Multiplikation (vgl. Bardy, 2007, S. 32).
- (4) Der Sinn für Ursache und Wirkung: Den Sinn für Ursache und Wirkung erwerben Kinder bereits im frühen Alter. Sie wissen, dass eine bestimmte Handlung immer auch eine Konsequenz mit sich bringt (vgl. Bardy, 2007, S. 33). Schneiden Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht zum Beispiel in der Diagonale ein Quadrat durch, so ist die Auswirkung die Entstehung zweier Dreiecke.
- (5) Die Fähigkeit, Bezüge herzustellen beziehungsweise über Zusammenhänge nachzudenken: In der Mathematik liegt häufig der Schwerpunkt darauf, Bezüge zwischen abstrakten Objekten herzustellen. Dies wird in der Grundschule beispielsweise auch zwischen Objekten der Arithmetik und Objekten der Geometrie gemacht.

Bei diesem Aspekt erscheint das Denken in Analogien als besonders wichtig. Kann ein Mensch Analogien herstellen, so ist er in der Lage, sein Wissen zu nutzen, um es auf andere, unbekannte Probleme zu übertragen (vgl. Bardy, 2007, S. 33).
- (6) Die Fähigkeit, eine längere Kausalkette von Tatsachen oder Ereignissen zu konstruieren und zu verfolgen: Diese Fähigkeit besitzen wir nicht im frühen Kindesalter. Wann sich diese jedoch entwickelt, ist von Mensch zu Mensch verschieden und nicht eindeutig festgelegt. Sie ist bei begabten Kindern allerdings deutlich besser ausgeprägt. Ein Beispiel für eine Kausalkette von Tatsachen wäre ein mathematischer Beweis (vgl. Bardy, 2007, S. 33f).
- (7) Die Fähigkeit zum logischen Denken: Logisches Denken wird vorausgesetzt, um sich mit der Mathematik auseinandersetzen zu können (vgl. Bardy, 2007, S. 34). Zu diesen logischen Fähigkeiten zählt Bardy (2007, S. 155f) beispielsweise das Verstehen und Verwenden logischer Sprachbestandteile wie „und“ oder „oder“, das Führen einfacher

Beweise oder das Umformulieren einer vorgegebenen Aussage in eine logisch gleiche. Ist ein Kind in der Lage, logisch zu denken, so beherrscht es demnach die gerade genannten, logischen Fähigkeiten.

- (8) Die Fähigkeit zu abstrahieren: Menschen, die in der Lage sind, zu abstrahieren, können sich Objekte ins Gedächtnis rufen, die sie womöglich noch nie gesehen, sondern von denen sie nur gehört haben, oder die nur fiktional vorhanden sind. Diese Objekte, die in unseren Gedanken existieren, sind Symbole, die eigentlich Zeichen für andere Objekte sind (vgl. Devlin, 2003, S. 149ff).
- (9) Räumliches Vorstellungsvermögen: Besuden (1999, S. 2f) beschreibt drei grundlegende Aspekte des räumlichen Vorstellungsvermögens:
- Räumliches Orientieren: Dabei ist der Mensch fähig, sich gedanklich oder real im Raum orientieren zu können.
 - Räumliches Vorstellen im engeren Sinn: Dieser Aspekt beschreibt die Fähigkeit, räumliche Objekte oder Beziehungen zwischen diesen in den Gedanken wiederherstellen zu können.
 - Räumliches Denken: Dieses lässt zu, mit Vorstellungsinhalten gedanklich zu operieren und auch ihre Lage oder ihre Beziehungen zueinander in den Gedanken zu verändern.

Die angeführte Liste nach Bardy (2007) und Devlin (2003) beschreibt geistige Fähigkeiten, die teilweise sehr stark in Beziehung zueinander stehen. So benötigen Schülerinnen und Schüler beispielsweise die Fähigkeit zum logischen Denken für die Konstruktion einer längeren Kausalkette von Tatsachen oder Ereignissen. Um zum Beispiel einen mathematischen Beweis aufzustellen, müssen logische Schlussfolgerungen der einzelnen Schritte bis zum endgültigen Beweis stattfinden, damit er letztlich allgemein gültig ist. Weiters steht (7), wie bereits in diesem Punkt beschrieben, eng in Zusammenhang mit (4) und (5). Logisches Denken befähigt jemanden, Bezüge herzustellen oder den Sinn für Ursache und Wirkung zu haben. Demnach ist zu hinterfragen, ob (7) tatsächlich als eigener Bereich definiert werden sollte. Denn er beschreibt ohnedies Fähigkeiten, die für die anderen, genannten Bereiche benötigt werden.

Auch Käpnick (1998, S. 110ff) beschreibt grundlegende geistige Fähigkeiten, die für die Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten notwendig sind. Darunter zählt er die Fähigkeit zum Strukturieren, zum Wechseln zwischen den Repräsentationsebenen, zum Umkehren von Prozessen, zum Transfer mathematischer Zusammenhänge, die Gedächtnisfähigkeit für mathematische Sachverhalte, das räumliche Vorstellungsvermögen sowie die Spielfähigkeit.

Wie bereits in 2.1 beschrieben wurde, kann Intelligenz nicht vom Gedächtnis abgegrenzt werden. Die Gedächtnisfähigkeit kann auch als intellektuelle Fähigkeit verstanden werden. Dörner und Van der Meer (1995) sowie Käpnick (1998) sind der Meinung, dass das Gedächtnis für das Wiedererkennen, das Orientieren in der Umwelt, Denkprozesse und Kreativität notwendig sei. Sie sehen das Gedächtnis als ein sehr aktives, veränderbares Organ. So weisen auch potentiell begabte Grundschülerinnen und Grundschüler eine beachtliche Leistung des Gedächtnisses auf. Beispielsweise sind sie den Erwachsenen häufig beim Memory-Spiel überlegen. Käpnick (1998, S. 111) beschreibt weiters, dass die Gedächtnisleistung stark vom Vorwissen zu einem bestimmten, mathematischen Sachverhalt der Kinder abhängig sei. Deshalb seien potentiell begabte Kinder der dritten und vierten Klasse ihren Mitschülerinnen und Mitschülern in der Informationsaufnahme und Speicherung genauso wie im Wiedererkennen und Reproduzieren mathematischer Sachverhalte überlegen.

Die Fähigkeit zum Strukturieren ermöglicht Kindern das Erkennen und Herstellen von Mustern beziehungsweise Anordnungen sowie von gesetzmäßigen Zusammenhängen in mathematischen Sachverhalten. Mathematische Objekte sind zum Beispiel geometrische Figuren, Zahlen oder Gleichungen. Diese Fähigkeit wird bereits in der ersten Klasse gefördert. Erstklässlerinnen und Erstklässler ordnen beispielsweise geometrische Figuren nach bestimmten Kriterien und vergleichen sie miteinander. Genauso entwickeln sie aus vorgegebenen Objektmengen durch das Abstrahieren hinsichtlich der Mächtigkeit von Mengen die natürlichen Zahlen. Zur Fähigkeit des Strukturierens zählt unter anderem auch das Erfassen einer bestimmten Rechenoperation als Vertreter einer speziellen Gruppe von Aufgaben. Diese Vorgehensweise ist zum Beispiel beim Sachrechnen notwendig (vgl. Käpnick, 1998, S. 111f). Im Zuge der Untersuchungen, die in Käpnick (1998) und Fast (2005) beschrieben und im Kapitel 3.4 genauer erläutert werden, versuchten die Autoren durch geeignete, mathematische Aufgaben zu untersuchen, inwieweit potentiell begabte Schülerinnen und Schüler aus dritten und vierten Klassen, im Vergleich zu gleichaltrigen Kindern, mathematische Sachverhalte strukturieren können.

Die Fähigkeit zum Wechseln zwischen den Repräsentationsebenen kann vor allem bei vermutlich begabten Grundschülerinnen und Grundschülern als Erkennungsmerkmal gesehen werden, da sie im Alter von acht bis neun Jahren im Übergang von der praktisch-gegenständlichen und anschaulichen Ebene der geistigen Tätigkeit zum sprachlich-begrifflichen Denken sind. Diese Kinder benötigen bei der Auseinandersetzung mit mathematischen Sachverhalten häufig noch Veranschaulichungen, die in die ikonische Ebene fallen. Genauso versuchen sie auf der enaktiven Ebene, mathematische Sachverhalte zu verstehen, wobei sie gleichzeitig schon auf der symbolischen Ebene tätig sind. In der Grundschule werden Schülerinnen und Schüler

bereits ab der ersten Klasse daran gewöhnt, zwischen den drei Repräsentationsebenen ikonisch, enaktiv und symbolisch zu wechseln. So werden sie zum Beispiel von den Lehrpersonen dazu angeleitet Additionen wie $7 + 4$ zuerst mithilfe von Legematerial darzustellen, um dann aus der Darstellung zu einer Lösung zu kommen (vgl. Käpnick, 1998, S. 112f). Mithilfe der Untersuchungen, die in Käpnick (1998) und Fast (2005) durchgeführt wurden, wollten die beiden Autoren überprüfen, inwieweit potentiell begabte Dritt- und Viertklässlerinnen und -klässler den Wechsel zwischen den drei Ebenen bei komplexeren Problemlöseaufgaben schaffen.

„Reversibilität bedeutet das Umkehren von Gedankengängen bei Rechenoperationen und Problemaufgaben. Als heuristische Hilfe steht sie beim Lösen von Denk- und Sachaufgaben zur Verfügung.“ (Fast, 2005, S. 37) Die Fähigkeit zur Reversibilität spielt schon im Anfangsunterricht der Volksschule eine bedeutende Rolle. Manche Schülerinnen und Schüler der ersten Klasse sind bereits in der Lage, wechselseitige Zuordnungen zwischen Mengen und Zahlen oder Umkehrbeziehungen zwischen den Operationen Subtraktion und Addition herzustellen. Kinder der dritten und vierten Klasse benötigen diese Fähigkeit beispielsweise beim Lösen von Knobelaufgaben (vgl. Käpnick, 1998, S. 113). Im Zuge der Untersuchungen von Käpnick (1998) und Fast (2005) wurde überprüft, ob Kinder, welche die Fähigkeit besitzen, mathematische Gedankengänge umzukehren, mathematisch begabt sind.

Unter der Fähigkeit zum Transfer mathematischer Zusammenhänge versteht Käpnick (1998, S. 113) das Übertragen von mathematischen Strukturen. Diese soll den Kindern helfen, neue, unbekannte Probleme im Bereich der Mathematik zu lösen. Jene Fähigkeit zeigen beispielsweise bereits Drittklässlerinnen und Drittklässler beim Übertragen der Rechenstrategien vom Zahlenraum 100 in den Zahlenraum 1 000. Genauso sind sie durch diese Fähigkeit in der Lage, heuristische Strategien wie das Gestalten von Tabellen beim Lösen von Sachaufgaben auf andere, ähnliche Aufgaben zu übertragen.

Aus welchen Aspekten sich das räumliche Vorstellungsvermögen zusammensetzt, wurde bereits im obigen Text, in der Anlehnung an Devlin (2003) und Bardy (2007), beschrieben. Ein Raumvorstellungsvermögen wird nicht nur im Bereich der Geometrie benötigt, sondern auch bei Problemlöseaufgaben im algebraisch-arithmetischen Bereich. Daher erscheint Käpnick (1998, S. 114f) die räumliche Vorstellungskraft umso wichtiger.

Die inhaltlichen Aspekte des räumlichen Vorstellungsvermögens sind speziell für mathematische Erkenntnisprozesse von Grundschulern wichtig, weil sie derartige Zusammenhänge häufig erst mittels gegenständlich-praktischer Handlungen oder Veranschaulichungen erfassen können, dann beim notwendigen Wechseln der Repräsentationsebenen bildliche Darstellungen speichern und mit diesen Vorstellungsbildern gedanklich operieren müssen. (Käpnick, 1998, S. 115)

Fast (2005, S. 39) schreibt hierzu noch, dass algebraisch-arithmetische Sachverhalte räumlich-vorstellungsmäßig als auch begrifflich-abstrakt wiedergegeben werden können. Manche Kinder können so zum Beispiel ein Problem auf der begrifflich-abstrakten Ebene nicht lösen, veranschaulichen sie das Problem jedoch, können sich individuelle Lösungsmöglichkeiten ergeben.

Die mathematische Begabung könnte sich letztendlich auch aus der Spieltätigkeit der Grundschülerinnen und Grundschüler bilden. Geistigen Aktivitäten von Dritt- und Viertklässlerinnen und -klässlern beinhalten oft auch den spielerischen Umgang mit Zahlen und Formen. Sie handeln häufig auf vielfältige Weise, ohne lange nachzudenken, und mit viel Fantasie (vgl. Käpnick, 1998, S. 115).

2.2.3 Definition einer mathematischen Begabung

Fast (2005, S. 27) beschreibt zwei unterschiedliche Positionen nach Gardner (1991, S. 130ff) und Spearman (1927 zit. nach Fast, 2005, S. 27ff) in Bezug auf den Begabungsbegriff in der Mathematik. Gardner meint, dass nur durch eine spezifische Intelligenz hohe mathematische Leistungen erbracht werden können. Spearman wiederum ist der Meinung, dass Menschen in allen Bereichen intelligent sein müssen, ohne dabei in einem bestimmten Bereich besondere Leistungen zu zeigen.

Diese beiden verschiedenen Ansichten, um mathematische Begabung zu erklären, können in drei Modelle unterteilt werden. Das erste Modell besagt, dass die spezifisch mathematischen Fähigkeiten hoch ausgeprägt sind. Das bedeutet, dass die Intelligenz, die gezeigt wird, nur im Bereich der Mathematik gilt. So müsste es, dieser Ansicht nach, Menschen geben, die in der Mathematik hohe Leistungen erbringen, in allen anderen Lebensbereichen jedoch nur durchschnittliche bis unterdurchschnittliche. Das zweite Modell beschäftigt sich mit einer hohen Ausprägung der allgemein intellektuellen Fähigkeiten in Kombination mit spezifisch mathematischen Fähigkeiten. Im dritten Modell wird beschrieben, dass lediglich die allgemein intellektuellen Fähigkeiten eine hohe Ausprägung aufweisen. Die ersten beiden Modelle benötigen eine eigene mathematische Intelligenz. Beim dritten Modell wird mathematische Leistung durch die Anwendung allgemein intellektueller Fähigkeiten in der Mathematik erklärt.

Auf diese drei Ansichten wird nun im Folgenden genauer eingegangen. Neben diesen verschiedenen Sichtweisen über mathematische Begabung beschreibt Käpnick (1998, S. 76ff) weiters kognitionspsychologische Theorieansätze und soziologische Aspekte einer mathematischen Begabung. Auch diese werden im nachfolgenden Text genauer erläutert.

Mathematische Begabung als bereichsspezifische Intelligenz

Vertreter des ersten Modells sind Van der Meer (1985, S. 233) und Gardner (1991, S. 130ff). Van der Meer ist der Meinung, dass eine spezifische mathematische Begabung vorhanden sein kann, wenn sich subjektive Denkstrukturen an objektive Problemstrukturen anpassen. Für eine mathematische Begabung müssen die subjektiven Denkstrukturen passen, denn genau diese guten Passungen bezeichnet die Autorin als mathematische Begabung. Gardner spricht von logisch-mathematischer Intelligenz. Diese befähigt Menschen dazu, „durch Abstraktionen Ähnlichkeiten, Muster, Gemeinsamkeiten zwischen Dingen zu erkennen, sowie [...] mit Zahlen, Mengen und mentalen Operationen umzugehen.“ (Fast, 2005, S. 28) Bei der Entwicklung dieser Intelligenz vom Kindesalter an steht aber nicht immer nur das Verständnis gegenüber Zahlen im Vordergrund, sondern auch das allgemeine Erkennen und Verstehen von Regelmäßigkeiten und Mustern. Laut Fast (2005, S. 29) weisen mathematisch begabte Menschen die Fähigkeit auf, die Problematik eines bestimmten Themas zu verstehen, indem sie beurteilen, welche Informationen für die Bearbeitung und Lösung des Problems relevant oder irrelevant sind. Des Weiteren benötigen begabte Menschen für Fast (2005, S. 39) einen gewissen Mut, um sich schwierigen, mathematischen Problemen zu widmen, bei denen die Zeit der Bearbeitung ungewiss ist. In Folge dessen ist das schnelle Denken bei der Lösungsfindung umso wichtiger. Die Autorin beschreibt weiters, dass mathematisch begabte Personen den Umgang mit langen Beweisketten beherrschen müssen und in weiterer Folge Theorien aufstellen, die von einfachen Bedingungen hergeleitet wurden. Die Lösung des Problems muss schließlich logisch, klar und konsistent sein. Auch Bardy (2007, S. 45) erwähnt, dass Intelligenzforscherinnen und Intelligenzforscher bereichsspezifische Konzeptionen entwickelt haben, die dem ersten Modell entsprechen. Unter anderem nennt er das *multiple Intelligenzmodell* nach Gardner (1991, S. 77ff). In diesem Modell geht Gardner davon aus, dass mehrere, intellektuelle Kompetenzen vorhanden sind, die er *menschliche Intelligenzen* nennt. Diese werden mithilfe von sieben Intelligenzen beschrieben, die als Grundlage jeder Leistung dienen. Im folgenden Abschnitt werden sie kurz beschrieben:

- Sprachliche Intelligenz: Sprachlich intelligente Menschen sind sensibel gegenüber Wortbedeutungen und verfügen über hohe, sprachliche Gedächtnisleistungen.
- Logisch-mathematische Intelligenz: Menschen mit einer logisch-mathematischen Intelligenz haben ausgeprägte, mathematische Denkfähigkeiten.
- Räumliche Intelligenz: Räumlich intelligente Personen haben eine gute Raumwahrnehmung und verfügen über räumliches Denken.

- Körperlich-kinästhetische Intelligenz: Dabei besitzt der intelligente Mensch psychomotorische Fähigkeiten, die für hohe Leistungen im Bereich Sport oder Tanz benötigt werden.
- Musikalische Intelligenz: Musikalisch intelligente Personen haben beim Komponieren und Musizieren eine besonders hohe Begabung.
- Intrapersonale Intelligenz: Hierbei können Personen ihre eigenen Empfindungen gut einschätzen.
- Interpersonale Intelligenz: Diese Intelligenz beschreibt die Fähigkeit, seine Mitmenschen differenziert wahrnehmen zu können.

Eine mathematische Begabung wird in diesem Modell von Gardner mit der logisch-mathematischen Intelligenz beschrieben.

Käpnick (1998, S. 72) erläutert verschiedene Fähigkeiten, die mathematisch begabte Menschen aufweisen müssen. Zuerst sollen sie flexibel mit Regeln der Logik umgehen und in weiterer Folge mathematische Sachverhalte aufnehmen und speichern können. Weiters sollen sie fähig sein, Muster zu erkennen und Probleme zu lösen.

Mathematische Begabung als ein Zusammenspiel mit hoher allgemeiner Intelligenz

Das zweite Modell besagt, wie bereits erwähnt, dass herausragende mathematische Fähigkeiten nur in der Kombination mit einer allgemein hohen Intelligenz auftreten können. Birx, Wagner, und Wiczerkowski (1938, S. 217ff) vertreten die Auffassung des zweiten Modells. Überdurchschnittliche Intelligenz sei zwar keine hinreichende, aber dennoch eine notwendige Bedingung für herausragende mathematische Leistungen. Auch Renzulli (1993, S. 217f) ist ein Vertreter dieses Modells. Er hat das *Drei-Ringe-Modell* entwickelt, bei dem drei Merkmale für eine Begabung im Zusammenspiel stehen. Überdurchschnittliche Fähigkeiten, Kreativität und die Aufgabenverpflichtung seien demnach notwendig, um hohe mathematische Leistungen erbringen zu können. Überdurchschnittliche Fähigkeiten beschreiben unter anderem ein ausgeprägtes, räumliches Vorstellungsvermögen und räumliches Denken. Der Begriff *Kreativität* wird meist in Zusammenhang mit einer geistigen Begabung gebracht. Sie stellt eine Form des Lösungsverhaltens dar. Unter der Aufgabenverpflichtung versteht der Autor die Fähigkeit von Menschen, sich mit einer spezifischen Aufgabe für einen längeren Zeitraum auseinandersetzen zu können. Nachfolgend wird dieses Modell dargestellt.

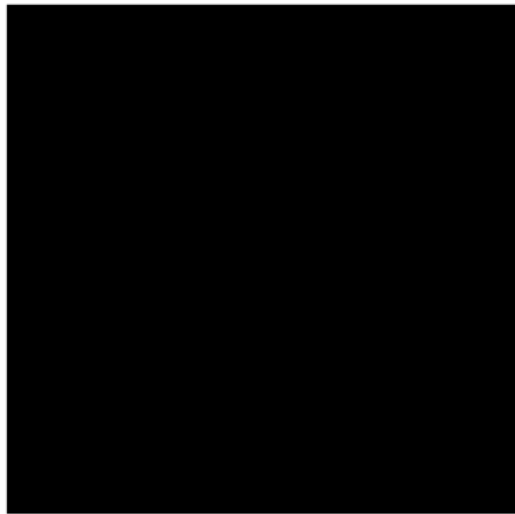


Abbildung 1: Drei-Ringe-Modell nach Renzulli (1993)

Mathematische Begabung als Bestandteil hoher allgemeiner Intelligenz

Beim dritten Modell kann eine Begabung nur allgemein auftreten, nicht aber in einem bestimmten Bereich. Dieses Modell besagt, dass keine mathematische Begabung im Spezifischen beobachtet werden kann. 1904 beschrieb Spearman (zit. nach Fast, 2005, S. 31) einen allgemeinen Intelligenzfaktor, den er *general factor* nannte und welcher als Grundlage für die Bestimmung von Intelligenzleistungen dienen sollte. Seiner Ansicht nach gäbe es daher nur einen gemeinsamen Faktor der Intelligenz und keinen spezifischen für den Bereich der Mathematik. Die Grundfaktoren werden für das Lösen von Denkaufgaben vorausgesetzt und lediglich auf Erbanlagen zurückgeführt. Käpnick (1998, S. 66) beschreibt als solche Grundfaktoren das schnelle Erfassen von Sachverhalten, dem Klassifizieren, Abstrahieren, Strukturieren und logischen Schlussfolgern fähig zu sein, über ein Sprachverständnis zu verfügen, eine Gedächtnisfähigkeit, ein ausgeprägtes, räumliches Vorstellungsvermögen oder formale Rechenfähigkeiten zu haben. Genauso sieht Pollmer (1992, S. 275) mathematische Begabung als eine allgemeine, intellektuelle Hochleistung. Die Leistungen, die in anderen Bereichen als der Mathematik erbracht werden, sind nur eine Auswirkung der allgemeinen Begabung, die der Mensch aufweist. Vertreterinnen und Vertreter dieser Auffassung sind der Meinung, dass Begabungen angeboren seien und intellektuelle Fähigkeiten mit einem Intelligenztest bereits sehr früh festgestellt werden können. Diese Fähigkeiten durchleben kaum eine Entwicklung und kommen meist erst im späteren Alter bei höheren Leistungen zum Vorschein (vgl. Mönks & Ypenburg, 2005, S. 15).

So lässt sich zusammenfassend sagen, dass das zweite Modell womöglich das am beste fundierte ist. Wird eine mathematische Intelligenz erkannt, so ist diese höchstwahrscheinlich die Auswirkung einer allgemeinen Intelligenz. Grundsätzlich nur von einer Begabung im mathematischen Bereich auszugehen, ist fragwürdig, da Vertreterinnen und Vertreter diese Ansicht bis dato mit keinen Forschungsergebnissen belegt haben (vgl. Fast, 2005, S. 31f).

Kognitionspsychologische Theorieansätze

Im Bereich der Kognitionspsychologie werden Prozesse, die Schülerinnen und Schüler beim Lösen von mathematischen Problemaufgaben durchlaufen, analysiert, um so den Unterschied zu begabten Kindern herstellen zu können. Kognitionspsychologinnen und Kognitionspsychologen verwenden grundsätzlich die Computer-Metapher. Dabei setzen sie das menschliche Denken mit Begriffen, wie zum Beispiel dem Speicher, dem zentralen Prozessor oder der Arbeitseinheit in Relation. Diese Vorgehensweise von Psychologinnen und Psychologen unterscheidet sich von Intelligenzforscherinnen und Intelligenzforschern in der Herangehensweise und im Forschungsschwerpunkt. Im Bereich der Kognitionspsychologie wurden gezielte, prozessorientierte Merkmalskonstrukte für begabte Schülerinnen und Schüler erarbeitet sowie die Bedeutung geistiger Stützfunktionen für die Qualität von Leistungen und „die Bestimmung individueller Denk-, Lern- und Problembearbeitungsstrategien“ (Käpnick, 1998, S. 76) dargestellt (vgl. Käpnick, 1998, S. 76).

Basierend auf den Prozessanalysen von Grundschulkindern haben Kognitionspsychologinnen und Kognitionspsychologen eigene Intelligenz- beziehungsweise Begabungsmodelle entwickelt. Darin haben sie Merkmale herausgearbeitet, die normal begabte Kinder von höher begabten Kindern unterscheidet. Das bekannteste Modell dazu hat Sternberg (1990, S. 96ff) entwickelt. In diesem Modell werden sechs Aspekte beschrieben, in denen sich begabte Schülerinnen und Schüler von anderen, gleichaltrigen Kindern beim Lösen von komplexen mathematischen Problemen unterscheiden. Diese lauten wie folgt:

- Begabte Kinder können die Entscheidung darüber treffen, welche Probleme gelöst werden müssen und finden heraus, um welches Problem es sich eigentlich handelt.
- Sie sind in der Lage, weitere Lösungsschritte zu planen.
- Sie können von mehreren möglichen Schritten für sie geeignete und sinnvolle Handlungsschritte auswählen.
- In weiterer Folge müssen sich begabte Kinder für eine der drei Repräsentationsebenen – sprachliche, symbolische oder bildhafte Darstellung – entscheiden können.
- Sie können ihre Aufmerksamkeit vollkommen dem mathematischen Problem zuwenden.

- Letztlich werden die verschiedenen Lösungsansätze überprüft.

In diesem Modell hebt Sternberg deutlich hervor, welche Kompetenzen begabte Kinder für die Planung und Steuerung eines Problemlöseprozesses benötigen. Auch Käpnick (1998, S. 77) vertritt die Ansichten des Modells nach Sternberg.

Die Erkenntnisse, die im Bereich der Kognitionspsychologie erlangt wurden, sind für eine mathematische Begabung von besonders großer Bedeutung, da das Problemlösen einen wichtigen Aspekt des mathematischen Tätigseins beschreibt. Neben Sternberg beschäftigte sich auch Van der Meer (1985) mit Komponenten, die eine mathematische Begabung auszeichnen. Sie nennt dabei folgende:

- Unter der Voraussetzung, dass Kinder bereits über ein Vorwissen in Bezug auf die Mathematik verfügen, nehmen begabte Schülerinnen und Schüler Informationen wesentlich besser auf, als weniger begabte, denen das Wissen erst gelehrt werden muss.
- Des Weiteren können begabte Kinder Problemlöseaufgaben durch ihr Denken vereinfachen und finden eine überschaubarere Lösung für das Problem.
- Begabte Lernende, die Problemlöseaufgaben bearbeiten sollen, wenden eine Strategie an, die sie beim Erkennen von Analogien unterstützt.
- Genauso können sie elementare Operationen in der Mathematik einfacher miteinander verknüpfen. Durch die hohen erbrachten Denkleistungen kommen begabte Kinder schneller und einfacher zu einer Lösung.

Soziologische Aspekte mathematischer Begabungen

Soziologinnen und Soziologen beschäftigten sich bisher damit, die soziale Reife und außergewöhnliche Fähigkeiten begabter Kinder zu beobachten und zu analysieren. Diese gehen davon aus, dass begabte, junge Menschen eine allgemeine Begabung aufzeigen, im mathematischen Bereich aber eine besondere Ausprägung haben. Roedell, Jackson und Robinson (2000, S. 15) stufen jene Kinder nach ihrer sozialen Reife wie folgt ein: Ihre Gliederung reicht von begabten bis hin zu extrem begabten Schülerinnen und Schülern. Dabei zeigen begabte Kinder ein hohes Potential im kommunikativen Austausch mit ihren Mitschülerinnen und Mitschülern. Sie sind in der Lage, ihren eigenen sozialen Status innerhalb der Klassengemeinschaft einzuschätzen und die Bedürfnisse ihrer Klassenkolleginnen und Klassenkollegen zu erkennen und darauf einzugehen. Die Einfühlsamkeit und das Verständnis gegenüber dem Verhalten anderer Kinder lässt sich darauf zurückführen, dass sie oft dieselben oder ähnliche Freizeitaktivitäten wie Kinder, die in der Schule eher durchschnittliche Leistungen erbringen, haben. Im Gegenteil zu begabten Grundschulkindern können sich extrem begabte Lernende bei geistigen Aktivitäten

besser konzentrieren und motorische Aktivitäten besser kontrollieren. Zumeist sind begabte Kinder im Unterschied zu extrem begabten Kindern unter ihren Mitschülerinnen und Mitschülern beliebter und emotional stabiler.

Extrem begabte Kinder haben häufig Probleme, Freundschaften mit Klassenkolleginnen und Klassenkollegen zu schließen und sich in das Klassengeschehen einzubringen. Sie neigen bereits sehr früh dazu, geistig besonders aktiv zu sein. Unter geistige Aktivitäten fallen zum Beispiel das Lesen eines Buches oder das Lösen von Knobelaufgaben (vgl. Rost & Hanses, 1994, S. 379ff). Weiters weisen extrem begabte Grundschul Kinder eine Ungleichheit zwischen ihren geistigen Fähigkeiten und der physischen Entwicklung auf. So zeigen extrem begabte Erstklässlerinnen und Erstklässler oft eine besondere Kompetenz im Bereich der Arithmetik und des strukturellen Denkens, sie haben jedoch noch große Probleme in der Motorik. Beispielsweise sind sie noch nicht in der Lage, ordentlich zu essen oder die Schuhe zuzuschnüren. Zusätzlich zu der physischen Einschränkung neigen extrem begabte Kinder dazu, ihre eigenen körperlichen Fähigkeiten falsch einzuschätzen. Da sie ihr tatsächliches Können häufig überschätzen und in Folge dessen ihren eigenen Anforderungen nicht gerecht werden können, sind sie oftmals einer Frustration ausgesetzt (vgl. Roedell, Jackson, Robinson, 2000, S. 15). In weiterer Folge können, laut Käpnick (1998, S. 86), extrem begabte Schülerinnen und Schüler in ein Ungleichgewicht gelangen, wenn ihre geistige Reife die soziale Reife übertrifft. Diese Kinder sind beispielsweise nicht im Stande, ihre eigenen Bedürfnisse oder Gefühle ihren Mitschülerinnen und Mitschülern mitzuteilen.

Käpnick (1998, S. 86f) fasst abschließend zusammen, dass sich geistig begabte Grundschul Kinder im Bereich der sozialen Reife, des individuellen Tätigkeitsprofils und des Selbstkonzepts unterscheiden können. Normal begabte Schülerinnen und Schüler sind im Umgang mit ihren Mitschülerinnen und Mitschülern reifer und haben ein besseres Bild von sich selbst. Sie können ihre Leistungen und ihr Wissen besser einschätzen. Extrem begabte Kinder hingegen befinden sich oft in einem Ungleichgewicht zwischen ihrer sozialen Reife, ihren geistigen Fähigkeiten und ihrem physischen Fortschritt.

2.2.4 Bedeutung des Problemlösens für mathematisch begabte Kinder

Fuchs (2006, S. 93) beschreibt, dass Problemlösen zu den wichtigsten Merkmalen des mathematischen Tätigseins zählt. Auch Sternberg (1990) und Van der Meer (1985) sind dieser Meinung, was im vorigen Kapitel bereits beschrieben wurde. Unter einem Problemlöseprozess wird jener Prozess verstanden, der das selbstständige Arbeiten der Kinder an einem mathematischen Problem beschreibt. Den Kindern wird dabei kein direkter Weg zur Lösung angebo-

ten, denn sie sollen selbstständig durch einen längeren Lösungsfindungsprozess zu einem Ergebnis gelangen. Problemlösen ist nicht nur für das mathematische Tätigsein von großer Bedeutung, sondern auch „für die Entwicklung selbstständigen und kreativen Denkens, für komplexes Handeln, für die Herausbildung sozialer Komponenten u.a.m.“ (S. 93). Durch Problemlöseaufgaben können Kinder Eigenaktivität und Selbstständigkeit entwickeln. Gerade durch den selbstständigen Arbeitsprozess wird das problemlösende Denken der Schülerinnen und Schüler gefördert. Grundsätzlich sollte im Mathematikunterricht daher der Schwerpunkt am Prozess und nicht am Produkt liegen. Die Kinder sollen vor mathematische Probleme gestellt werden, die sie zu lösen versuchen sollen. Diese Probleme sollen nicht, wie bereits erwähnt, eindeutig und rasch lösbar sein, sondern einen Prozess der Lösungsfindung durchlaufen. Dabei sollen Lehrpersonen auf die verschiedenen Lösungswege der Kinder Bezug nehmen und gemeinsam innerhalb des Klassenverbandes darüber reflektieren.

Kleinkinder setzen sich in ihrem Leben ständig mit dem Lösen von Problemen auseinander. Sie gelten als besonders neugierig und kommen immer wieder an Grenzen, die sie unbedingt überwinden wollen.

Sie sind stets damit beschäftigt zu entdecken, wie die Dinge ihrer Umwelt funktionieren, wie sie eigene Vorhaben umsetzen können oder wie sie bei ihnen nahe stehenden Personen ihre Wünsche und Vorstellungen durchzusetzen vermögen. Das Tun von Kindern ist also im hohen Maße Problemlösen. (Fuchs, 2006, S. 95)

Kleinkinder gehen oft sehr offen, spontan und mit viel Fantasie an mathematische Probleme heran und entwickeln dadurch sehr unterschiedliche, individuelle Lösungswege. Diese Offenheit lässt darauf zurückführen, dass ihnen die Grenzen zwischen unterschiedlichen Bereichen noch nicht so bewusst sind, weshalb sie eher dazu bereit sind, diese zu überschreiten. Des Weiteren sind sie nicht darauf aus, nur eine mögliche Erklärung für ein Problem zu finden. Widersprüche oder Unwahrheiten, die sich im Zuge des Problemlöseprozesses ergeben, halten Kinder nicht davon ab, weiterzuarbeiten (vgl. Fuchs, 2006, S. 96).

Ob und wie Grundschülerinnen und Grundschüler eine Problemlöseaufgabe bewältigen können, hängt, laut Fuchs (2006, S. 96ff), von mehreren Aspekten ab. Einerseits ist ein gewisses Faktenwissen, andererseits sind aber auch grundlegende, fachliche Fähigkeiten, bezogen auf den jeweiligen Inhalt der Aufgabenstellung, notwendig. Genauso müssen Schülerinnen und Schüler über allgemeine Denkkompetenzen wie strategisches, flexibles oder vernetztes Denken und über eine gewisse Anstrengungsbereitschaft, Selbstständigkeit, Ausdauer oder Kreativität verfügen. Setzen sich begabte Kinder aktiv mit solchen Problemlöseaufgaben auseinander, werden gerade diese Kompetenzen gefördert und verbessert. Problemlösen zählt daher zu einer anspruchsvollen, aber sehr vielfältig wichtigen Tätigkeit. Bei Problemlöseaufgaben können vor allem mathematisch begabte Grundschülerinnen und Grundschüler motivierende

Entdeckungen machen und ihrer Kreativität und ihren unterschiedlichen Denkweisen freien Lauf lassen. Durch diese Aufgaben können potentiell begabte Dritt- und Viertklässlerinnen und -klässler eigene Lösungswege ausprobieren sowie eigene Regeln und Methoden des Problemlösens entwickeln. Genauso werden dadurch ihre sozialen Kompetenzen gefördert, da sie mathematische Probleme auch gemeinsam bearbeiten können. Den Kindern bleibt die Entscheidung selbst überlassen, wie sehr sie sich mit der Thematik einer Problemlöseaufgabe auseinandersetzen. Somit wird auch die Selbstständigkeit gefördert. Die genannten Aspekte betreffen die Auswirkungen von Problemlöseaufgaben im Bereich der Pädagogik.

Neben den pädagogischen Aspekten, die bereits genannt wurden, spielen, laut Fuchs (2006, S. 96ff), auch die psychologischen eine relevante Rolle im Leben potentiell begabter Kinder. Bei Problemlöseaufgaben können diese Kinder auf ihre subjektiven Erfahrungen zurückgreifen und das Problem mit ihrem Vorwissen bearbeiten. Sie können des Weiteren selbst auswählen, welche Strategien sie als Unterstützung anwenden, welche Hilfsmittel sie benötigen und wie sie ihre Lösungen darstellen. Gemeinsam mit Mitschülerinnen und Mitschülern können sie ihre Lösungswege weiterentwickeln, vergleichen, ausprobieren oder wieder verwerfen. Beim Problemlösen steht also im Vordergrund, erfolgreich zu lernen, aber auch soziale und mathematische Kompetenzen zu entwickeln.

Grundsätzlich lassen sich die bereits genannten Aspekte im Bereich der Pädagogik und der Lernpsychologie nach Fuchs (2006, S. 96ff) auf zwei Fähigkeiten zusammenfassen. Die *Fähigkeit des Problemlösens für die Entwicklung mathematischer Kompetenzen* fördert die Kinder im selbstständigen Analysieren und Strukturieren von mathematischen Sachverhalten. Begabte Schülerinnen und Schüler können zwischen unterschiedlichen, mathematischen Themen inhaltliche Beziehungen herstellen und diese auch nutzen. Außerdem werden sie durch solche Aufgaben zum selbstständigen Entwickeln von Lösungsansätzen unter der Verwendung von heuristischen Strategien angeregt. Sie entwickeln die Fähigkeit, zwischen den drei Repräsentationsebenen ikonisch, enaktiv und symbolisch zu wechseln. Sie lernen mithilfe von Problemlöseaufgaben, mathematische Beziehungen zu beschreiben, zu begründen und richtig darzustellen. Letztendlich werden sie fähig, ihre verschiedenen Lösungsansätze miteinander zu vergleichen und ein Grundverständnis von mathematischem Handeln zu entwickeln.

Die *Fähigkeit des Problemlösens für die Entwicklung allgemeiner Kompetenzen* beinhaltet die Förderung allgemeiner Kompetenzen des Denkens, wie zum Beispiel des flexiblen, vernetzten oder strategischen Denkens. Genauso wird dabei die Förderung allgemeiner Persönlichkeitsqualitäten angesprochen. Darunter fallen die Selbstständigkeit, Kreativität, soziale Kompetenzen und viele mehr.

Wegen der beiden genannten Fähigkeiten zählt das Problemlösen nicht grundlos ab der ersten Klasse Volksschule zu einer der wichtigsten Ziele im Mathematikunterricht. Problemlöseaufgaben sollten demnach nicht nur bei potentiell begabten Grundschülerinnen und Grundschülern, sondern auch bei allen anderen Kindern eingesetzt werden.

3 Diagnose einer mathematischen Begabung

Die Begrifflichkeiten in Bezug auf Begabung wurden in den vorigen Kapiteln einander gegenübergestellt. Nun liegt der Schwerpunkt darauf, eine mathematische Begabung zu diagnostizieren. Hohe mathematische Leistungen sind aufgaben- und situationsabhängig, weshalb begabte Schülerinnen und Schüler diese nicht immer zeigen. Um eine mathematische Begabung zu diagnostizieren, ist eine längerfristige Beobachtung bei Problemlöseaktivitäten der Schülerinnen und Schüler notwendig (vgl. Bauersfeld, 2006, S. 84f).

3.1 Relevanz der Diagnose einer mathematischen Begabung

Heller (2000, S. 243ff) nennt zwei wichtige Aufgaben der Diagnose einer mathematischen Begabung: die Einzelfalldiagnose, die als „Beratungsgrundlage der erzieherischen Prävention und erforderlichenfalls pädagogisch-psychologischen Intervention“ (S. 243) gilt und die Talentsuche, die „als Funktion der Begabungsförderung und als Forschungsbeitrag“ (S. 243) dienen sollte. Einzelfalldiagnosen werden benötigt, um individuelle Probleme im Verhalten, in der Leistung, im sozialen Bereich oder in der Erziehung aufzuklären und in weiterer Folge zu verbessern. So kann zum Beispiel eine fehlende Diagnose eines begabten Kindes dazu führen, dass das Kind aufgrund der ständigen Unterforderung im Unterricht und des falschen Verhaltens von Lehrpersonen gegenüber begabten Schülerinnen und Schülern die vorher genannten Probleme zeigt. Die Talentsuche für spezielle Förderprogramme ist notwendig, da jedes einzelne Kind eine optimale Begabungs- und Entwicklungsförderung benötigt. Des Weiteren stellen die Ansprüche der Gesellschaft einen wichtigen Aspekt dar, eine Begabung bei einer Lernenden oder einem Lernenden zu diagnostizieren, um sie so gezielt fördern zu können. Neben der Funktion als Begabungsförderung hat die Talentsuche auch noch die Aufgabe, einen Forschungsbeitrag zu leisten. Die Teilnahme an Forschungsveranstaltungen von begabten Schülerinnen und Schülern kann lediglich freiwillig erfolgen. Begabte Kinder, die sich freiwillig wissenschaftlich untersuchen lassen, tragen schließlich auch einen wesentlichen Teil zu neuen Erkenntnissen in der Begabungsforschung bei.

Bardy (2013, S. 94) sieht auch die Talentsuche und die Einzelfalldiagnose als die beiden wichtigsten Funktionen von Begabung. Ihm erscheint von großer Bedeutung, eine Begabung zu diagnostizieren, um die notwendigen Ressourcen für die Förderung dieser zu erhalten. Genauso werden Begabungen von der Gesellschaft gefördert, was wiederum für das Selbstbewusstsein des begabten Kindes wichtig ist. Durch die Förderung können sich Kinder, die besonders hohe Leistungen zeigen, selbst verwirklichen. Die hohe Relevanz der Diagnose einer Begabung und die weiterführenden Maßnahmen werden in der Praxis vor allem dann klar,

wenn eine begabte Schülerin oder ein begabter Schüler während des Unterrichts auffälliges Verhalten zeigt, weil sie oder er unterfordert ist.

Um eine Begabung und vor allem eine mathematische Begabung bei Lernenden im Grundschulalter feststellen zu können, werden unterschiedliche Diagnoseinstrumente benötigt, um so möglichst viele Informationen zu erhalten. Dabei ist für Lehrpersonen und Erziehungsbe-rechtigte wichtig, auch die Beratungslehrpersonen und Schulpsychologinnen und Schulpsy-chologen einer Schule miteinzubinden und als Unterstützung einzusetzen (vgl. Bardy, 2013, S. 95).

Um eine mathematische Begabung und die damit verbundenen Fähigkeiten, die mathema-tisch begabte Grundschülerinnen und Grundschüler besitzen, optimal zu fördern, ist in erster Linie wichtig, die Denkprozesse und Lösungsstrategien, welche jene Kinder bei mathemati-schen Problemen anwenden, zu verstehen. Lehrerinnen und Lehrer müssen sich intensiv mit den Lernprozessen dieser Kinder auseinandersetzen. Neben den Indikatoraufgaben, die in 3.4 beschrieben werden, machen Lehrerinnen- und Lehrer- oder Elternbefragungen, Beobachtun-gen während des Problemlöseprozesses, das Analysieren von persönlichen Eigenschaften und das Miteinbeziehen von Umweltvariablen, wie zum Beispiel das soziale Umfeld des Kindes, die Diagnose eines potentiell begabten Kindes komplett. Die mathematische Begabung einer Schülerin oder eines Schülers zu diagnostizieren, macht allerdings nur Sinn, wenn im Anschluss an die Diagnose eine Förderung stattfindet (vgl. Fast, 2005, S. 65).

3.2 Möglichkeiten und Probleme der Diagnose einer mathematischen Bega-bung

Ob Grundschülerinnen und Grundschüler überhaupt anhand spezifischer Merkmale als begabt bezeichnet beziehungsweise diagnostiziert werden können, beschreibt Käpnick (1998, S. 97) als schwierig. Stellen Forscherinnen und Forscher diesbezüglich allerdings doch Versuche an, so sei wichtig, die Lernprozesse von Kindern der dritten und vierten Schulstufe zu beobachten, um so einen Merkmalskatalog erstellen zu können. Im Sekundarstufenalter gäbe es mehrere, unterschiedliche Merkmalssysteme, die auf begabte Kinder zutreffen. Diese können jedoch nicht für Schülerinnen und Schüler der Primarstufe übernommen werden. Im Folgenden wer-den Argumente beschrieben, die gegen die Möglichkeit einer genauen Merkmalsbestimmung für Grundschülerinnen und Grundschüler sprechen.

Zuallererst beschreiben Käpnick (1998, S. 97) sowie Heller (1996, S. 12), dass die Diagnose einer mathematischen Begabung im Grundschulalter grundsätzlich problematisch sei, da dadurch die Gefahr bestehe, nur die Begabung im Bereich der Mathematik zu fördern, während andere potentielle Förderbereiche außer Acht gelassen werden. Des Weiteren bezeichnen die beiden Autoren die Diagnose und Förderung einer Begabung im zu frühen Alter als wenig sinnvoll, da begabte Lernende im Grundschulalter ohnedies ihren eigenen Weg gehen und in diesem jungen Alter noch nicht darauf angewiesen seien, ihre Begabung zu fördern.

Genauso sind Käpnick (1998, S. 98) und Sprengel (1988, S. 61ff) der Meinung, dass der Zeitraum, der benötigt wird, um sich als begabte Grundschülerin oder begabter Grundschüler zu entfalten, länger dauert und daher nicht beziehungsweise nur mit einer geringen Wahrscheinlichkeit im Grundschulalter bestimmt werden kann, ob ein Kind begabt ist. In diesem Zusammenhang fehle diesen Kindern häufig noch das Wissen, das sie brauchen, um im Bereich der Mathematik produktiv tätig zu sein. Sie können allgemein-geistige Tätigkeiten, wie zum Beispiel das Abstrahieren, das Verallgemeinern, das Strukturieren oder das logische Schlussfolgern, noch nicht so ausführen, wie dies begabte Kinder der Sekundarstufe bewältigen. Kossakowski (1987, S. 210) argumentiert hierzu, dass die analytisch-synthetische Tätigkeit der Schülerinnen und Schüler einer Primarstufe noch stark an anschauliche Darstellungen und tatsächliche Handlungen gebunden sei. Bezogen auf das logische Schlussfolgern ziehen begabte Kinder ihre Schlüsse durch Erkenntnisse, die sie handelnd gemacht haben. Erst mit fortlaufendem Alter können mathematische Erkenntnisse auch auf abstrakte Weise erfolgen.

Abgesehen von den mathematischen Tätigkeiten, die bei Grundschülerinnen und Grundschülern noch nicht so ausgeprägt sind, wie sie bei Kindern aus der Sekundarstufe sind, fehlen ihnen auch noch Persönlichkeitsmerkmale wie das Interesse und die Selbstständigkeit. Lernende der Primarstufe sind grundsätzlich zwar sehr wissbegierig und interessiert, diese Interessen können aber noch nicht eindeutig zugeordnet werden und sind daher ständig im Prozess der Veränderung (vgl. Kossakowski, 1987, S. 226).

Die oben angeführten Argumente, die gegen spezifische Merkmale einer begabten Schülerin oder eines begabten Schülers sprechen, können jedoch auch widerlegt werden. So ist nicht immer sicher, dass begabte Kinder in der Grundschule den für sie richtigen Weg einschlagen. Käpnick (1998, S. 99) beschreibt, dass jene Kinder im Unterricht häufig unterfordert sind und dadurch auch im Bereich des Sozialen Probleme aufweisen. So zeigen diese Grundschülerinnen und Grundschüler beispielsweise oft, dass ihnen im Regelunterricht langweilig ist. Beim Lösen von Problemaufgaben weisen sie hingegen großes Interesse auf und können sich voll und ganz den Aufgaben hingeben. Obwohl jene Kinder im Fachgebiet keine Probleme haben, stellt sich jedoch immer wieder heraus, dass sie Schwierigkeiten dabei haben, sich mit ihren

Mitschülerinnen und Mitschülern anzufrunden und sich in die Klassengemeinschaft zu integrieren. Diese Beschreibungen zeigen, dass eine frühzeitige Diagnose einer Begabung folglich eine einseitige Persönlichkeitsentwicklung hervorrufen kann.

Dass die Identifizierung einer mathematischen Begabung im Grundschulalter relativ schwierig ist, streitet auch Käpnick (1998, S. 102) nicht ab. In diesem Zeitraum kann eine mathematische Begabung nur mit einer geringen Wahrscheinlichkeit festgestellt werden. Trotzdem betrachtet der Autor eine Bestimmung der Begabung mithilfe spezifischer Merkmale nicht als unmöglich oder sinnlos. Denn in der Entwicklungspsychologie wird beschrieben, dass sich das Niveau von allgemeiner Intelligenz schon mit circa elf Jahren festigt. Daher verändert sich der Rangplatz, den begabte Kinder hinsichtlich ihrer Intelligenz einnehmen, nicht mehr stark (vgl. Oerter, 2008, S. 280). Diese Erkenntnis lässt sich vor allem durch die Erbanlagen und den Einfluss der Schule in den ersten Schuljahren erklären.

Dass Grundschülerinnen und Grundschüler grundsätzlich kaum über ein fachspezifisches Wissen verfügen und daher auch nicht mathematisch begabt sein können, streitet Van der Meer (1986, S. 77f) ab. Denn jene Leistungen, die sie bei Aufgaben zeigen, bei denen das selbstständige Entdecken oder das Erkennen und Nutzen von mathematischen Zusammenhängen im Vordergrund steht, widersprechen dem Argument. Die Autorin ist der Meinung, dass vor allem eine mathematische Begabung besonders früh diagnostiziert werden kann. Sie beschreibt, dass viele bedeutende Mathematiker jünger als 30 Jahre alt waren, als sie zu ihren wichtigsten Erkenntnissen gelangt sind. Des Weiteren geht sie davon aus, dass Kinder bereits im Grundschulalter hohe Leistungen erbringen können. Diese zeigen sie vor allem bei Aufgaben, bei denen sie auf ihr erworbenes Wissen zurückgreifen und operative Prozesse durchlaufen müssen. In der Mathematik ist damit gemeint, dass sie Strukturen und Beziehungen von einer Situation auf eine andere übertragen können.

Obwohl Kritikerinnen und Kritiker davon ausgehen, dass sich das große Interesse von Grundschülerinnen und Grundschülern für die Mathematik im Laufe der Zeit schlagartig ändern kann, spricht auch hierfür wieder Einiges dagegen. Käpnick (1998, S. 105) konnte in einem Projekt, das sich mit der Förderung von begabten Kindern beschäftigte, zeigen, dass ungefähr 90% der teilnehmenden Schülerinnen und Schüler regelmäßig an Förderstunden teilnahmen und ihr Interesse gegenüber der Mathematik aufrechterhalten blieb. Diese Kinder beschäftigten sich mit Problemlöseaufgaben, die innerhalb der Förderstunden bearbeitet wurden, teilweise noch in ihrer Freizeit. Um nun spezifische Merkmale für eine mathematische Begabung festzulegen, ist wichtig, die geistigen Aktivitäten und die Persönlichkeit dieser Kinder zu berücksichtigen.

Zusammenfassend schreibt Käpnick (1998, S. 105), dass es schwierig sei, Merkmale für begabte Kinder herauszuarbeiten, da das Erkennen einer mathematischen Begabung von Grundschülerinnen und Grundschülern einen längeren Zeitraum für die völlige Entfaltung durchlaufen muss, die Kinder häufig noch nicht über die mathematischen Fähigkeiten des Abstrahierens oder Verallgemeinerns verfügen und sich ihre Interessen meist erst im Grundschulalter entwickeln und spezifischer werden. Trotzdem hält der Autor eine Erforschung von persönlichen Merkmalen begabter Kinder für sinnvoll, da dadurch auf wissenschaftlicher Basis ein Verständnis gegenüber der Komplexität von Begabungen aufgebaut werden kann. Dies kann auch dazu führen, dass etwaige Entwicklungsprobleme begabter Schülerinnen und Schüler vermindert beziehungsweise im besten Fall sogar vermieden werden können.

Zusätzlich zu der Verminderung der Entwicklungsprobleme sieht Käpnick (1998, S. 106) in der Erforschung von mathematisch begabten Grundschülerinnen und Grundschülern den Vorteil, genaue Erkenntnisse zu deren mathematischen Leistungen zu erlangen. Außerdem gewährt die Erforschung einen Einblick in mathematische Lernprozesse von Kindern der Primarstufe. So können zum Beispiel verschiedene Interessen und Persönlichkeitseigenschaften beobachtet werden. Genauso können Forscherinnen und Forscher durch die Beobachtung spezifischer Merkmale begabter Schülerinnen und Schüler Ideen für die Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten entwickeln. Dadurch können Aufgabenbeispiele entstehen, die auch innerhalb des Mathematikunterrichts eingesetzt werden.

Wie bereits erwähnt, ist die Merkmalsbestimmung nur auf Schülerinnen und Schüler der dritten und vierten Klasse der Primarstufe beschränkt, da Kinder im Grundschulalter eine große Entwicklung in Bezug auf ihre Interessen und ihre Lebensweise durchlaufen müssen. Daher können Entwicklungsniveaus von Kindern aus der ersten und zweiten Klasse nicht mit denen der Dritt- und Viertklässlerinnen und -klässler gleichgesetzt werden. Vor allem die Lerntätigkeit ist bei diesen zwei Altersstufen sehr unterschiedlich. Beim Einstieg in die Grundschule ist die Tätigkeit der Kinder stark auf praktische, gegenständliche Handlungen beschränkt. Kinder dieser Altersstufe benötigen für das mathematische Verständnis bildliche Vorstellungen. Schülerinnen und Schüler der dritten und vierten Schulstufe hingegen arbeiten mithilfe von theoretischen Begriffen schon stärker auf der sprachlichen Ebene (vgl. Käpnick, 1998, S. 106f). Genauso sind die geistigen Tätigkeiten der Grundschülerinnen und Grundschüler einer starken Entwicklung unterlegen. Kinder werden im Laufe der Grundschule vor allem ab der dritten beziehungsweise vierten Klasse dabei unterstützt, Rechenoperationen von geistigen Tätigkeiten mithilfe der Schriftsprache und mathematischer Symbole auszuführen (vgl. Kossakowski, 1987, S. 220). Aufgrund dessen sind Grundschülerinnen und Grundschüler der dritten und

vierten Klasse in der Lage, sich theoretische Begriffe und relevante Begriffssysteme anzueignen. So lernen sie beispielsweise Begriffe wie *Multiplikator*, *Multiplikand*, *Produkt*, *Divisor*, *Dividend* oder *Quotient* (vgl. Käpnick, 1998, S. 107). Weiters beschreibt Kossakowski (1987, S. 226), dass die Interessensausprägung der Erstklässlerinnen und Erstklässler sehr vielfältig ist. Dies liegt unter anderem daran, dass ihre Wissbegierde und die Offenheit, die sie gegenüber Neuem zeigen, besonders groß sind. In den ersten beiden Schuljahren wechseln die Kinder ihre Interessen noch recht häufig. Ab der dritten Schulstufe zeigen sie jedoch eine bestimmte Tendenz zu spezifischen Bereichen, wie beispielsweise zur Umwelt oder Mathematik. Dadurch kann eine intensivere Auseinandersetzung mit diesen Bereichen stattfinden.

3.3 Merkmale von mathematisch begabten Grundschulkindern

Viele Eltern, aber auch Lehrerinnen und Lehrer stellen sich häufig die Frage, woran ein mathematisch begabtes Kind erkannt wird. Käpnick (1998) hält dabei folgende grundlegende Persönlichkeitseigenschaften, die potentiell begabte Grundschülerinnen und Grundschüler aus einer dritten oder vierten Klasse aufweisen können, fest: „eine hohe geistige Aktivität, intellektuelle Neugier, Anstrengungsbereitschaft und Leistungsmotivation, Freude am Problemlösen, Konzentrationsfähigkeit, Beharrlichkeit, Selbstständigkeit und Kooperationsfähigkeit.“ (S. 118) Auch diese persönlichen Eigenschaften können, wie die mathematikspezifischen Fähigkeiten, die bereits in 2.2.2 erläutert wurden, von Kind zu Kind unterschiedlich ausgeprägt sein. Genauso sind sie oft eng miteinander verbunden. So können zum Beispiel strukturell denkende Schülerinnen und Schüler bereits komplexe, mathematische Sachverhalte verstehen und im Gedächtnis speichern. Dies gelingt ihnen, weil sie bereits während der Informationsaufnahme Strukturen bilden. Dafür wird wiederum eine gewisse Konzentrationsfähigkeit benötigt. Andere Kinder hingegen haben zwar beim Bilden von Strukturen Schwierigkeiten, zeigen jedoch eine sehr große Beharrlichkeit (vgl. Käpnick, S. 118).

3.3.1 Merkmalskatalog für Erziehungsberechtigte

Im folgenden Text werden Merkmalskataloge für Erziehungsberechtigte genauso wie für Lehrpersonen vorgestellt, die sie bei der Identifikation von begabten Schülerinnen und Schülern unterstützen sollen. Diese sind wissenschaftlich allerdings nicht vollkommen belegt, sondern sollen lediglich als Anhaltspunkte dienen. Begabungsforscherinnen und Begabungsforscher kritisieren, dass diese Merkmalslisten häufig nur aus Verallgemeinerungen von Einzelfällen entstanden seien. Genauso sind die Merkmale oft so formuliert, dass sie durchaus auf jede Schülerin oder jeden Schüler und nicht nur auf begabte Kinder zutreffen könnten. Werden jene Aspekte bei der Identifizierung einer mathematischen Begabung berücksichtigt, können

die beiden folgenden Merkmalskataloge Eltern oder Lehrerinnen und Lehrer darauf aufmerksam machen, dass ein Kind begabt sein könnte (vgl. Bardy, 2007, S. 96).

Obwohl Käpnick (1998) vorschlägt, eine Begabung erst bei Kindern der dritten oder vierten Klasse Grundschule festzustellen, beziehen sich folgende Merkmale nach Mönks und Ypenburg (2005, S. 41ff) auf Kinder ab ungefähr zwei Jahren. So können Kinder als begabt bezeichnet werden, wenn sie beispielsweise schon früh intellektuelle Interessen haben. Sie sind anderen, gleichaltrigen Kindern in Bezug auf die Entwicklung voraus. Genauso können sie besonders wissbegierig sein. Dass Kinder alles hinterfragen und häufig Warum-Fragen stellen, zeigt sich normalerweise im Alter von drei Jahren. Bei begabten Kindern fällt dies jedoch schon viel früher auf und hält auch für einen längeren Zeitraum an. Weiters neigen begabte Kinder dazu, besonders leicht und schnell zu lernen. Sie haben viel Energie und werden kaum müde. Bei der Bewältigung von Aufgaben können sie sehr konzentriert arbeiten und sich auch mit mehreren Aufgaben gleichzeitig auseinandersetzen. Ihr Gedächtnis ist besonders leistungsfähig. Des Weiteren haben jene Schülerinnen und Schüler oft viele, unterschiedliche Interessen und einen außergewöhnlichen Sinn für Humor. Genauso wollen sie immer perfektionistisch handeln. Diese Haltung ist vermutlich auch so stark ausgeprägt, da begabte Kinder häufig erst recht spät zu sprechen beginnen, dann aber immer darauf bedacht sind, fehlerlose Sätze zu formulieren. Selbstständiges Handeln zählt weiters zu den Merkmalen begabter Kinder. Sie denken schon im jungen Alter über den Sinn des Lebens nach. So interessieren sie sich zum Beispiel für die Abstammung des Menschen oder für das Leben nach dem Tod. Bevor sie überhaupt in die Schule gehen, können sie oft schon schreiben und lesen. Auch den Zahlbegriff und eigene Rechenmethoden entwickeln sie häufig bereits im Kindergartenalter.

3.3.2 Merkmalskatalog für Lehrpersonen

An folglich beschriebenen Merkmalen können sich Lehrerinnen und Lehrer orientieren, wenn sie die Begabung eines Kindes feststellen wollen. Auch hier gilt, dass die Merkmale keinesfalls gezwungen zutreffen müssen. Jedes Kind ist individuell, weshalb sich die Ausprägung der Merkmale von Mensch zu Mensch unterscheiden kann. Ist ein Kind besonders an der Schule interessiert und verfügt es über ein breites Allgemeinwissen, so ist dies ein Merkmal einer möglichen Begabung. Weiters kann eine begabte Schülerin oder ein begabter Schüler Informationen leicht aufnehmen und sich diese auch leicht wieder ins Gedächtnis rufen. Sie oder er arbeitet und lernt sehr schnell und freut sich über intellektuelle Aktivitäten. Genauso können unabhängiges, selbstständiges Arbeiten und ein großes Selbstvertrauen auf eine Begabung hinweisen. In der allgemeinen Entwicklung hat das begabte Kind einen weiten Vorsprung gegenüber seinen Mitschülerinnen und Mitschülern. Die Interessen des Kindes können sehr

vielfältig sein, weshalb es häufig auch viele, verschiedene Hobbys hat. Es kann die Fähigkeit besitzen, abstrakt zu denken. Das Kind kann Probleme erkennen und analysierend beschreiben, sowie dazugehörige Lösungswege ermitteln. Ein begabtes Kind neigt dazu, unterschiedliche Wege einzuschlagen und sich neue Ideen zu überlegen. Beim Sprechen hat es einen großen Wortschatz, weshalb es sich gut und verständlich ausdrücken kann. Eine begabte Schülerin oder ein begabter Schüler liest oft gerne, gut und viel, wobei sie oder er sich bei der Literatur häufig für Erwachsenenbücher entscheidet. Die Konzentrationsfähigkeit bei begabten Kindern ist häufig überragend. Bei mathematischen Aufgaben zeigen sie außergewöhnliche Leistungen. Bei diesen verstehen sie das Problem relativ schnell und kommen somit auch rasch zu gültigen Verallgemeinerungen. Ihr Denk- und Arbeitsprozess erfolgt meist systematisch, weshalb sie auch oft Strukturen erkennen und herstellen. Ihre Denkprozesse können flexibel gestaltet sein. Grundsätzlich ist ihre Grundeinstellung häufig kritisch und perfektionistisch. Sollen begabte Kinder ihr Wissen weitergeben, gelingt ihnen das besonders verständlich (vgl. Bardy, 2007, S. 98).

3.4 Identifikationsfaktoren einer mathematischen Begabung durch Indikatoraufgaben

Die Schwierigkeit, die sich bei der Diagnose einer mathematischen Begabung ergibt, wurde bereits in 3.2 erläutert. In diesem Kapitel werden Maßnahmen präsentiert, die Lehrpersonen im Schulalltag helfen sollen, die außergewöhnlich mathematischen Leistungen von Schülerinnen und Schülern zu erkennen. Angelehnt an Fast (2005, S. 44ff) kann mathematische Begabung bei Grundschülerinnen und Grundschülern durch subjektive und objektive Verfahren festgestellt werden.

Wie bereits in Kapitel 2 Definition des Begabungsbegriffs erwähnt, äußert sich mathematische Begabung auf vielfältige Weise. „Mathematische Begabung zeigt sich als ein komplexes Zusammenspiel von allgemein sowie mathematisch-kognitiven Faktoren.“ (Fast, 2005, S. 44) Zudem spielen umwelt- und persönlichkeitsbezogene Faktoren eine wichtige Rolle. Um begabte Schülerinnen und Schüler zu erkennen, betrachtet Fast (2005, S. 44) die Kombination verschiedener Identifikationsverfahren als sinnvoll.

Viele Erziehungsberechtigte, aber auch Lehrpersonen vermuten, dass Kinder, die beim Rechnen besonders schnell fertig sind und die gestellten Aufgaben meist ohne Fehler lösen, besonders begabt sind. Allerdings ist dies so nicht immer richtig, da zu den mathematischen Fähigkeiten, die ein begabtes Kind aufweist, nicht nur das Rechnen alleine zählt. Im schulischen Kontext werden in weiterer Folge auch häufig besonders hohe Leistungen bei Schularbeiten

oder Lernzielkontrollen als Maßstab für eine mathematische Begabung gesehen. Diese Leistungen können Eltern beziehungsweise Lehrerinnen und Lehrer allerdings nur zum Teil auf die intellektuellen Fähigkeiten der begabten Schülerinnen und Schüler zurückführen. Denn vor allem bei Kindern, die als *Underachiever* bezeichnet werden, stellt sich die Diagnose für eine mathematische Begabung nur durch schulische Leistungen als schwierig dar. Jene Kinder erreichen häufig nur negative Beurteilungen, da sie positive Leistungen nur sehr selten bis gar nicht im Unterricht zeigen, obwohl sie grundsätzlich eine hohe Leistungsfähigkeit im mathematischen Bereich hätten. Die beiden genannten Aspekte, hohe schulische Leistungen und schnelles Rechnen, zeigen zwar, dass Kinder eine Stärke im Bereich der Mathematik aufweisen, allerdings kann deshalb nicht automatisch von mathematischer Begabung gesprochen werden (vgl. Fast, 2005, S. 45). Da lediglich die Berücksichtigung der schulischen Leistungen für die Diagnose einer mathematischen Begabung unzureichend ist, schlägt Käpnick (1998, S. 279) ein dreistufiges Modell vor. Auch Fast (2005, S. 45) orientiert sich an dem dreistufigen Modell von Käpnick.

In der ersten Stufe ist von großer Bedeutung, dass potentiell begabte Grundschülerinnen und Grundschüler anhand spezifischer Begabungsmerkmale von Lehrpersonen erkannt werden. Die Meinung von Lehrerinnen und Lehrer wird dabei als subjektives Verfahren für die Diagnose einer mathematischen Begabung eingesetzt (vgl. Fast, 2005, S. 45). Auf welche Merkmale die Lehrenden sowie die Erziehungsberechtigten achten können, wurde bereits im Kapitel 3.3 genauer erläutert.

In der zweiten Stufe werden Indikatoraufgaben vorgestellt, mit deren Hilfe eine mathematische Begabung diagnostiziert und in weiterer Folge optimal gefördert werden kann. Der Einsatz der Indikatoraufgaben ist ein Beispiel für objektive Verfahren. Bei diesen Aufgaben werden verschiedene kognitive Bereiche, die für solch eine Begabung relevant sind, angesprochen. Die Indikatoraufgaben werden mithilfe von Fallbeispielen, die Fast (2005, S. 49ff) erläutert, beschrieben. Diese Beispiele werden aus einigen der 99 Arbeiten, welche 2003 in einer Wiener Volksschule in jeweils zwei dritten und vierten Klassen im Zuge eines Projekts entstanden sind, entnommen. Die Indikatoraufgaben sind an jene von Käpnick (1998, S. 144ff) angelehnt. Grundsätzlich rät der Autor, die Aufgaben nur von Kindern lösen zu lassen, die in der ersten Stufe von den Lehrerinnen und Lehrern als begabt identifiziert wurden. In diesem Fall bekamen die Klassenlehrpersonen der beiden dritten und vierten Klassen von manchen Kindern daher auch leere Blätter ohne Lösungen, da in der ersten Stufe nicht alle Kinder als begabt erkannt wurden. Die Erkenntnisse, die im Zuge dieses Projekts an der Wiener Volksschule gemacht wurden, werden anschließend mit denen von Käpnick (1998, S. 130ff) verglichen.

Auch er hat in Deutschland im Raum Brandenburg das Neubrandenburger Projekt in den Schuljahren 1994/95 und 1995/96 durchgeführt. Dabei wurde das mathematische Denken bei Dritt- und Viertklässlerinnen und -klässlern in Bezug auf Merkmale, die begabte Kinder aufweisen, überprüft. Dafür hat er 110 begabte Grundschülerinnen und Grundschülern der dritten und vierten Klasse ausgewählt. Um Vergleiche zu Schülerinnen und Schülern, die durchschnittliche mathematische Leistungen zeigen, herzustellen, führte er die Aufgaben auch mit 44 aus dieser Gruppe durch. Die abschließende Untersuchung zeigte, dass potentiell begabte Kinder deutlich höhere Leistungen bezüglich ihrer Fähigkeiten des flexiblen Denkens und des Gedächtnisses zeigten als Kinder, die durchschnittliche Leistungen im Mathematikunterricht aufwiesen. Nachfolgend werden sechs Indikatoraufgaben vorgestellt, die im Zuge des Projekts in Wien verwendet wurden.

In der *Indikatoraufgabe 1* wird die Fähigkeit zum Speichern visueller, mathematischer Sachverhalte im Arbeitsgedächtnis angesprochen. Diese Aufgabe gliedert sich in vier Teilaufgaben. Bei den ersten beiden Aufgaben 1a und 1b wird die Fähigkeit im Speichern anschaulich geometrischer Sachverhalte überprüft. Dabei werden den Schülerinnen und Schülern jeweils zehn Sekunden lang zwei verschiedene Zeichnungen gezeigt, die sie anschließend nach einer halben beziehungsweise einer Minute selbst malerisch wiedergeben müssen. Dabei sollen sie darauf achten, dass der Abstand und die Formen, die in den gezeigten Zeichnungen verwendet werden, eingehalten werden (vgl. Fast, 2005, S. 50). Käpnick (1998, S. 166) erkennt bei diesen Aufgaben, dass die begabten Kinder die Zeichnungen strukturieren und anschließend deuten. So stellen sie sich beispielsweise bei der Zeichnung in Abbildung 2 ein Haus mit einer Tür und drei Fenstern vor. Dadurch merken sich die Schülerinnen und Schüler die Anordnung und die Größenrelationen besser. In den folgenden Abbildungen befindet sich links immer die Ausgangsaufgabe und rechts daneben werden unterschiedliche Schülerleistungen dargestellt.

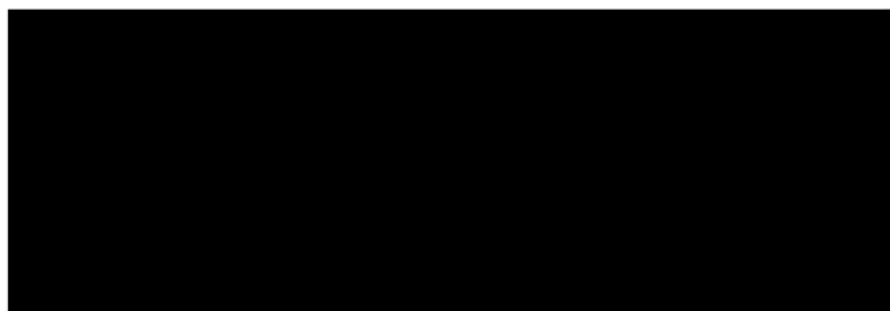


Abbildung 2: Zeichnung von Indikatoraufgabe 1 mit zwei Beispielen von Schülerinnen und Schülern (Fast, 2005, S. 50)

In der obigen Abbildung ist deutlich erkennbar, dass sich die Kinder beim Bewältigen der Aufgabe realistische Dinge vorgestellt haben, um sich die in der Zeichnung verwendeten Figuren und deren Anordnung besser zu merken. Das linke Beispiel eines Kindes zeigt ein völlig identes Bild zur Ausgangszeichnung. Beim anderen ist deutlich, dass das Kind sich die einzelnen Figuren zwar gemerkt hat, die Zeichnung aber eine Spiegelung der Ausgangsdarstellung ist. Das räumliche Vorstellungsvermögen ist bei diesem Kind noch nicht vollständig ausgeprägt. Bei jener Aufgabe im Zuge des Projekts der Wiener Volksschule erreichten 25% der Schülerinnen und Schüler die höchste Punkteanzahl.

Bei der Aufgabe 1c wird die Fähigkeit im Speichern von gesehenen Zahlen im Arbeitsgedächtnis überprüft. Die Zahlenmauer, die in Abbildung 3 dargestellt wird, soll nach 20 Sekunden aus dem Gedächtnis heraus aufgeschrieben werden (vgl. Fast, 2005, S. 50f).

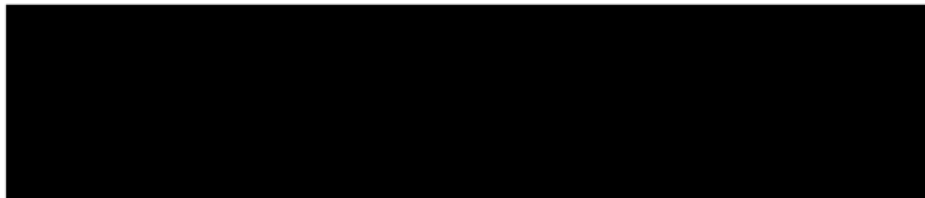


Abbildung 3: Zahlenmauer von Indikatoraufgabe 1c mit zwei Beispielen von Schülerinnen und Schülern (Fast, 2005, S. 51)

Käpnick (1998, S. 168) beschreibt in Bezug auf diese Aufgabe zwei unterschiedliche Strategien, welche Kinder anwenden, um sich die einzelnen Zahlen der Mauer einzuprägen. Einerseits lesen sie sich die einzelnen Zahlen von links beginnend immer wieder durch und prägen sie sich ein. Andererseits strukturieren manche Kinder die Zahlen nach Kriterien, wodurch sie sich die Struktur der Zahlen leichter merken. Beispielsweise merkten sie sich die drei links gelegenen Zahlen 2, 5 und 10, indem sie diese zu der Multiplikation $2 \cdot 5 = 10$ zusammenfassten, und aus den drei rechts gelegenen Zahlen 3, 11 und 8 bildeten sie die Struktur $3 + 8 = 11$. Der Autor führt an, dass leistungsstarke, potentiell begabte Kinder eher die zweite Strategie anwenden würden, so wie dies in der obigen Abbildung bei der linken Lösung eines Kindes zu sehen ist. So wie die Aufgabe in Abbildung 3 im rechten Beispiel einer Grundschülerin oder eines Grundschülers gelöst wurde, wurde eher die erste Strategie angewendet. Dabei sind die Zahlen zwar in der richtigen Zeile, nicht aber in der richtigen Reihenfolge. Bei dieser Aufgabe wird ersichtlich, dass erst das Erkennen von (Zahl-)Strukturen ein richtiges Wiedergeben der Zahlen ermöglicht.

Die letzte Aufgabe 1d, die im Zuge der *Indikatoraufgabe 1* durchgeführt wird, benötigt die Fähigkeit, gesehene Zahlen im Arbeitsgedächtnis zu speichern, indem bekannte, mathematische Strukturen zu Hilfe genommen werden. Die Kinder müssen sich dabei innerhalb einer

Minute ein Quadrat mit 16 Zahlen merken. Für das Eintragen der Zahlen in ein leeres Quadrat haben sie eine weitere Minute Zeit (vgl. Fast, 2005, S. 51f).

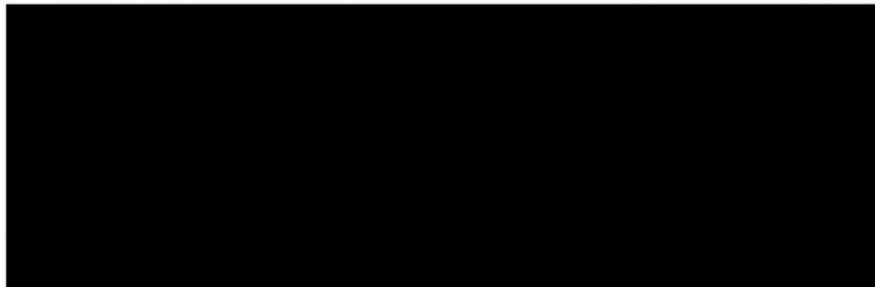


Abbildung 4: Quadrat von Indikatoraufgabe 1d mit zwei Beispielen von Schülerinnen und Schülern (Fast, 2005, S. 52)

Die Zahlen im oben dargestellten Quadrat sind durch drei Beziehungen gekennzeichnet. Das erste Muster entsteht aus den Eckzahlen, die nach der Reihe von eins bis vier eingetragen werden. Die fehlenden, senkrechten Zahlen am Rand ergeben sich aus den Ergänzungen auf zehn. Die restlichen Felder können ausgefüllt werden, indem von der äußeren Zahl immer auf 20 ergänzt wird und somit die inneren Felder mit diesen Zahlen gefüllt werden. Im rechten Beispiel eines Kindes, das in Abbildung 4 ersichtlich ist, wurden nur zwei der drei Muster erkannt. Dem Kind fehlt die Ergänzung auf 20. Die erste Zeile, die in diesem Beispiel richtig ausgefüllt wurde, konnte vermutlich nur aufgrund eines auswendigen Einprägens aufgeschrieben werden. Kinder, die diese Aufgabe fast völlig richtig lösen konnten, konnten dies nur aufgrund des Erkennens mathematischer Muster. Erkennen Kinder mathematische Muster, so beschreibt Fast (2005) sie als „mathematisches Talent“ (S. 52).

In der *Indikatoraufgabe 2* stehen die Fähigkeit im Strukturieren mathematischer Sachverhalte, im Transfer mathematischer Strukturen, im verbalen Verallgemeinern und die mathematische Fantasie im Vordergrund. Mithilfe eines Zauberdreiecks werden diese Fähigkeiten angesprochen. Die Schülerinnen und Schüler haben die Aufgabe, Besonderheiten in der Zahlenanordnung zu erkennen, diese durch Beispiele zu begründen und die erkannten Strukturen verbal zu verallgemeinern. Diese Erkenntnisse sollen anschließend mit anderen Zahlen in ein leeres Zauberdreieck eingetragen werden. Die verbale Verallgemeinerung stellt eine schwierige Aufgabe für Kinder dar (vgl. Fast, 2005, S. 52f). In dem Projekt von Käpnick (1998, S. 177) konnten lediglich 16% der Vergleichsschülerinnen und Vergleichsschüler und 46% der potentiell begabten Kinder beim verbalen Verallgemeinern Punkte erreichen. Im Gegensatz dazu konnten im Projekt der Wiener Volksschule 25% ihre Erkenntnis verbal deuten, wobei nur fünf Kinder der dritten Schulstufe und 21 Kinder der vierten Schulstufe ihr Denken in Worte fassen konnten. Der Grund für das quantitativ höhere Ergebnis in Bezug auf diese Aufgabe gegenüber Käpnicks

Untersuchung erklärt sich womöglich aus dem etwas höheren Alter der Schülerinnen und Schüler.

Bei dieser Indikatoraufgabe wurden vier verschiedene Strategien, die Kinder im Zuge des Bearbeitens verwendet haben, erkannt. Diese werden nun im Folgenden erläutert. Bei der zuerst angewendeten Strategie haben die Kinder immer zwei Eckzahlen des Dreiecks addiert, um die mittlere Zahl zu erhalten. Die folgende Abbildung veranschaulicht die verbale Erklärung eines Buben aus der dritten Klasse. Indirekt erkennt er auch die gerade beschriebene Struktur. Er beschreibt allerdings, dass die Eckzahl von der mittleren Zahl subtrahiert werden muss, um die andere Eckzahl zu erhalten.

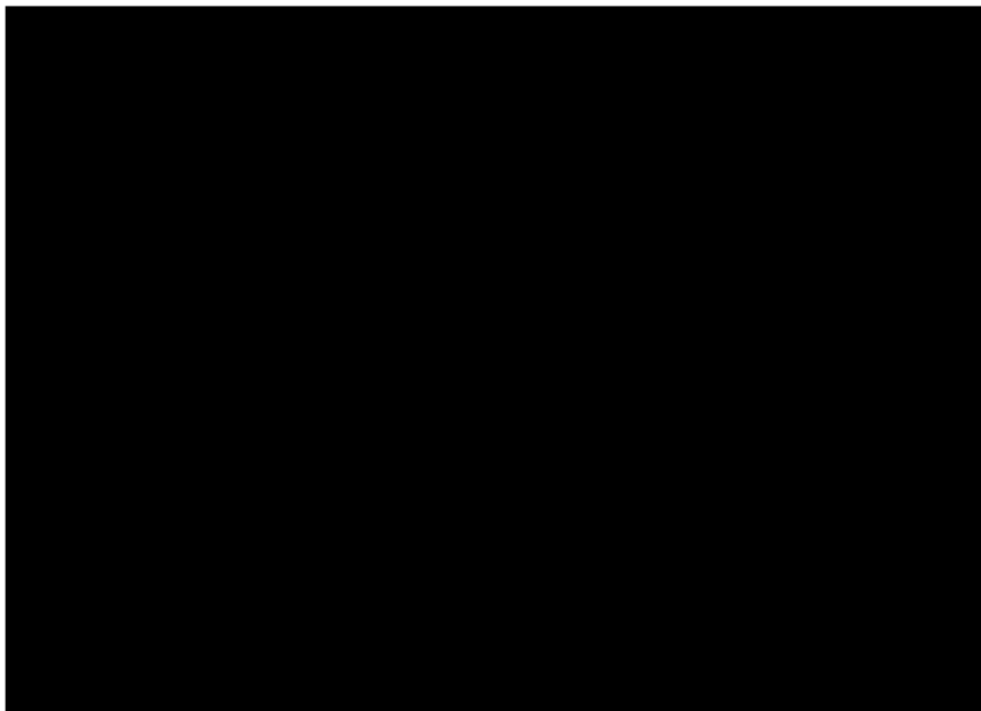


Abbildung 5: Erste Strategie der Indikatoraufgabe 2 eines Schülers der dritten Schulstufe (Fast, 2005, S. 53)

Die zweite Strategie benötigt ein etwas anderes Vorgehen. Allerdings spielt hierbei wieder die Summe zweier Zahlen eine Rolle. Wird zu einer Eckzahl des Dreiecks die gegenüberliegende, mittlere Zahl addiert, so ist die Summe immer dieselbe. Im vorgegebenen Zauberdreieck beträgt die Summe beispielsweise immer sieben. In Abbildung 6 ist diese Strategie klar erkennbar. Das Kind hat die erkannte Struktur auf das leere Dreieck übertragen, indem es als Summe zweier Zahlen immer fünf gewählt hat.

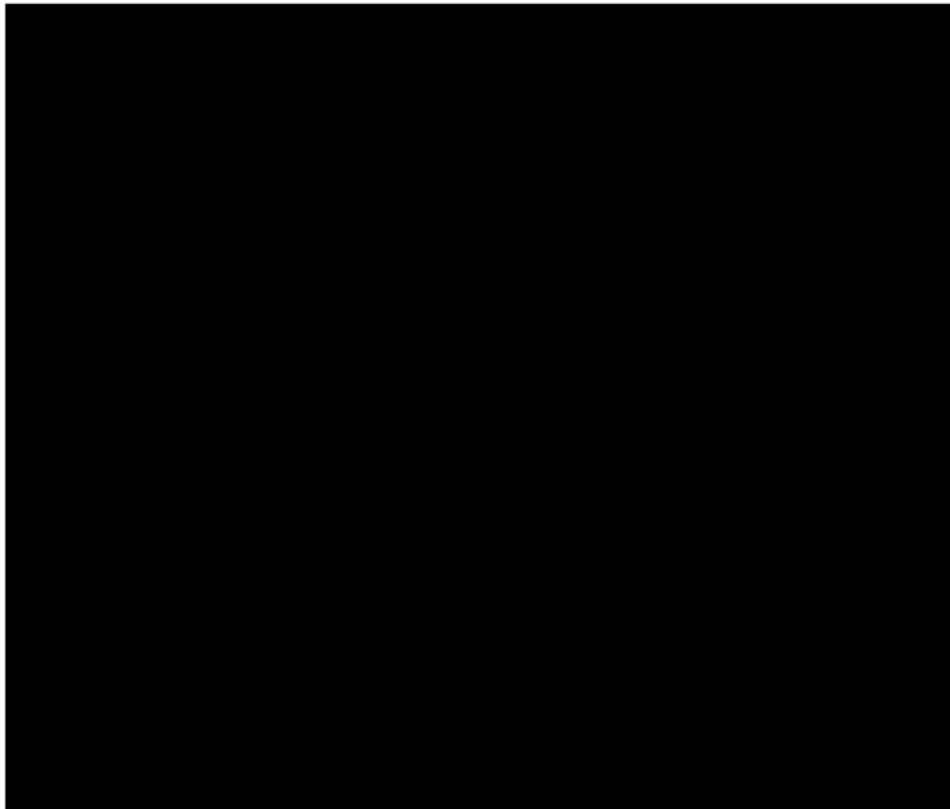


Abbildung 6: Zweite Strategie der Indikatoraufgabe 2 mit zwei Beispielen von Schülerinnen und Schülern der vierten Klasse (Fast, 2005, S. 54)

Dieses Muster erkennen mehrere Kinder, können es aber recht selten richtig in Worten erklären. Meistens schreiben sie Zahlbeziehungen, wie zum Beispiel $5 + 2 = 7$, auf. Ein Mädchen hat beispielsweise die erkannte Struktur auf ein leeres Dreieck übertragen, konnte sein Handeln jedoch nicht verbalisieren. Es schrieb lediglich die einzelnen Rechnungen dazu auf. Schriftlich etwas in Worten wiederzugeben, findet eher auf der Zahlenebene als auf der Metaebene statt. Dies ist auch in der obigen Abbildung erkennbar.

Wandten Kinder die dritte Strategie an, so haben sie erkannt, dass die drei unteren, waag-rechten Zahlen im Dreieck gerade und die restlichen, oberen drei Zahlen ungerade waren. Das Kind, dessen Lösung in Abbildung 7 gezeigt wird, hat diese Struktur erkannt und die Erkenntnis richtig verbalisiert.

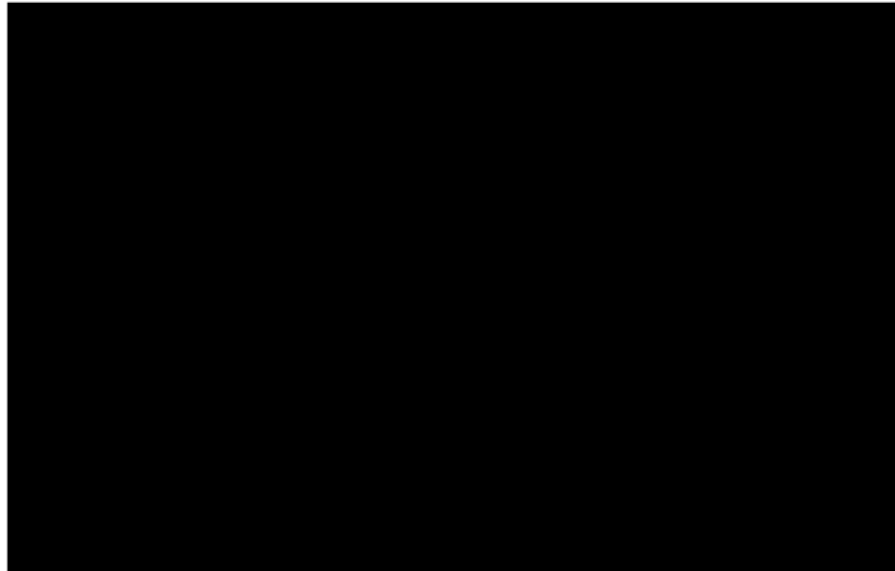


Abbildung 7: Dritte Strategie der Indikatoraufgabe 2 mit einem Beispiel eines Kindes
(Fast, 2005, S. 55)

Die vierte und letzte Strategie erklärt sich wie folgt: „Die Folge der drei Eckzahlen (gelesen in der kreisförmigen Anordnung entgegen dem Uhrzeigersinn) ist: 1, 2, 4. Jedes nachfolgende Glied ergibt sich durch Verdoppeln des vorherigen Gliedes.“ (Fast, 2005, S. 55)

Diese Strategie fand nur bei einem Buben der vierten Schulstufe seine Anwendung. Seine Verbalisierung wird in Abbildung 8 gezeigt.

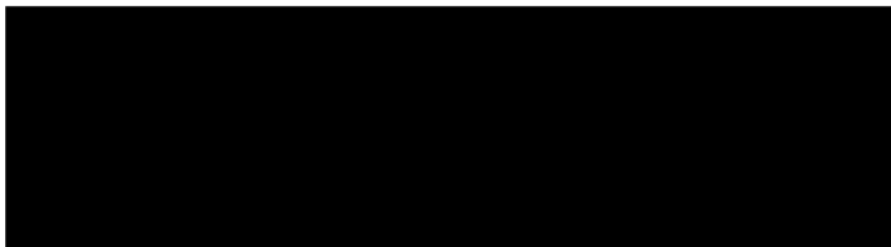


Abbildung 8: Vierte Strategie der Indikatoraufgabe 2 mit einem Beispiel eines Buben der vierten Klasse (Fast, 2005, S. 56)

In der Verschriftlichung seiner Erkenntnis ist ein unvollständiges Muster erkennbar, da dieses nur auf zwei Seiten des Dreiecks anwendbar ist. Trotzdem zeigt der Bub durch diese Vorgehensweise ein Verständnis gegenüber dem Erkennen von Zahlbeziehungen. Er konnte jedoch aufgrund der falschen Strategie keine Zahlen richtig in das Dreieck übertragen. Die *Indikatoraufgabe 2* benötigt vor allem die Fähigkeit des Verbalisierens und Transferierens.

Bei der *Indikatoraufgabe 3* wird die Fähigkeit im Strukturieren mathematischer Sachverhalte, im Transfer von Strukturen, im Umkehren von Gedankengängen und im Wechsel zwischen den Repräsentationsebenen benötigt. Dabei sind Kreise angeordnet, die eine individuelle Struktur auf der bildlichen Ebene aufweisen. Die erste Aufgabenstellung 3a, die in Abbildung 9 gezeigt wird, konnten fast alle Kinder, die am Projekt in der Wiener Volksschule teilnahmen,

richtig lösen (vgl. Fast, 2005, S. 56). Die Lösungen waren sehr vielfältig, weshalb Käpnick (1998, S. 190) daraus schließt, dass jene Kinder eine herausragende, mathematische Fantasie besitzen. Genauso hatten die Schülerinnen und Schülern keine Probleme damit, die bildliche Ebene auf die symbolische zu übertragen. Die Aufgabe 3a dient eher als Einstieg in die weiteren Aufgabenstellungen. Bei diesem Beispiel kann nicht auf ein mathematisches Talent geschlossen werden, da die Leistungen der Vergleichsschülerinnen und Vergleichsschüler und der potentiell begabten Kinder kaum Unterschiede aufwiesen.

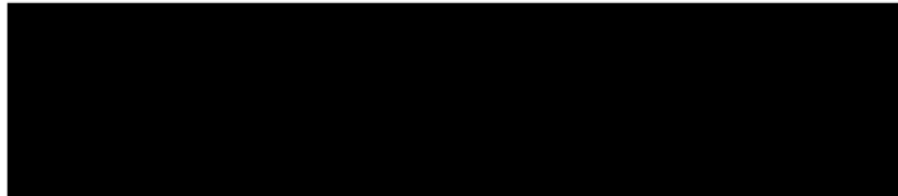


Abbildung 9: Indikatoraufgabe 3a mit einem Beispiel eines Kindes (Fast, 2005, S. 57)

Bei der zweiten Teilaufgabe 3b müssen die Dritt- und Viertklässlerinnen und -klässler vorgegebene Strukturen auf ähnliche Darstellungen übertragen. Die Ausgangsdarstellung bildet zehn Kreise ab. Die gleich angeordneten Darstellungen, wie in Abbildung 10 ersichtlich, visualisieren 15 Kreise (vgl. Fast, 2005, S. 56f). Bei der Untersuchung von Käpnick (1998, S. 190) schafften 47,7% der Vergleichsschülerinnen und Vergleichsschüler und 72,7% der potentiell Begabten, die erkannten Muster auf eine neue Ausgangslage zu übertragen. Nur 15% der Kinder der Wiener Volksschule konnten bei diesem Beispiel die Höchstpunkteanzahl erreichen, 10% der Schülerinnen und Schüler die nächst niedrigere Punkteanzahl. Dies bedeutet, dass die Kinder aus der österreichischen Grundschule in diesem Bereich schlechter abgeschlossen haben als jene aus Deutschland. Dafür konnte jedoch keine Begründung gefunden werden. In der nachfolgenden Abbildung ist dem Kind der Transfer von der Darstellung mit zehn Kreisen auf die mit 15 Kreisen gelungen.

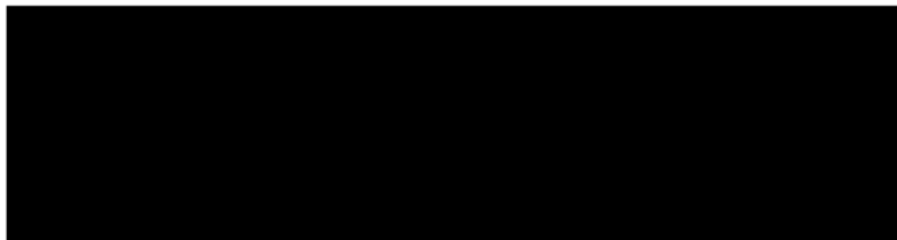


Abbildung 10: Indikatoraufgabe 3b mit einem Beispiel eines Kindes (Fast, 2005, S. 57)

Bei der Aufgabe 3c wird die Fähigkeit zur Reversibilität überprüft. Dabei soll zu einer vorgegebenen Gleichung ein passendes Muster gefunden werden. Die Kinder überraschten hier vor allem mit ihren vielfältigen Lösungsmöglichkeiten. Zwei dieser Lösungen werden in Abbildung 11 dargestellt.



Abbildung 11: Indikatoraufgabe 3c mit zwei Beispielen von Kindern (Fast, 2005, S. 57)

Käpnick (1998, S. 190) beschreibt, dass Kinder, welche die Fähigkeit im Transfer von erkannten Mustern, im Wechseln zwischen den Repräsentationsebenen und im Umkehren von Gedankengängen beim Lösen von mathematischen Sachverhalten besitzen, zu einer mathematischen Begabung neigen. Wie gut Schülerinnen und Schüler bei dieser Aufgabe sind, kann anhand der erreichten Punktzahl bestimmt werden. Je höher die Punktzahl ist, desto höher ist die mathematische Begabung in den genannten Fähigkeiten.

Die *Indikatoraufgabe 4* benötigt die Fähigkeit des Strukturierens mathematischer Sachverhalte, des Transfers von Strukturen und des Wechsels zwischen den Repräsentationsebenen. Sie spricht fast dieselben Fähigkeiten an wie die *Indikatoraufgabe 3*. Bei dieser Aufgabe wird den Kindern eine Anordnung von Dreiecken gezeigt, die sie nach einer bestimmten Regel vergrößern sollen. Die Aufgabe ist in Abbildung 12 dargestellt.



Abbildung 12: Indikatoraufgabe 4 (Fast, 2005, S. 58)

In der nachfolgenden Abbildung wird die Lösung eines neunjährigen Mädchens gezeigt, das die Aufgabe erhalten hat, die gesamte Anzahl der Kreise zu ermitteln, wenn die unterste Reihe 30 Kreise aufweist. Dabei ist ersichtlich, dass es das Muster des Anordnens zweier Zahlen zur Summe 30 erkennt. Beim Bearbeiten streicht es die Zahlen durch, die es schon verwendet hat und addiert am linken Rand nach und nach auf. Am Ende schreibt es das richtige Ergebnis, nämlich 465, auf.

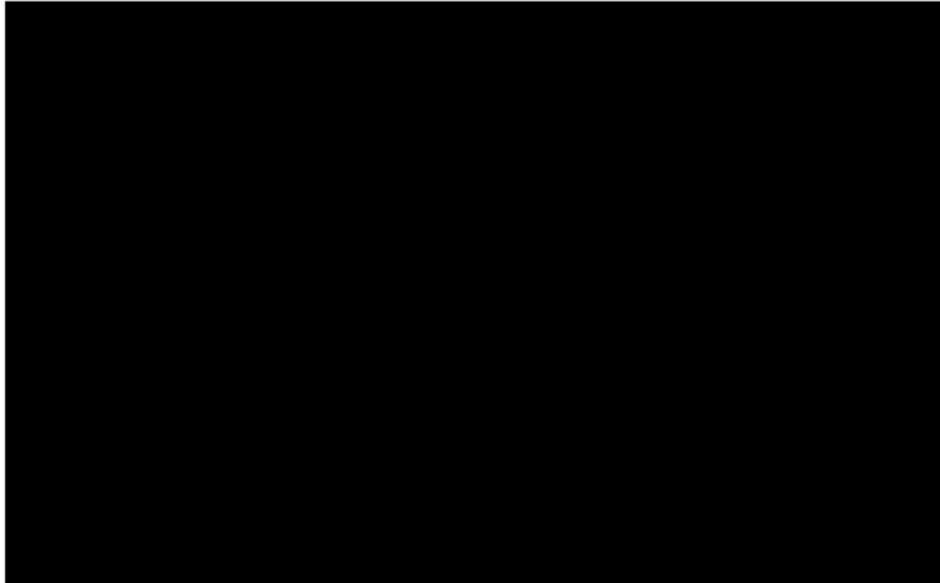


Abbildung 13: Indikatoraufgabe 4 mit einem Beispiel eines neunjährigen Mädchens (Fast, 2005, S. 58)

Käpnick (1998, S. 192) kam in seiner Untersuchung zu der Erkenntnis, dass 29,5% der Vergleichsschülerinnen und Vergleichsschüler einen logischen Lösungsansatz hatten, kein Kind jedoch die richtige Lösung angeben konnte. 80% der potentiell begabten Lernenden kamen auf einen sinnvollen Lösungsansatz, 11,8% lösten die Aufgabe sogar völlig richtig. In der Gruppe, die in Fast (2005, S. 59) untersucht wurde, kamen 22% der Kinder auf einen sinnvollen Lösungsansatz, 3% dieser Kinder konnten das richtige Ergebnis nennen.

Die *Indikatoraufgabe 5* bedarf erneut der Fähigkeit im Strukturieren mathematischer Sachverhalte, im Transfer von Strukturen, im Umkehren von Gedankengängen und im Wechseln zwischen den Repräsentationsebenen. Diese Aufgabe ist nicht als Visualisierung, sondern als Textaufgabe angegeben. Der Inhalt der Aufgabe ist nahezu derselbe, wie jener der *Indikatoraufgabe 3* und *4*. Die Schülerinnen und Schüler sollen zeigen, dass sie in der Lage sind, Entfernungen und Zeit in Beziehung zueinander zu setzen. Die Aufgabe gliedert sich in vier Textaufgaben, die aufeinander aufbauen.

Ein Bub der dritten Klasse zeigt bei dieser Indikatoraufgabe eine herausragende Leistung. Er war bei der Untersuchung in Fast (2005, S. 59f) der einzige, der diese Aufgabe richtig lösen konnte. In Abbildung 14 und Abbildung 15 werden zwei der vier Textaufgaben mit der Lösung des Buben präsentiert.

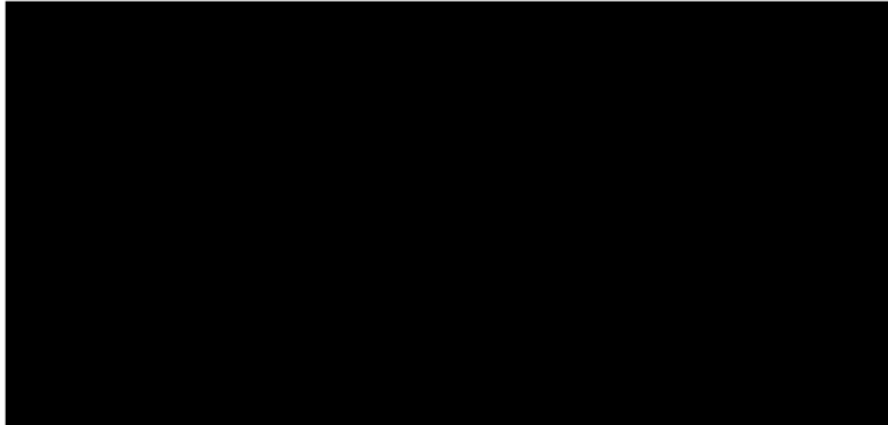


Abbildung 14: Indikatoraufgabe 5a mit einem Beispiel eines Schülers aus der dritten Klasse (Fast, 2005, S. 60)

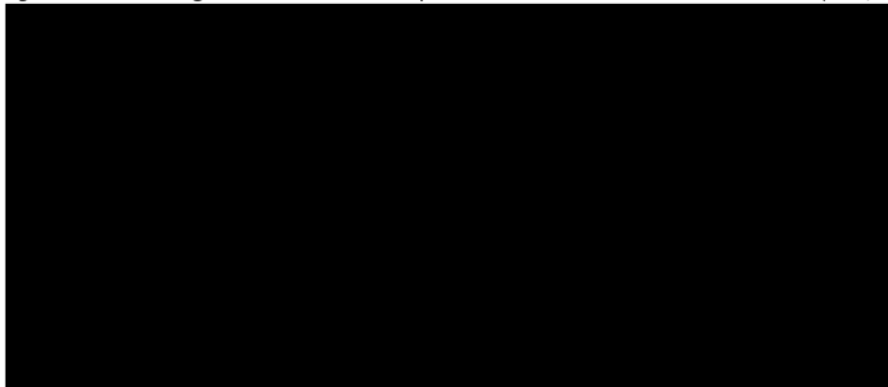


Abbildung 15: Indikatoraufgabe 5b mit einem Beispiel eines Schülers aus der dritten Klasse (Fast, 2005, S. 60)

Klar verständlich und kurz schreibt der Bub die richtigen Lösungswege an. Die Maßeinheiten lässt er außen vor. Wieso er in Abbildung 14 die Maßeinheit „m“ verwendet, ist unklar, trotzdem hat er die Aufgabe mit dem richtigen Wert gelöst. Die Leistung des Kindes ist bemerkenswert, vor allem weil Geschwindigkeitsaufgaben im Mathematikunterricht grundsätzlich erst in der vierten Schulstufe behandelt werden.

Die Textaufgabe, die in Abbildung 15 präsentiert wird, stellte für viele Kinder eine Herausforderung dar (vgl. Fast, 2005, S. 59f). In der Untersuchung von Käpnick (1998, S. 195) konnten nur 21,8% der begabten Schülerinnen und Schülern das richtige Ergebnis nennen. Der Autor stellte fest, dass die Kinder bei diesen Aufgaben besonders große Schwierigkeiten hatten, da sie die Gedankengänge umkehren und das Problem, das in der Abbildung 14 dargestellt ist, nun aus einer anderen Sichtweise betrachten müssen. Dies sei ein Indikator für eine mathematische Begabung. Auch in der Untersuchung von Fast (2005, S. 60) konnten nur 3% der am Projekt teilnehmenden Schülerinnen und Schüler die Textaufgabe richtig lösen. Auch sie meint, dass das richtige Lösen dieser Aufgabe ein Merkmal für eine mathematische Leistungsstärke sei.

In der *Indikatoraufgabe 6* ist das räumliche Vorstellungsvermögen gefragt. Dabei haben Kinder die Aufgabe, einen dreidimensional gezeichneten Würfel gedanklich nach hinten zu kippen. Die Ecken des Würfels sind dabei mit Zahlen von eins bis acht beschriftet. Anschließend wird ihnen die Frage gestellt, welche Fläche nach dem Kippen unten und welche Ecke vorn-oben-rechts zu sehen ist. Die zweite Aufgabe 6b, die im Zuge dieser Indikatoraufgabe gestellt wird und in Abbildung 16 dargestellt ist, zeigt einen Würfel aus drei verschiedenen Ansichten.



Abbildung 16: Indikatoraufgabe 6b (Fast, 2005, S. 61)

Auf jeder Fläche des Würfels ist ein Symbol abgebildet. In der nebenstehenden Tabelle sollen die Kinder zu den angegebenen Symbolen das genau gegenüberliegende zeichnen. Elf Schülerinnen und Schüler der Wiener Volksschule konnten diese Aufgabe richtig lösen. Drei der elf Kinder gingen davon in die dritte Klasse (vgl. Fast, 2005, S. 61). Käpnick (1998, S. 180f) stellte bei seiner Untersuchung fest, dass ein Drittel der potentiell begabten Schülerinnen und Schüler die Aufgaben, bei denen räumliches Vorstellungsvermögen gefragt war, vollkommen richtig lösten. 40% dieser Kinder erreichten nur drei oder weniger von sieben Punkten. Der Autor schließt daraus, dass mathematisch begabte Grundschülerinnen und Grundschüler im Bereich des räumlichen Vorstellungsvermögens deutliche Unterschiede aufweisen. So kann nicht eindeutig beantwortet werden, ob Kinder, die ein ausgeprägtes, räumliches Vorstellungsvermögen haben, folglich begabt sind. Somit kann das richtige Lösen der *Indikatoraufgabe 6* zwar ein Zeichen für eine mathematische Begabung sein, muss aber nicht (vgl. Käpnick, 1998, S. 130ff).

Die Ergebnisse der sechs beschriebenen Indikatoraufgaben zeigen die unterschiedlichen Ausprägungen der Begabungen von Kindern der Grundstufe II. Manche Leistungen können auf eine mathematische Begabung hinweisen, da die Kinder erhöhte Fähigkeiten in manchen Bereichen zeigten. Daher ist während des Unterrichts umso wichtiger, diese Fähigkeiten durch passende Aufgaben zu fördern.

Die dritte Stufe beschäftigt sich mit der prozessbegleitenden Identifikation. Eine mathematische Begabung eines Kindes zeigt sich nicht nur in dessen Leistungen, sondern auch im Prozess. Werden begabte Kinder beispielsweise von Lehrpersonen diagnostiziert, so werden ihr Arbeitsprozess beim Lösen von Aufgaben beobachtet, die Lösungswege analysiert und mit dem Kind besprochen. Begabte Grundschülerinnen und Grundschüler unterscheiden sich zu den anderen Kindern meist darin, dass sie sich mit mathematischen Aufgabenstellungen intensiver auseinandersetzen, um das Problem begrifflich und auch symbolisch zu erfassen. Diese Kinder erkennen wesentlich einfacher, aus welchen Aspekten sich ein mathematisches Problem zusammensetzt. Dies zeigt sich vor allem an ihrer fragenden Mimik. Deshalb ist für Klassenlehrerinnen und Klassenlehrer umso wichtiger, dass sie potentiell begabten Schülerinnen und Schülern eine Vielfalt von Indikatoraufgaben anbieten. Diese sollen auch verschiedene Schwierigkeitsgrade und mehrere Lösungsmöglichkeiten haben. Aufgaben, die im Unterricht eingesetzt werden können und begabte Kinder in ihren Fähigkeiten fördern, werden im Kapitel 5 genauer erläutert.

Begabte Lernende beginnen, häufig mit sich selbst oder mit Mitschülerinnen und Mitschülern über das mathematische Problem zu reflektieren, und nehmen dabei auch Blickkontakt zu ihrer Lehrerin oder ihrem Lehrer auf. Sie weisen die ganze Zeit über eine sehr hohe Konzentration auf und versuchen, verschiedene Lösungswege zu finden. Vor allem bei jüngeren Schülerinnen und Schülern kann die Lehrperson als Beobachterin oder Beobachter dienen, die ihre Lernprozesse erforscht und in weiterer Folge auch mit ihnen über ihre Vorgehensweise diskutiert. Dies ist nach Fast (2005, S. 63) einer der verlässlichsten Wege, eine mathematische Begabung festzustellen. Beim Bearbeiten der Indikatoraufgaben zeigen die Lernenden, wie sie ihr Wissen strukturieren, den anderen ihre Lösungsmöglichkeiten vorstellen, ihre Vermutungen begründen und andere von ihrer Vorgangsweise überzeugen. Um eine mathematische Begabung zu erkennen, spielen nicht nur richtige Lösungen, sondern auch das Sprechen über die erkannten Strukturen des Kindes eine wichtige Rolle.

3.5 Vorgehensweisen und Strategien mathematisch begabter Grundschulkin- der bei Problemlöseaufgaben

Die Relevanz, die Problemlöseaufgaben bei mathematisch begabten Kindern haben, wurde bereits in 2.2.4 erläutert. Wie mathematisch begabte Kinder bei diesen Aufgaben vorgehen, wird in Folge beschrieben.

Kognitionspsychologinnen und Kognitionspsychologen beschäftigen sich nicht nur mit dem Unterschied zwischen hohen Leistungen von begabten und durchschnittlichen Leistungen von anderen gleichaltrigen Kindern, sondern auch mit individuellen Denk-, Lern- und Problembearbeitungsstrategien (vgl. Fuchs, 2006, S. 99). Unter einer *Strategie* fasst Stern (1992, S. 102) kognitive Prozesse zusammen, die sich mit den Begriffen *Flexibilität*, *Zielorientiertheit* und *Effizienz* beschreiben lassen. In der Forschung wurde gezeigt, dass sich die Anwendung von Strategien bei begabten Kindern deutlich von anderen unterscheidet. Mandl und Friedrich (1992, S. 18f) zeigen ebenfalls, dass keine allgemeinen Strategien für Problemlöseaufgaben gelten. Genauso spielt das Vorwissen über mathematische Sachverhalte beim Bearbeiten solcher Aufgaben eine zentrale Rolle. Das notwendige Vorwissen und andere Fähigkeitsaspekte, wie zum Beispiel der Umgang mit Problemlöseaufgaben oder das selbstständige Denken, können als Begründung dafür dienen, dass neben den individuellen Fähigkeiten auch das Alter bezogen auf die Flexibilität und die Bevorzugung von bestimmten Strategien bei der Bearbeitung von Problemlöseaufgaben eine zentrale Rolle spielen (vgl. Fuchs, 2006, S. 99). Wessels (1990) steht dem Strategiebegriff etwas offener gegenüber als Stern (1992) sowie Mandl und Friedrich (1992). Er beschreibt, dass Kinder eine Vielfalt von unterschiedlichen Strategien einsetzen. Diese reichen von einfachen Verfahren des Probierens bis hin zu gut durchdachten Analogieverfahren. Welche Strategie Kinder anwenden, ist mitunter vom Aufgabentyp, von der Schwierigkeit der Aufgabe, vom Vorwissen und von den Persönlichkeitsmerkmalen des Kindes, das die Problemlöseaufgabe bearbeitet, abhängig. Diese Beschreibung bestätigt, dass mathematisch begabte Grundschülerinnen und Grundschüler unterschiedliche Vorgehensweisen bei Problemlöseaufgaben favorisieren. Genauso können sie speziellen Problemlösetypen zugeordnet werden. Diese Erkenntnis bestätigt die Untersuchungsergebnisse nach Käpnick (1998, S. 286ff), die bereits in 3.4 beschrieben wurden. Eine mathematische Begabung zeigt sich nicht bei jedem Kind gleich, sondern ist individuell ausgeprägt.

Käpnick (1998) konnte im Rahmen seiner Untersuchungen, die er mit Dritt- und Viertklässlerinnen und -klässlern durchführte, feststellen, dass Kinder Problemlöseaufgaben sehr individuell bearbeiten. Sie haben eigene Vorgehensweisen, die sie im Zuge ihrer Schullaufbahn in der dritten und vierten Klasse immer wieder anwendeten. Vereinzelt festigten die Schülerinnen und Schüler sogar ihre Vorgehensweisen. Diese Erkenntnisse zeigen wiederum, wie komplex das Thema *mathematische Begabung* ist. Daher ist wichtig, die beiden Begriffe *Strategie* und *Vorgehensweise* voneinander abzugrenzen. Käpnick (1998, S. 250) versteht unter einer Vorgehensweise, wie ein Kind ein vorgegebenes Problem erfasst, also wie es Informationen aufnimmt und in weiterer Folge das Problem analysiert. Im nächsten Schritt stellt sich die

Frage, wie das Kind versucht, das Problem zu lösen. Es entwickelt verschiedene Lösungsansätze und -strategien und zeigt einen speziellen Denk-, Arbeits- und Lernstil. Zuletzt wird im Zuge einer Vorgehensweise beschrieben, wie das Kind die Lösung der Aufgabe darstellt und kontrolliert.

3.5.1 Lernstile von Schülerinnen und Schülern

Fuchs (2006, S. 101) vertritt die Meinung, dass jedes Kind seinen eigenen Lernstil hat. Nur, wenn Lehrpersonen oder Erziehungsberechtigte wissen, wie das Kind am besten lernt, können Lernerfolge durch eine optimale Förderung gesteigert werden. Grogeroc (1997) ist ein Lernstilexperte und Vertreter dieser Meinung, auf den Fuchs (2006, S. 101) auch verweist.

Grogeroc (1997 zit. nach Fuchs, 2006, S. 101ff) beschreibt in seinem Lernstilkonzept vier verschiedene Charakter- und Lerntypen. Grundlage dieses Konzeptes bilden die Sinneskanäle, die bei der Aufnahme von Informationen benötigt werden, und die Art der Informationsverarbeitung. Er untergliedert die Informationsaufnahme in die konkrete und abstrakte Wahrnehmung, wobei die Aufnahme der Informationen bei der konkreten Wahrnehmung über die fünf Sinne erfolgt. Bei der abstrakten Wahrnehmung überwiegen die bildlichen Vorstellungen. Sie ermöglicht einen Blick hinter das Offensichtliche und setzt öfter die Intuition und den Intellekt ein. Die Informationsverarbeitung erfolgt nach Grogeroc (1997) entweder systematisch, das heißt Schritt für Schritt, oder assoziativ, also ohne einen bestimmten Plan. Bei der systematischen Vorgehensweise findet ein systematisches Ordnen der Informationen statt. Lernende folgen einer logischen Gedankenkette und handeln nach einem bestimmten Plan. Die assoziative Vorgehensweise beschreibt die Verarbeitung von Informationen als sehr impulsiv und spontan. Die Verarbeitung folgt dabei keiner speziellen Reihenfolge. Die Lernenden versuchen, das Ziel ohne Plan zu erreichen.

Die Verknüpfung der Informationsaufnahme und -verarbeitung führt nach Grogeroc (1997) zu vier unterschiedlichen Lernstiltypen:

Menschen mit dem konkret-systematischen Stil

Lernende, die nach diesem Stil lernen, handeln sehr praktisch, sind faktenorientiert und gewissenhaft. Lernprozesse erfolgen fast immer gleich und Lernende arbeiten sehr produktiv. Genauso können sie gut mit anderen, welche die Aufgaben besonders schnell bearbeiten, im Team arbeiten. Ihr Interesse liegt dabei im konkreten Faktenwissen. Die Fakten gliedern sie weiters in falsch oder richtig. Sie neigen dazu, Fragen wie „Wie soll ich das machen?“ zu stellen, und verlangen des Öfteren Erklärungen oder spezifischere Anweisungen, da sie alles richtig machen wollen. Ihr Perfektionismus führt dazu, dass sie manchmal unflexibel sind. Letztlich

arbeiten sie aber sehr strukturiert und ordentlich. Bei der Bearbeitung von Aufgaben haben diese Lernenden ein gutes Zeitmanagement.

Menschen mit dem abstrakt-systematischen Stil

Menschen mit dem abstrakt-systematischen Stil verhalten sich in ihrer Persönlichkeit meist analytisch und gründlich. Sie neigen dazu, vernetzt zu denken. Bevor sie Entscheidungen treffen, sammeln sie sehr viele Informationen. Die Lernenden lieben, sich mit schriftlichen Anweisungen, Modellen oder Theorien auseinanderzusetzen, und stellen meist als erste Frage „Wo finde ich darüber ausreichend Informationen?“. Ihre Arbeit erledigen sie sehr sorgfältig und bedacht, weshalb sie oft mehr Zeit als andere benötigen. Sie verhalten sich eher ruhig und introvertiert. Jene Menschen verbalisieren Probleme häufig erst, wenn sie den Hintergrund dieser tatsächlich verstanden haben. Beim Beschreiben der eigenen Gefühle haben sie oft Schwierigkeiten, da sie sich lieber an Fakten orientieren. Sie fühlen sich in ihrer Privatsphäre schnell verletzt. Häufig haben Menschen, die nach dem abstrakt-systematischen Stil lernen, das Talent, Probleme objektiv zu betrachten. Sie haben einen großen Wortschatz und verwenden auch häufig Fremdwörter.

Menschen mit dem abstrakt-assoziativen Stil

Lernende, die nach diesem Stil lernen, sind sozial, gefühlsbetont und kreativ veranlagt. Entscheidungen treffen sie oft erst, wenn sie davor mit Freundinnen und Freunden gesprochen haben. Sie versuchen, die Gefühle ihrer Mitmenschen wahrzunehmen, und können deren Körpersprache gut lesen. Dabei merken sie sofort, wenn sich Kinder in der Klasse nicht wohlfühlen oder Probleme haben. Daher gelten diese Menschen auch als gute Zuhörerinnen und Zuhörer und können andere Personen trösten. In einem unordentlichen Umfeld zu lernen, stört sie nicht. Den Lernenden ist weiters wichtig, beliebt zu sein. Am liebsten erledigen sie Aufgaben mit anderen Kindern und überzeugen dabei mit ihrer Anpassungsfähigkeit und Flexibilität. Das Lernen ist durch ihre kreative und fantasievolle Art geprägt.

Menschen mit dem konkret-assoziativen Stil

Menschen, die nach dem konkret-assoziativen Stil lernen, haben viel Energie und zeichnen sich durch ihre Experimentierfreude und Willensstärke aus. Die Lösung von Problemen erfolgt auf sehr kreative Weise. Die Lernenden handeln besonders schnell, spontan und innovativ. Die Arbeit mit anderen kompetenten Kindern gefällt ihnen. Die Autorität von Personen zu akzeptieren und zu respektieren, fällt diesen Kindern häufig etwas schwer. Sie wollen weiters nur das lernen, was sie wirklich wissen müssen und nichts darüberhinausgehend. Aufgrund ihrer Risikobereitschaft lösen sie gerne offene und unstrukturierte Aufgabenstellungen. Jene Lernenden haben besonders viel Energie und entwickeln vielfältige Ideen. Sie sind von ihrem

starken Willen geprägt, der sie manchmal etwas eigensinnig handeln lässt. Sie wollen ihr Leben selbst in die Hand nehmen, und haben deshalb Schwierigkeiten, die Unterstützung ihrer Mitmenschen anzunehmen. Beim Lösen von Aufgaben wenden diese Kinder häufig zu viele Methoden an.

3.5.2 Vorgehensweisen bei Problemlöseaufgaben von mathematisch begabten Schülerinnen und Schülern

Im Rahmen von Untersuchungen nach Käpnick (1998), wie zum Beispiel beim Neubrandenburger Projekt, wurden Vorgehensweisen von begabten Dritt- und Viertklässlerinnen und -klässlern näher betrachtet. Dabei sind vor allem jene Vorgehensweisen, wie Kinder an eine Problemlöseaufgabe herangehen, aufgefallen. Die meisten haben sehr individuelle Strategien eingesetzt und wendeten sie im Laufe der dritten und vierten Klasse Volksschule auch des Öfteren an. Käpnick (1998, S. 250ff) konnte fünf verschiedene Herangehensweisen feststellen, die nun im Folgenden anhand eines Beispiels beschrieben werden. Das Beispiel wird in Abbildung 17 veranschaulicht. Bei der *Stern-Aufgabe* müssen Kinder auf einer Strecke mit vier Zahlen Zahlen von eins bis zwölf eintragen, sodass die Summe dieser vier Zahlen immer 26 ergibt.

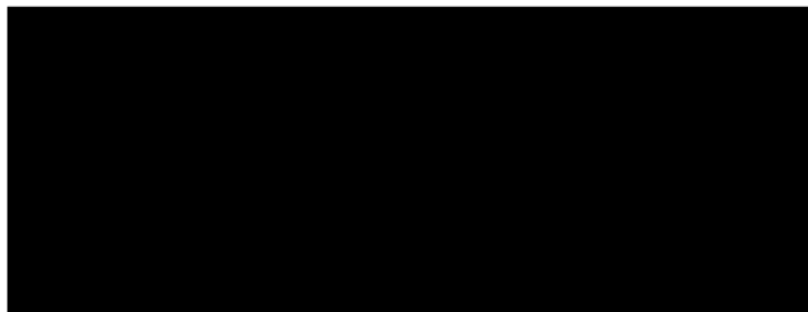


Abbildung 17: Stern-Aufgabe (Käpnick, 1998, S. 251)

Hartnäckiges Probieren

Käpnick (1998, S. 251) zieht als Beispiel die Überlegung eines Mädchens heran:

Ich habe immer wieder probiert. Es dauerte ganz schön lange, und dann habe ich allmählich begriffen, wie ich die Zahlen mischen muß [sic] [...], daß [sic] ich auf jeder Strecke zu zwei kleineren Zahlen zwei größere geben muß [sic], damit die Summe überall gleich wird. Ich mußte [sic] aber noch viel probieren. Nach einer Stunde hatte ich eine Lösung. (S. 251)

Seine Aussage macht deutlich, dass es nur durch hartnäckiges Probieren zur Lösung gekommen ist, da es keine Zusammenhänge zwischen den Zahlen entdecken konnte. Durch das mehrfache Probieren entwickelte das Mädchen unbewusst ein Gefühl für Zahlbeziehungen, das ihm beim weiteren Ausprobieren half. Es probierte so lange, bis es letztlich zu einer Lösung gekommen war. Bemerkenswert ist, dass das Mädchen keineswegs versucht hatte, aufzugeben. Es konzentrierte sich beharrlich auf die Aufgabe. Jene Vorgehensweise zeigt, dass für eine Begabung typische Persönlichkeitseigenschaften wie Beharrlichkeit und Selbstständigkeit

beim Lösen solcher Aufgaben helfen können. Allerdings hatte das Mädchen nach der Lösungsfindung keinen Ansporn mehr, nach weiteren Lösungen zu suchen, da vermutlich die Energie durch das hartnäckige Probieren verloren gegangen ist. Es äußerte sogar die Vermutung, dass gar keine weiteren Lösungen möglich wären. Diese Vermutung lässt sich dadurch belegen, dass es durch das mehrmalige Probieren der Meinung ist, bereits alle möglichen Zahlbesetzungen im Stern getestet zu haben. Auch andere Kinder der dritten und vierten Klassen zeigten in der Untersuchung die Vorgehensweise des hartnäckigen Probierens (vgl. Käpnick, 1998, S. 252).

Abwechselndes Überlegen und Probieren

Beim abwechselnden Überlegen und Probieren zieht Käpnick (1998, S. 252) folgende Aussage eines Buben heran:

Zuerst habe ich die Eckzahlen überlegt. Dann habe ich probiert. Dann habe ich die Zahlen, die ich schon hatte, auf jeder Strecke zusammengezählt und überlegt, welche Zahlen ich noch brauche. Nach einer Stunde hatte ich eine Lösung. Ich glaube, daß [sic] es noch mehr Lösungen gibt. (S. 252)

Bei diesem Buben ist aufgefallen, dass er einerseits durch Probieren zu einer Lösung kommen wollte, sich andererseits aber auch über Zahlbeziehungen Gedanken gemacht hat. Schrittweise versuchte er, zu einer Lösung zu kommen. Hervorzuheben ist, dass der Bub zuerst Überlegungen zu den Eckzahlen angestellt hat und erst danach ins Probieren übergegangen ist. Kinder, die ähnlich wie dieser Bub vorgegangen sind, haben häufig zuerst mit dem Probieren begonnen und erst nach und nach Beziehungen zwischen den Zahlen erkannt, die für die Lösungsfindung ausschlaggebend waren. Die Vorgehensweise des abwechselnden Probierens und Überlegens war deutlich effektiver als das hartnäckige Probieren. Der Bub machte sich die Zahlbeziehungen bewusst und konnte daher auch die Schwierigkeit der Aufgabe etwas verringern. Durch das Erkennen von Zahlbeziehungen reduziert sich natürlich auch der Rechenaufwand. Vermutlich zog der Bub aufgrund dieser Aspekte mehrere, mögliche Lösungen in Erwägung (vgl. Käpnick, 1998, S. 252).

Intuitives Vorantasten

Um diese Vorgehensweise zu verdeutlichen, wird im Folgenden die Aussage eines Buben wiedergegeben:

Ich habe versucht, einige kleine Zahlen gleichmäßig auf den Stern zu verteilen. Und dann habe ich weiter probiert. So fand ich eine Lösung. Bei mir ist es meist so. Ich sehe die Lösung irgendwie gleich. Es ist so, als ob ich es ahne. Ich glaube jedenfalls, daß [sic] es so ist. (Käpnick, 1998, S. 253)

Käpnick (1998, S. 253) konnte die Vorgehensweise des Buben nur bei sehr wenigen, anderen Kindern beobachten. Jene Schülerinnen und Schüler, die jedoch mithilfe des intuitiven Vorantastens zu einer Lösung kommen wollten, waren besonders temperamentvoll. Sie freuten sich über die schnelle Lösungsfindung, welche jene Kinder aber vermutlich davon abhielt, ihre Lösung zu überprüfen und nach weiteren Lösungen zu suchen. Laut Käpnick sollte diese Vorgehensweise jedoch trotzdem anerkannt werden, da sie ein Gefühl für Zahlen und andere, mathematische Sachverhalte erfordert. Kinder, die Aufgaben nach diesem Vorgehen lösen, haben häufig durch ihr spontanes Handeln besonders kreative Ideen, die sich positiv auf die Lösungsfindung auswirken. Trotzdem muss bei dieser Vorgehensweise auch eine negative Auswirkung auf die schulischen Leistungen der Kinder genannt werden. Da bei diesem Verfahren kaum Zwischenschritte oder Überlegungen aufgeschrieben werden, ist für Lehrpersonen schwierig, die Vorgehensweise der Kinder bei schriftlichen Überprüfungen wie Lernzielkontrollen zu beurteilen. Durch die fehlende Mitschrift der Zwischenschritte kann den Kindern bei einem falschen Ergebnis kein Punkt gegeben werden, da der Lösungsweg nicht nachvollzogen werden kann.

Systematisches Vorgehen

Ich habe ein Blatt genommen und immer vier Zahlen mit der Summe 26 aufgeschrieben, z.B. $1+2+11+12=26$. Dann habe ich mit einer Gleichung angefangen. Das war meine erste Strecke. Dann habe ich mir eine zweite Gleichung 'rausgenommen, in der die eine Zahl schon war. Meine Mutti hat mir dabei geholfen. Ich habe zwei Lösungen gefunden. (Käpnick, 1998, S. 254)

Dieser Kommentar eines Mädchens zeigt die systematische Vorgehensweise. Es weist nicht das übliche spielerische und spontane Vorgehen von Grundschülerinnen und Grundschülern mit Zahlen auf. Bei der Lösungsfindung unterstützten die Eltern das Mädchen in diesem Fall. Die Vorgehensweise ist eigentlich aber eher untypisch für Schülerinnen und Schüler der Primarstufe. Trotzdem konnte Käpnick (1998, S. 254) bei einigen, wenigen Kindern beobachten, dass sie Problemlöseaufgaben wie die *Stern-Aufgabe* eher sachlich und auf formaler Ebene bearbeiteten. Jene Lernende waren in ihrer Art ruhig und introvertiert. Bei Diskussionen über die Problemaufgabe sprachen sie erst mit, wenn sie sich ihrer Lösung vollkommen sicher waren und ihren Lösungsweg auch beschreiben konnten. Gelang ihnen, eine Aufgabe tatsächlich zu lösen, so freuten sie sich eher still darüber. Aufgrund der speziellen Vorgehensweise, die sie beim Lösen von Problemaufgaben anwendeten, bearbeiteten sie diese Aufgaben lieber alleine.

Wechseln zwischen den Repräsentationsebenen mit einem bevorzugten Arbeiten auf der en-aktiven oder ikonischen Ebene

Käpnick (1998, S. 254f) zieht für diese Vorgehensweise die Beschreibung eines Mädchens heran:

Ich habe mit Zahlenplättchen probiert. Da ging das Umlegen ziemlich schnell. Nach einigen Versuchen sah ich ungefähr, wie ich weiterlegen mußte [sic]. Aber dann mußte [sic] ich doch noch einmal umlegen. Wenn man die linke und die rechte Seite beim Stern vertauscht, müßte [sic] es noch mehr Lösungen geben. Ja, das müßte [sic] klappen. (S. 254)

Diese Vorgehensweise ist für ein Kind aus der Grundschule wenig überraschend. Grundschülerinnen und Grundschüler benötigen beim Bearbeiten von Aufgaben häufig noch eine visuelle Darstellung oder gegenständlich-praktische Tätigkeiten. Trotzdem konnte der Autor beobachten, dass relativ wenige Kinder die *Stern-Aufgabe* mithilfe dieser Vorgehensweise lösten. Er vermutet, dass Erfahrungen aus dem Mathematikunterricht der dritten und vierten Schulstufe eine Rolle spielten. Laut ihm neigen viele Lehrerinnen und Lehrer dazu, eher den leistungsschwächeren Schülerinnen und Schülern Anschauungsmaterial als Unterstützung anzubieten. Begabte Kinder versuchen demnach, ohne dieses Material auszukommen. Käpnick (1998, S. 254) lehnt diese Ansicht allerdings ab. Das Beherrschen des Wechsels zwischen den drei Repräsentationsebenen sieht er als eine besondere Leistung in der Mathematik. Dadurch können oft erst mathematische Zusammenhänge verstanden und Strukturen erkannt werden. Wie in 2.2.2 beschrieben, kann die Fähigkeit, zwischen den Repräsentationsebenen wechseln zu können, unter anderem ein Merkmal für eine mathematische Begabung sein. Auch das Mädchen, dessen Aussage im obigen Text wiedergegeben wurde, konnte durch das Verwenden von Plättchen Einsichten in mathematische Zusammenhänge bekommen. Aufgrund von Symmetriebetrachtungen konnte es zu verschiedenen Lösungen kommen. Das Mädchen verwendete im Zuge anderer Aufgaben dieselbe Vorgehensweise, da es dadurch immer zu einer oder mehreren Lösungen gelangen konnte.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass bei dem Lernstilkonzept, welches in 3.5.1 beschrieben wurde, die Persönlichkeit ganzheitlich betrachtet wird. Dies kann als besonders positiv gesehen werden. Sowohl bei Käpnick (1998) als auch bei Grogeroc (1997) stehen die Informationsaufnahme und -verarbeitung im Mittelpunkt. In diesem Prozess spielen einerseits die kognitiven Fähigkeiten, aber auch die individuellen Persönlichkeitseigenschaften der Kinder eine wichtige Rolle. Betreffend des Lernstilkonzepts nach Grogeroc (1997) können Ähnlichkeiten zu Käpnicks eben behandelten Erkenntnissen festgestellt werden. Fuchs (2006, S. 104) ist der Meinung, dass das systematische Vorgehen nach Käpnick (1998, S. 254) dem konkret-systematischen oder abstrakt-systematischen Lernstil nach Grogeroc (1997) entspricht.

Beide Autoren nannten folgende Merkmale der Kinder: Sie arbeiten sehr ordentlich und gewissenhaft und sind gut organisiert. Immer wieder bitten sie um Erklärungen oder genauere Instruktionen, weil sie alles richtig machen wollen. In ihrer Art sind sie eher introvertiert und ruhig. Zur Vorgehensweise des intuitiven Vortastens nach Käpnick (1998, S. 253) passt der konkret-assoziative Lernstil nach Grogeroc (1997) gut. Auch hier können wieder Gemeinsamkeiten festgestellt werden. Beide Autoren beschreiben das Arbeiten der Kinder als besonders schnell, spontan und kreativ. Genauso sind die Lernenden sehr eigensinnig, haben viel Energie und neigen zu einer gewissen Unordnung. Diese Ähnlichkeiten, die sich zwischen den Lernstiltypen und den Vorgehensweisen ergeben, können jedoch nicht verallgemeinert werden. Denn jedes Kind ist einzigartig und lernt auf individuelle Weise, weshalb es nie einem bestimmten Lerntyp oder einer bestimmten Vorgehensweise zugeordnet werden kann.

Fuchs (2006, S. 106f) hat die Erkenntnisse nach Käpnick (1998) und Grogeroc (1997) in folgenden Abbildungen noch einmal zusammengefasst. So werden die einzelnen Merkmale, die mathematisch begabte Kinder bei den verschiedenen Vorgehensweisen bei Problemlöseaufgaben zeigen, noch einmal im Überblick dargestellt. Dabei geht die Autorin auf die Informationsaufnahme und -verarbeitung, die bevorzugte Handlungsebene, die mathematische Sensibilität, die Art und Weise der Lösungsdarstellung und -kontrolle, die allgemeinen Persönlichkeitseigenschaften und die emotionale Selbstregulation ein.

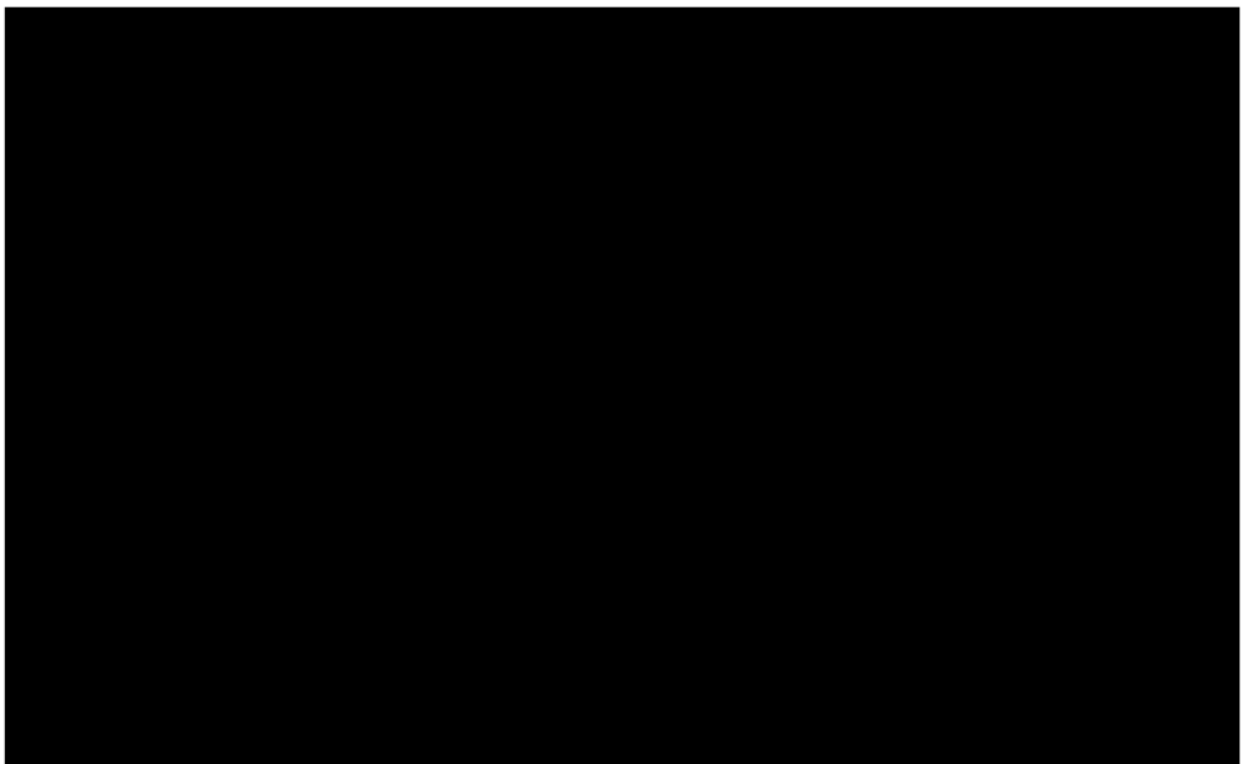


Abbildung 18: Zusammenfassung der Aussagen von Käpnick (1998) und Grogeroc (1997) (Fuchs, 2006, S. 106)

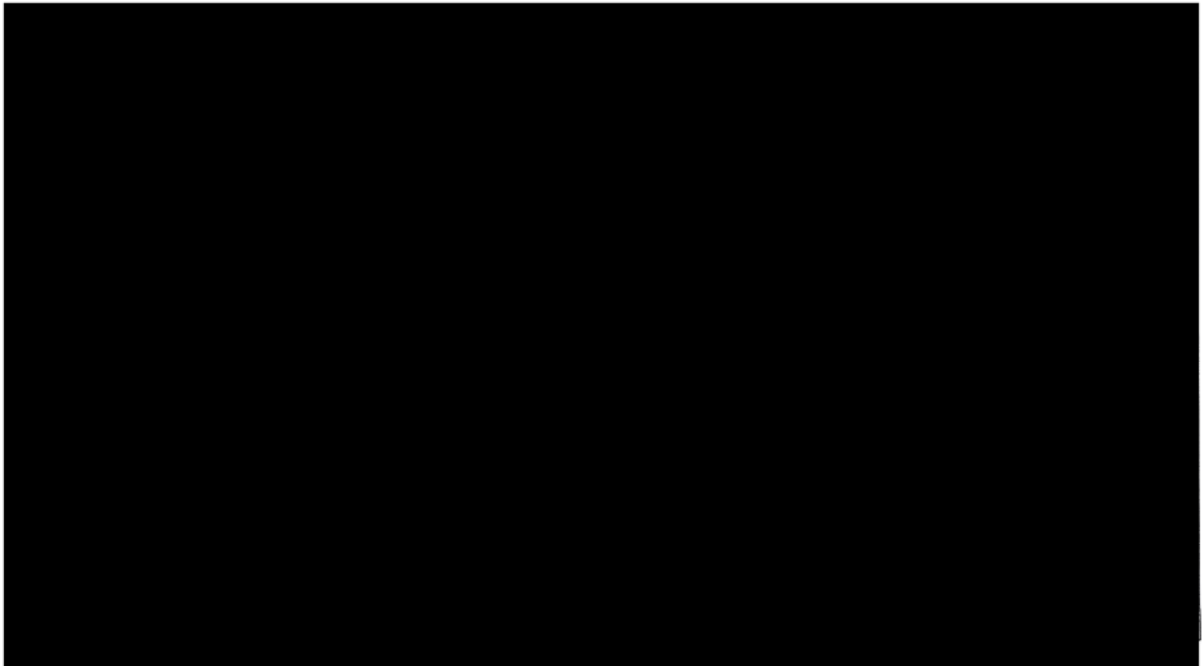


Abbildung 19: Zusammenfassung der Aussagen von Käpnick (1998) und Grogeroc (1997) (Fuchs, 2006, S. 107)

4 Förderung mathematisch begabter Grundschul Kinder

Nachdem eine mathematische Begabung bei einem Kind diagnostiziert worden ist, spielt die Förderung dieser eine zentrale Rolle in der Schule. Lehrerinnen und Lehrer haben die Aufgabe, diesen Schülerinnen und Schülern Lernangebote zu stellen, bei denen ihre Begabung optimal gefördert wird. Warum das notwendig ist und wie dies auch während des Regelunterrichts gelingen kann, wird in den nachfolgenden Kapiteln beschrieben.

4.1 Notwendigkeit der Förderung mathematisch begabter Grundschul Kinder

Zuallererst werden Gründe für die Förderung einer mathematischen Begabung beschrieben. Den ersten Grund beschreibt Bauersfeld (2006, S. 82f). Untersuchungen zur Diagnose und Förderung von mathematisch begabten Grundschulkindern haben eine deutliche Ähnlichkeit zum Umgang mit leistungsschwachen Schülerinnen und Schülern im Mathematikunterricht gezeigt. Er meint, dass sich sowohl leistungsstarke als auch leistungsschwache Kinder im Unterricht teilweise ausgegrenzt fühlen. Jene Kinder, die mit ihren hohen Leistungen überzeugen, werden oft aus der Gemeinschaft ausgeschlossen, weil sie immer alles perfekt und richtig machen wollen. Die anderen Lernenden, die eher schwache Leistungen erbringen, werden nicht integriert, da sie ihre Aufgaben falsch machen.

Beide machen Fehler, was zu defizitverursachenden Vermeidungsstrategien oder gar zur Verweigerung der entsprechenden Lernansprüche führen kann. Beide haben daher Probleme mit ihrem Selbstkonzept, d.h. in beiden Fällen besteht die Schwierigkeit das Verhältnis zu sich selbst und zu anderen zu ordnen und zu stabilisieren. Und das heißt insbesondere, mit den eigenen Schwächen und Stärken sinnvoll zurechtkommen zu können. (Bauersfeld, 2006, S. 82)

Sowohl leistungsschwache als auch leistungsstarke Kinder benötigen ein kooperatives Umfeld, in dem sie konstruktive Erfahrungen in einer sachlichen Auseinandersetzung mit der Welt sammeln und ihnen bewusst gemacht wird, dass sie mit ihren Bedenken nicht alleine sind.

Obwohl die Förderung einer Begabung grundsätzlich möglichst früh beginnen sollte, gilt dies bei einer mathematischen Begabung nicht. Mit dem Befund, Grundschul Kinder für mathematisch begabt zu erklären, sollten sich Lehrerinnen und Lehrer, aber auch Erziehungsberechtigte etwas Zeit lassen. Die Gründe dafür wurden bereits in Kapitel 3 erläutert. Werden die Schülerinnen und Schüler zu früh gefördert, entwickeln sich eventuell Defizite oder einseitige Stärken, deren Entwicklung durch eine optimale Förderung vermieden werden kann (vgl. Bauersfeld, 2006, S. 84).

Dennoch spielt die Förderung von mathematisch begabten Kindern eine wichtige Rolle, um Unterforderung zu vermeiden. Wird die Begabung zu spät erkannt und gefördert, kann sich dies wiederum negativ auf die Entwicklung des Kindes auswirken (vgl. Bardy, 2007, S. 114). Der richtige Zeitpunkt für die Diagnose und Förderung einer mathematischen Begabung ist also nicht eindeutig festlegbar.

4.2 Ziele der Förderung mathematisch begabter Grundschulkinder

Natürlich sollen durch die Förderung mathematisch begabter Grundschülerinnen und Grundschüler Ziele angestrebt werden, die im Zuge der Förderung auch erreicht werden können. Welche allgemeinen Ziele dabei eine zentrale Rolle spielen, beschreibt Bardy (2007, S. 117) folgendermaßen:

- Jene Kinder, die im Mathematikunterricht unterfordert beziehungsweise vielleicht sogar gelangweilt sind, sollen gefordert werden.
- Der Spaß, den sie im Umgang mit Zahlen zeigen, soll beibehalten beziehungsweise ausgeweitet werden.
- Die Freude, Problemlöseaufgaben zu bearbeiten, sollte bei den Kindern geweckt werden und aufrechterhalten bleiben. Denn gerade diese Aufgaben fordern die Schülerinnen und Schüler heraus und ihre mathematischen Fähigkeiten werden beansprucht.
- Die Kinder sollen durch anspruchsvolle Aufgaben, bei denen sie nicht sofort zu einer Lösung kommen beziehungsweise die mehrere Lösungen zulassen, an Ausdauer und Beharrlichkeit gewinnen.
- Die vorhandene, intrinsische Motivation soll erhalten bleiben.
- Ihre intellektuelle Neugierde soll geweckt werden.
- Die Kreativität und Fantasie der Schülerinnen und Schüler soll gefördert werden.
- Die begabten Kinder sollen die Erfahrung machen, dass das Arbeiten mit der Partnerin oder dem Partner oder innerhalb einer Gruppe Vorteile mit sich bringt. Sie können beispielsweise gemeinsam über Lösungen diskutieren und sich andere Lösungswege überlegen.

Bardy (2007, S. 117) legt fest, dass diese allgemein formulierten Ziele angestrebt werden sollen, um die Schülerinnen und Schüler in ihren Fähigkeiten zu fördern. Er erwähnt ausdrücklich, dass es ihm bei den allgemeinen Zielen und bei den, im weiteren Text formulierten, speziellen Zielen nicht darum gehe, aus zehn Prozent der Kinder später einmal Mathematikerinnen und

Mathematiker zu machen, sondern den begabten Kindern eine tiefere Auseinandersetzung mit Themenbereichen der Mathematik zu ermöglichen. Dabei steht die allgemeine Persönlichkeitsentwicklung im Vordergrund.

Neben den allgemeinen Zielen beschreibt Bardy (2007, S. 118) auch spezielle Ziele, die von Lehrpersonen zur Förderung mathematisch begabter Grundschülerinnen und Grundschüler angestrebt werden sollen. Diese werden im Folgenden punktuell aufgelistet:

- Der Einsatz von heuristischen Hilfsmitteln, wie beispielsweise von Tabellen oder informativen Skizzen, soll gefördert werden.
- Allgemeine Strategien, wie zum Beispiel das systematische Probieren oder das Festhalten von problemlöserrelevanten Beziehungen zwischen Gleichungen, sollen gelehrt werden.
- Weiters ist wichtig, das logische Denken durch spezielle Aufgaben zu fördern.
- Auch die Argumentation und Begründung von Lösungswegen soll unterstützt werden.
- Lehrerinnen und Lehrer sollen die Kinder zum mathematischen Beweisen hinführen.
- Genauso sollen sie das Erkennen von Strukturen und Beziehungen und das Abstrahieren fördern.
- Zu guter Letzt hat die Förderung des räumlichen Vorstellungsvermögens eine besondere Relevanz.

In Bezug auf die Liste der spezifischen Fähigkeiten ist zu überdenken, ob die Förderung des logischen Denkens separat aufgelistet werden muss. Die Fähigkeit des logischen Denkens ist eher ein Überbegriff für die anderen, genannten Fähigkeiten. Logisches Denken wird also nahezu in jedem Bereich der Mathematik benötigt, um beispielsweise Strukturen zu erkennen und Verallgemeinerungen aufzustellen.

4.3 Förderungsmaßnahmen bei mathematisch begabten Grundschulkindern

Wie bereits erwähnt, ist wichtig, dass alle Schülerinnen und Schüler in ihren Stärken und Schwächen optimal gefördert werden. Mathematisch begabte Kinder müssen also vor allem in jenen Bereichen unterstützt werden, in denen sie besonders hohe mathematische Leistungen aufweisen. Anzustreben sind dabei jene Ziele, die in 4.2 beschrieben wurden. Förderungsmaßnahmen wie Akzeleration und Enrichment, Integration und Segregation oder Differenzierung und Individualisierung können gesetzt werden. Was darunter verstanden wird und wie

Lehrpersonen diese Maßnahmen für die Begabtenförderung umsetzen können, wird in den folgenden Kapiteln näher erläutert.

4.3.1 Integration und Segregation

Vorerst geht es um die Frage, ob mathematisch begabte Kinder eher innerhalb oder außerhalb des Klassenunterrichts gefördert werden sollten. Fast (2005, S. 93f) beschreibt in diesem Zusammenhang, dass Kinder grundsätzlich mehr von einem auf das Verständnis von Zusammenhängen aufbauenden Unterricht profitieren. Sie ist der Meinung, dass der Qualität des Unterrichts ein deutlich höherer Stellenwert zuzuschreiben ist, als den verschiedenen äußeren Differenzierungen, wie beispielsweise das Unterrichten von begabten Kindern in einem anderen Raum. Diese Form des Unterrichts wird auch als *Segregation* bezeichnet. Lehrerinnen und Lehrer sollen daher viel Zeit in die Planung der Vermittlung des Lehrstoffes investieren, um eine optimale Begabungsförderung zu gewährleisten und auch die mathematisch begabten Kinder innerhalb des Klassenverbandes unterrichten zu können. Gegen Segregation spricht, dass die Diagnose von begabten Schülerinnen und Schülern im zu frühen Alter etwas umstritten ist. Denn, wie bereits in 3.2 erwähnt, ist die Diagnose einer mathematischen Begabung vor allem in der ersten und zweiten Schulstufe schwierig, da Kinder in diesem Alter einer starken Entwicklung ihrer Interessen ausgesetzt sind. Daher ist eine optimale Förderung in verschiedenen, mathematischen Bereichen sinnvoll und notwendig. Durch eine integrative Förderung können Begabungen der Kinder zum Vorschein kommen, die sich durch zu frühe Segregation eventuell nicht entwickelt hätten.

So ist es für eine Lehrperson wichtig, allen Kindern eine optimale Förderung ihrer Stärken zu gewähren, indem unterschiedliche Vorgehensweisen beim Lösen eines Problems zugelassen und den Kindern auch Inhalte angeboten werden, die in ihrem Interessensgebiet liegen. Dadurch wird es möglich, potentiell mathematisch begabte Kinder zu fördern. Festzustellen ist daher, dass das gemeinsame Lernen und Arbeiten während des Unterrichts weitaus förderlicher für die Ausprägung einer mathematischen Begabung ist, als das getrennte Unterrichten dieser Kinder in einem anderen Raum. Durch die integrative Förderung fallen die äußeren Organisations- und Selektionsrichtlinien weg und Schülerinnen und Schüler können ihre mathematische Begabung durch einen strukturierten und professionell geplanten Unterricht entwickeln (vgl. Fast, 2005, S. 94f).

4.3.2 Differenzierung und Individualisierung

Da eine integrative Förderung, wie bereits im vorigen Kapitel erwähnt, für die Entwicklung von Begabungen effizienter ist, muss die Lehrperson nun herausfinden, in welcher Weise das Ler-

nen während des Unterrichts bei mathematisch begabten Kindern stattfinden soll. Differenzierung und Individualisierung ermöglichen begabungsfördernde Lernsituationen. Diese gelingen umso besser, je mehr die verschiedenen Erfahrungen, Zugangsweisen und Lösungswege der Schülerinnen und Schüler als Ressourcen erkannt werden (vgl. Fast, 2005, S. 95).

Unter *Differenzierung* werden alle „organisatorischen, didaktischen und methodischen Maßnahmen“ (Grundsatzterlass zur Begabungs- und Begabtenförderung, 2017) verstanden. Durch diese Maßnahmen werden für die Kinder unterschiedliche Lernsituationen geschaffen. Schülerinnen und Schüler lernen beispielsweise verschiedene methodische Zugänge zu einem bestimmten Lerninhalt und dürfen sich in verschiedenen Umgebungen mit einem Thema auseinandersetzen. Genauso ermöglicht Differenzierung eine flexible Gruppierung der Lernenden. Kriterien für diese Form der Förderung sind beispielsweise die Lernfähigkeit, die Lerngeschwindigkeit, die Motivation und Leistungsbereitschaft, das Interesse, die Begabungen und die Arbeitsweisen (vgl. Grundsatzterlass zur Begabungs- und Begabtenförderung, 2017).

Bei *Individualisierung* wird die Individuallage der Schülerinnen und Schüler berücksichtigt. Lehrerinnen und Lehrer stellen Überlegungen zu methodischen, personellen, strukturellen und materiellen Hilfestellungen für Kinder zur Bewältigung des Lerninhaltes an. Methodische Unterstützungsmaßnahmen sind beispielsweise die Visualisierung von Vorgängen mithilfe von Bildkarten oder Ablaufplänen. Werden Schülerinnen und Schüler personell unterstützt, so bekommen sie eine Tutorin oder einen Tutor, der individuell auf ihre Schwächen beziehungsweise Stärken eingeht. Unter strukturellen Hilfestellungen werden Tages- oder Wochenpläne verstanden. Eine materielle Unterstützung kann in Form von Lernkarteien oder Wörterbüchern gegeben sein (vgl. Stadtschulrat für Wien, 2007).

Sowohl Individualisierung als auch Differenzierung sind in einem offenen Unterricht wesentlich besser umzusetzen. Bei Freiarbeiten oder einem Stationenbetrieb können Lehrerinnen und Lehrer genauer auf die Bedürfnisse der Kinder eingehen und sie in ihren Stärken und Schwächen durch gezielte Maßnahmen unterstützen und fördern.

4.3.3 Akzeleration und Enrichment

Akzeleration und *Enrichment* sind Formen von Individualisierung. In diesen individualisierten Wissenserwerbsprozessen übernimmt die Lehrperson die Rolle als Lernberaterin oder Lernberater beziehungsweise Mentorin oder Mentor. Sie ermöglicht weitere Lernfortschritte, begleitet die Schülerinnen und Schüler reflexiv und gibt kontinuierliche Rückmeldungen. Unter *Akzeleration* wird das schnellere Durchlaufen der Schullaufbahn verstanden. Akzeleration eignet sich vor allem dann, wenn das Unterrichtsangebot an das geistige Entwicklungsalter der

begabten Kinder angepasst wird. Durch diese Förderungsmaßnahme können begabte Schülerinnen und Schüler beispielsweise frühzeitig eingeschult werden, eine Schulstufe überspringen oder an „Pullout“-Programmen, die in den nachfolgenden Kapiteln noch genauer erläutert werden, teilnehmen. Vor allem das Überspringen einer Schulstufe, aber auch eine vorzeitige Einschulung bedürfen einem schnelleren Voranschreiten in den Pflichtgegenständen, zusätzlichen Begleitmaßnahmen und einer stärkeren Kooperation der beteiligten Kinder, Lehrpersonen und Eltern. Denn der Unterricht in einer höheren Schulstufe ist nicht an die Leistungsfähigkeit und die Lernbedürfnisse des begabten Kindes angepasst. Um dennoch die Maßnahme von Akzeleration setzen zu können, beschreibt das Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung im Grundsatzterlass zur Begabungs- und Begabtenförderung (2017) folgende pädagogische Maßnahmen, die bei jeder Schülerin oder jedem Schüler individuell gesetzt werden können:

- Mithilfe des *Curriculum Compactings* wird ein schnelleres Durchnehmen und Anpassen des Lehrstoffes möglich.
- *Contracting* ist eine inoffizielle Vereinbarung zwischen der Klassenlehrperson und der Schülerin oder dem Schüler in Bezug auf den individuellen Lernprozess. Diese Lernzielvereinbarungen werden auf freiwilliger Basis getroffen. Sie haben jedoch nichts mit den Leistungsfeststellungen und der Leistungsbeurteilung zu tun.

Fast (2005, S. 90f) empfindet das Überspringen einer Schulstufe nur dann als sinnvoll, wenn das begabte Kind in allen Unterrichtsgegenständen eine hohe Leistungsfähigkeit aufweist. Ist ein Kind beispielsweise nur im mathematischen Bereich besonders begabt und zeigt in den anderen Unterrichtsfächern lediglich durchschnittliche Leistungen, ist das Überspringen einer Klasse nicht geeignet. In diesem Fall rät sie eher zu einem schnelleren Fortschreiten des mathematischen Lehrstoffes. Hat die Lehrperson den Lehrstoff in Mathematik mit diesem Kind bereits behandelt, so bleiben zwei Möglichkeiten offen: Einerseits kann der Lehrstoff der Sekundarstufe vorgezogen und dem Kind individuell gelehrt werden. In diesem Fall eröffnet sich die Möglichkeit, auch frühzeitig die Reifeprüfung in Mathematik zu absolvieren und in diesem Fach eine tertiäre Bildungseinrichtung zu besuchen. Andererseits kann durch das schnellere Bearbeiten des Lehrstoffes der Primarstufe eine tiefere Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten während des Unterrichts stattfinden.

Das Vertiefen und Erweitern des Lehrstoffes wird *Enrichment* genannt. Bei dieser Förderungsmaßnahme kann sich das Unterrichtsangebot nach den Bedürfnissen und Interessen der begabten Schülerinnen und Schüler richten. Dabei werden immer noch Themen aus dem Lehrplan der Volksschule behandelt, allerdings findet die Auseinandersetzung mit diesen in einem

vertieften Ausmaß statt (vgl. Grundsatzerlass zur Begabungs- und Begabtenförderung, 2017). Bei der Förderungsmaßnahme von Enrichment haben die Kinder die Möglichkeit, ungewohnte Denkprozesse und Zugänge zu mathematischen Problemen zuzulassen. Aufgabenstellungen zu Themen, welche begabte Kinder interessieren, sind für sie ein Anreiz, diese richtig zu lösen (vgl. Fast, 2005, S. 91).

Im Schulalltag erweist sich die Kombination dieser beiden Förderungsmaßnahmen häufig am sinnvollsten. Welche Form der Förderung für das Kind am besten ist, muss die Lehrperson selbst entscheiden, da jedes Kind individuelle Bedürfnisse und Interessen hat.

4.3.4 Mögliche Organisationsformen der Förderung bei einer vorliegenden mathematischen Begabung

Welche Möglichkeiten Lehrpersonen in Bezug auf die Organisationsformen haben, um mathematisch begabte Grundschulkinder in der Schule fördern zu können, stellt Bardy (2007, S. 118ff) vor. Er sieht sogenannte „Pullout“-Programme als sinnvoll, bei denen jene Kinder ein- oder mehrmals pro Woche stundenweise ihre Klasse verlassen, um selbstständig oder mit einer anderen Lehrperson den eigenen Interessen nachzugehen oder innerhalb einer kleinen Gruppe ein bestimmtes Thema in einem Fach im „resource-room“ zu bearbeiten. Unter einem „Pullout“-Programm versteht sich ein spezielles Förderprogramm für mathematisch begabte Schülerinnen und Schüler, die normalerweise während des Regelunterrichts stundenweise aus der Klasse genommen werden, um an einem für sie interessanten Bereich zu arbeiten. Die Lerninhalte gehen meist über den verpflichtenden Lehrstoff hinaus. Weiters zieht Bardy (2007, S. 118ff) in Erwägung, mathematisch begabte Kinder in der regulären Klasse zu unterrichten, wobei sie zusätzlich zum Unterricht die Möglichkeit bekommen, an einem „Pullout“-Programm teilzunehmen. Genauso beschreibt er, dass begabte Schülerinnen und Schüler in der eigenen Klasse unterrichtet werden, zusätzlich aber an Kursen teilnehmen oder Themen in Arbeitsgemeinschaften bearbeiten können. Zuletzt stellt er die Möglichkeit vor, begabte Schülerinnen und Schüler in der Klasse mit binnendifferenziertem (Gruppen-)Unterricht zu fördern. Dabei kann individuell auf ihre Interessen und Fähigkeiten eingegangen werden. Eine Wochenplanarbeit oder Lernwerkstätten haben sich als mögliche Organisationsformen, die im Unterricht für alle Schülerinnen und Schüler differenziert eingesetzt werden können, bewährt. Wichtig ist außerdem, dass im Mathematikunterricht der Grundschule der Wechsel zwischen selbstständigem, individuellem und kooperativem Arbeiten stattfindet. Die Kinder sollen die Möglichkeit bekommen, ein mathematisches Problem zu lösen, bestimmte Themen zu erforschen und zu neuen Erkenntnissen zu gelangen. Das gemeinschaftliche Lernen sollte dabei im Vordergrund stehen, um die sozialen Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler zu fördern.

Die sozialen Kontakte zu ihren gleichaltrigen Mitschülerinnen und Mitschülern sind insbesondere für begabte Kinder von großer Bedeutung, da sie dadurch auch andere Interessen, Vorstellungen und Werte kennenlernen beziehungsweise zu akzeptieren lernen (vgl. Bardy, 2007, S. 120).

5 Konkrete Beispiele aus der Praxis zur Förderung einer mathematischen Begabung

Im Folgenden werden mögliche Förderungsmaßnahmen für mathematisch begabte Schülerinnen und Schüler, die sich unter anderem auf die in 4.2 formulierten allgemeinen und speziellen Ziele stützen, vorgestellt. Einerseits wird der theoretische Rahmen zu den Förderschwerpunkten erläutert, andererseits werden aber auch konkrete Beispiele aus der Praxis beschrieben, um diese Schwerpunkte zu fördern. Aufgabenbeispiele für die Förderung des logischen Denkens und der Kreativität werden nicht erläutert, da diese beiden Fähigkeiten ohnedies durch die anderen, offenen Aufgabenstellungen, die im Zuge der Schwerpunkte beschrieben werden, gefördert werden. Neben den speziellen Unterstützungsmaßnahmen werden auch außerschulische Standorte vorgestellt, die mit begabten Schülerinnen und Schülern, aber auch mit der gesamten Klasse besucht werden können.

5.1 Förderschwerpunkt: Einsatz von heuristischen Hilfsmitteln

Hartkopf (1964, S. 16f) versteht unter dem Begriff *Heuristik* die Lehre der Wege, die zulassen, wissenschaftliche Erkenntnisse zu gewinnen. Heuristik ist ein Teilgebiet der Methodentheorie. Die Methoden werden dabei durch ein Ziel, eine Aufgabe oder einen Zweck bestimmt. Ist die Heuristik systematisch aufgebaut, so benötigt sie als Grundlage eine Problemtheorie. Diese Theorie beschäftigt sich mit den Problemen im Allgemeinen, ihren Strukturen, der Art der Problemstellung, Problemmentstehung und -lösung und der Funktion der Probleme. Nach Pólya (1964) beschäftigt sich Heuristik „mit dem Lösen von Aufgaben. Zu ihren spezifischen Zielen gehört es, in allgemeiner Formulierung die Gründe herauszustellen für die Auswahl derjenigen Momente bei einem Problem, deren Untersuchung uns bei der Auffindung der Lösung helfen könnte.“ (S. 5) Der Autor macht das Lösen von Problemen beziehungsweise Aufgabenstellungen in Bezug auf Heuristik zum Thema. Pólya (1967) beschreibt einen Rahmenplan zur Lösung von mathematischen Problemen, welcher sich in vier Phasen gliedert:

In der ersten Phase steht das Verstehen der Aufgabe im Vordergrund. Fragen wie „Was ist unbekannt?“, „Was ist gegeben?“ oder „Welche Bedingung muss erfüllt werden?“ werden sich gestellt.

Die zweite Phase beschäftigt sich mit dem Ausdenken eines Plans. Dabei wird überprüft, ob solch eine Aufgabe schon einmal in ähnlicher Form zu bearbeiten war. Um dies herauszufinden, wird auf das Vorwissen zurückgegriffen.

In der dritten Phase wird der Plan, der in der zweiten Phase aufgestellt wurde, durchgeführt. Dabei ist auf eine genaue Kontrolle der einzelnen Lösungsschritte zu achten.

In der vierten und letzten Phase findet eine Rückschau statt. Das erreichte Ergebnis soll kontrolliert werden. Des Weiteren werden Verknüpfungen zu anderen, ähnlichen Problemen hergestellt.

Heuristische Vorgehensweisen, auch Heurismen genannt, können vor allem in der zweiten Phase nach Pólya (1967) als Unterstützung dienen. Teilweise können sie auch schon in der ersten Phase zur Verwendung kommen. Ein Merkmal von Heurismen ist, dass sie von spezifischen Inhalten der zu lösenden mathematischen Problemstellungen unabhängig sind und als Unterstützung beim Finden von Ideen und Ansätzen dienen sollen. Heurismen können in heuristische Hilfsmittel, heuristische Strategien und heuristische Prinzipien unterteilt werden (vgl. König, 1992, S. 24ff). Heuristische Hilfsmittel sind beispielsweise Skizzen, Tabellen oder Lege-material. Unter heuristische Strategien fallen das systematische Probieren, das Vorwärts- oder Rückwärtsarbeiten oder das Umstrukturieren eines Problems. Heuristische Prinzipien sind das Analogie-, Invarianz- oder Extremalprinzip (vgl. BIFIE, 2013, S. 22). Auf heuristische Strategien und Prinzipien wird im nachfolgenden Kapitel näher eingegangen.

Heuristische Hilfsmittel sollen Schülerinnen und Schülern eine Unterstützung bei der Bearbeitung von mathematischen Aufgaben bieten. Dabei ist wichtig, dass sie sich diese aneignen und in weiterer Folge auch anwenden können. Begabte Grundschülerinnen und Grundschüler gehen beim Lösen mathematischer Problemstellungen häufig von ganz alleine heuristisch vor, dennoch sollten die Kinder einen Einblick in alle Vorgehensweisen bekommen, um sich letztlich für die individuell praktischste zu entscheiden. Die Anwendung von heuristischen Vorgehensweisen sollte schließlich dazu führen, dass sich Schülerinnen und Schüler selbstständig mit mathematischen Problemlöseaufgaben auseinandersetzen und sich Fragen stellen oder Impulse geben, wodurch sie ihre geistigen Tätigkeiten selbst zu steuern lernen (vgl. König, 1992, S. 24ff).

Welche heuristischen Hilfsmittel für die Bearbeitung einer Problemlöseaufgabe von großer Bedeutung sind, beschreibt König (2005, S. 48) näher. In der ersten Phase, in welcher der Schwerpunkt auf dem Verstehen der Aufgabe liegt, können das Einführen von zweckmäßigen Bezeichnungen oder die Überführung von der Wortsprache in eine passende Symbolsprache hilfreich sein. Kinder sollen beispielsweise erfahren, dass Buchstaben als Abkürzung für Namen, Berufe oder nicht bekannte Zahlen (Variablen) verwendet werden können. Die unbekannten Informationen können anschließend in Gleichungen oder Ungleichungen mithilfe der

Abkürzungen wiedergegeben werden. Genauso kann die Tabelle als heuristisches Hilfsmittel vielfältig eingesetzt werden. König (1992) beschreibt folgende Funktionen einer Tabelle:

- a) *Entdecken oder Überprüfen von funktionalen Zusammenhängen oder anderen Beziehungen zwischen Zahlen oder Größen;*
- b) *Hilfe beim systematischen Erfassen aller möglichen Fälle oder dem Ausschließen aller nicht möglichen Fälle;*
- c) *Abspeichern der Aufgabenstellung durch übersichtliches Festhalten der gegebenen und der gesuchten Größen bzw. von gegebenen Beziehungen oder Zusammenhängen;*
- d) *Hilfe beim Finden und Festhalten eines Lösungsplans.* (S. 35)

König (1992, S. 35) beschreibt weitere wichtige heuristische Hilfsmittel, wie beispielsweise Skizzen oder informative Figuren. Mithilfe dieser Mittel kann eine Problemaufgabe veranschaulicht werden. In der ersten Phase, bei der das Verstehen der Aufgabe im Vordergrund steht, werden Bezeichnungen und Informationen über das Gefragte und Gegebene in einer Skizze dargestellt. In der zweiten Phase kommen Skizzen oder informative Figuren zum Einsatz, um eine Lösung zu finden beziehungsweise die Lösungsschritte zu notieren.

Um begabten Kindern den Einsatz von heuristischen Hilfsmitteln näherzubringen, werden im Folgenden Aufgaben vorgestellt, bei denen sie jene anwenden können.

1. Aufgabenbeispiel: Reise nach Spanien

Familie Huber fährt mit dem Auto nach Spanien. Am ersten Tag legt sie 689km zurück. Am Abend des ersten Tages sagt die Mama: „Wenn wir morgen noch 733km fahren, dann haben wir drei Viertel der Strecke bereits geschafft.“ Wie lange ist die gesamte Fahrstrecke? (vgl. BIFIE, 2013, S. 29)

Bei diesem Aufgabenbeispiel ist sinnvoll, eine Skizze anzufertigen, um die Aufgabenstellung besser zu verstehen und nachzuvollziehen. Dafür wird eine Strecke mit vier Teilabschnitten skizziert. Um zu einer Lösung zu kommen, müssen sich die Lernenden zuerst ausrechnen, wie viele Kilometer sie nach dem zweiten Reisetag zurückgelegt haben, also $689\text{km} + 733\text{km} = 1\,422\text{km}$. Drei Viertel der Strecke sind daher 1 422km. Um ein Viertel der Strecke bestimmen zu können, muss $1\,422 : 3$ gerechnet werden. Das Ergebnis beträgt 474km. Die Gesamtstrecke ergibt sich aus dem Viertel der Strecke, nämlich 474km, und den bereits zurückgelegten drei Vierteln, nämlich 1 422km. $1\,422\text{km} + 474\text{km} = 1\,896\text{km}$, die gesamte Fahrstrecke ist daher 1 896km lang.

2. Aufgabenbeispiel: Körpergewicht

Stefans Mama ist doppelt so schwer wie Stefan. Sein Papa ist um 20kg schwerer als die Mama. Alle drei zusammen wiegen 200kg. Wie schwer ist jedes Familienmitglied?

In diesem Fall bietet sich an, eine Tabelle anzulegen, in der alle wichtigen Informationen, die aus dem Text hervorgehen, notiert werden. Dafür könnten Kinder mit Zahlen beginnen, bei denen eine Bedingung, nämlich dass die Mama um 20kg weniger wiegt als der Papa, zutrifft. Ausgehend von diesem Wissen arbeiten sich die Kinder voran und kommen letztlich zu dem Ergebnis, dass die Mama 72kg, der Papa 92kg und Stefan 36kg wiegen müssen. Nachfolgend ist die Vorgehensweise mithilfe einer Tabelle dargestellt (vgl. BIFIE, 2013, S. 31).

Gewicht der Mama	80kg	70kg	72kg
Gewicht des Papas	100kg	90kg	92kg
Gewicht von Stefan	20kg	40kg	36kg
Gesamtgewicht	200kg		

Tabelle 1: Vorgehensweise beim Aufgabenbeispiel Körpergewicht mithilfe einer Tabelle

3. Aufgabenbeispiel: Eisgeschäft

In einem Eisgeschäft werden die Eissorten Schokolade, Erdbeere, Vanille, Banane und Zitrone verkauft. Lena möchte jeden Tag einen Becher mit drei Kugeln verschiedener Sorten probieren. Wie viele Tage braucht sie, bis sie alle möglichen Kombinationen von drei verschiedenen Eissorten probiert hat?

Ein möglicher Lösungsweg wäre, alle Eissorten mit ihren Anfangsbuchstaben abzukürzen und alle Kombinationsmöglichkeiten systematisch aufzuschreiben. Zuerst werden alle Kombinationen mit der Eissorte Schokolade ausprobiert. Daraus ergibt sich Folgendes: SEV, SEB, SEZ, SVB, SVZ, SBZ. Anschließend werden alle Möglichkeiten mit der Eissorte Erdbeere getestet, die es bis jetzt noch nicht gab: EVB, EVZ, EBZ. Als letztes probiert das Mädchen VBZ. Daraus ergeben sich zehn verschiedene Kombinationsmöglichkeiten, was bedeutet, dass Lena zehn Tage braucht, bis sie alle Möglichkeiten von drei Eissorten gekostet hat. Um bei solchen Aufgabenbeispielen systematisch vorzugehen, benötigen die Kinder eventuell noch etwas Übung oder Unterstützung von der Lehrperson (vgl. Bardy, 2007, S. 131).

5.2 Förderschwerpunkt: Allgemeine Strategien beziehungsweise Prinzipien des Lösen von Problemaufgaben

Was unter einer Problemlöseaufgabe verstanden wird, wurde bereits in 2.2.4 genauer erläutert. Bardy (2007) beschreibt folgende Strategien und Prinzipien, die mathematisch begabte Schülerinnen und Schüler bereits selbstständig oder mithilfe einer Anleitung einsetzen, um mathematische Problemaufgaben zu lösen:

- „systematisches Probieren,
- Vorwärtsarbeiten,
- Rückwärtsarbeiten/Rückwärtsrechnen,
- Umstrukturieren,
- Benutzen von Variablen,
- Suchen nach Beziehungen/Aufstellen von Gleichungen oder Ungleichungen,
- das Analogieprinzip,
- das Symmetrieprinzip,
- das Invarianzprinzip,
- das Extremalprinzip,
- das Zerlegungsprinzip.“ (S. 139f)

5.2.1 Systematisches Probieren

Kinder, die eine Aufgabe mithilfe des systematischen Probierens lösen, sollen dazu angeregt werden, sich für eine Reihenfolge, die alle möglichen Elemente beziehungsweise Fälle in Erwägung zieht, zu entscheiden. Die Elemente oder Fälle können dabei Buchstaben, Zahlen, Zahlenpaare oder andere Zeichen sein. Eventuell ist auch notwendig, dass die begabten Schülerinnen und Schüler ein Ordnungsprinzip finden, wenn die Aufgabenstellung nicht schon eine bestimmte Ordnung, wie zum Beispiel das Ordnen der Größe nach, festlegt. Danach muss für jedes Element oder jeden Fall geprüft werden, ob die in der Aufgabe beschriebenen Bedingungen eingehalten werden. Konnte dies kontrolliert werden, so ist die Überprüfung aber noch nicht zu Ende. Die Eindeutigkeit der Lösung muss argumentativ begründet oder durch das Kontrollieren aller anderen Elemente oder Fälle nachgewiesen beziehungsweise müssen alle weiteren Lösungen gefunden werden (vgl. Bardy, 2007, S. 140).

Aufgabenbeispiel: Im Puppentheater

Im Puppentheater waren viele Zuschauerinnen und Zuschauer. Die Hälfte und eine Person waren Kinder, ein Viertel und zwei Personen waren Mütter und ein Sechstel und drei Personen waren Väter. Wie viele Kinder, Mütter und Väter waren im Theater?

Bevor Schülerinnen und Schüler eine Tabelle zum systematischen Probieren anlegen, ist notwendig zu überlegen, welche Gesamtanzahlen der Zuschauerinnen und Zuschauer überhaupt in Frage kommen. Aufgrund der Angaben „die Hälfte“, „ein Viertel“ und „ein Sechstel“ muss die Gesamtanzahl durch zwei, vier und sechs teilbar sein. Daher ist sinnvoll, die Aufgabe mit Zahlen, die durch zwölf teilbar sind, zu lösen. Nun kann eine Tabelle angelegt werden. Dabei werden je eine Spalte für die Gesamtanzahl der Zuschauerinnen und Zuschauer, die Anzahl der Kinder, der Mütter und der Väter und eine zur Kontrolle angelegt. In der folgenden Tabelle wird versucht, das Aufgabenbeispiel zu lösen, indem mit der Gesamtanzahl 120 begonnen wird.

Gesamtanzahl der Zuschauerinnen und Zuschauer	Anzahl der Kinder	Anzahl der Mütter	Anzahl der Väter	Summe nach Aufteilung
120	$60 + 1 = 61$	$30 + 2 = 32$	$20 + 3 = 23$	116
108	$54 + 1 = 55$	$27 + 2 = 29$	$18 + 3 = 21$	105
96	$48 + 1 = 49$	$24 + 2 = 26$	$16 + 3 = 19$	94
84	$42 + 1 = 43$	$21 + 2 = 23$	$14 + 3 = 17$	83
72	$36 + 1 = 37$	$18 + 1 = 19$	$12 + 3 = 15$	72

Tabelle 2: Systematisches Probieren beim Aufgabenbeispiel: *Im Puppentheater* mithilfe einer Tabelle (vgl. Bardy, 2007, S. 146)

Diese Tabelle kann als Anlass genutzt werden, um mit mathematisch begabten Kindern über die erkannten Zahlstrukturen zu sprechen. Dadurch sollen sie auch zur Erkenntnis kommen, dass 72 die einzige Lösung sein kann. Die Antwort auf die Frage der Aufgabenstellung lautet also wie folgt: Im Puppentheater waren 37 Kinder, 19 Mütter und 15 Väter (vgl. Bardy, 2007, S. 145f).

5.2.2 Vorwärtsarbeiten

Bei dieser Strategie ist eine Ausgangssituation gegeben und das Ziel wird angestrebt. Dabei wird versucht, möglichst viele Eigenschaften über die Ausgangssituation ausfindig zu machen. Typische Fragen, die Grundschulkindern beim Vorwärtsarbeiten helfen, sind: „Was ist gegeben, was weiß ich über das Gegebene? Was kann ich aus den Angaben ermitteln, ableiten, schlussfolgern, berechnen?“ (Grundschulunterricht Mathematik, 2019, S. 7)

Aufgabenbeispiel: Magisches Quadrat

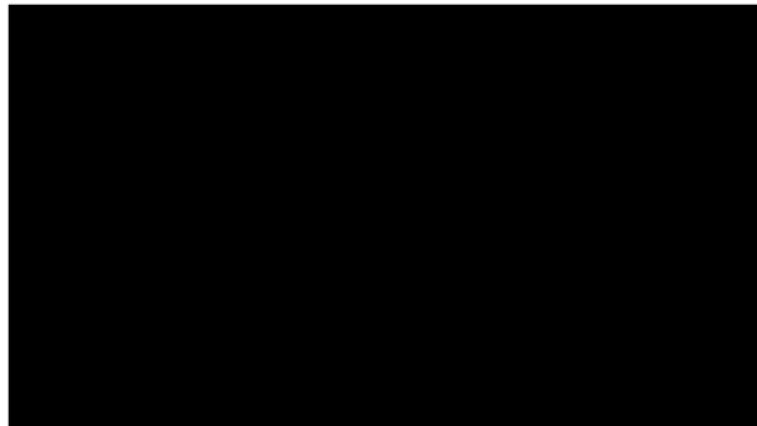


Abbildung 20: Aufgabenbeispiel: Magisches Quadrat (BIFIE, 2013, S. 42)

In einem magischen Quadrat muss die Anordnung der Zahlen folgende Bedingung erfüllen: Die Summen der Zahlen jeder Zeile, Spalte und Diagonale müssen immer gleich groß sein. Bei dem abgebildeten Aufgabenbeispiel muss die Summe immer 34 ergeben. Die Zahlen reichen lückenlos von $n=1$ bis n^2 , also in diesem Fall von 1 bis 16.

Bei der Arbeit mit solchen Quadraten sollen die Kinder selbst auf die eben genannte Bedingung kommen, indem ihnen fertig ausgefüllte Quadrate gezeigt werden. Dabei reflektieren sie auch darüber, ob verschiedene Anordnungen der Zahlen möglich sind. Genauso sollen sie herausfinden, dass die Quadrate gedreht beziehungsweise gespiegelt werden können, um unterschiedliche magische Quadrate mit denselben Zahlen zu erhalten (vgl. BIFIE, 2013, S. 61). Diese verschiedenen Möglichkeiten sind in der folgenden Abbildung dargestellt.

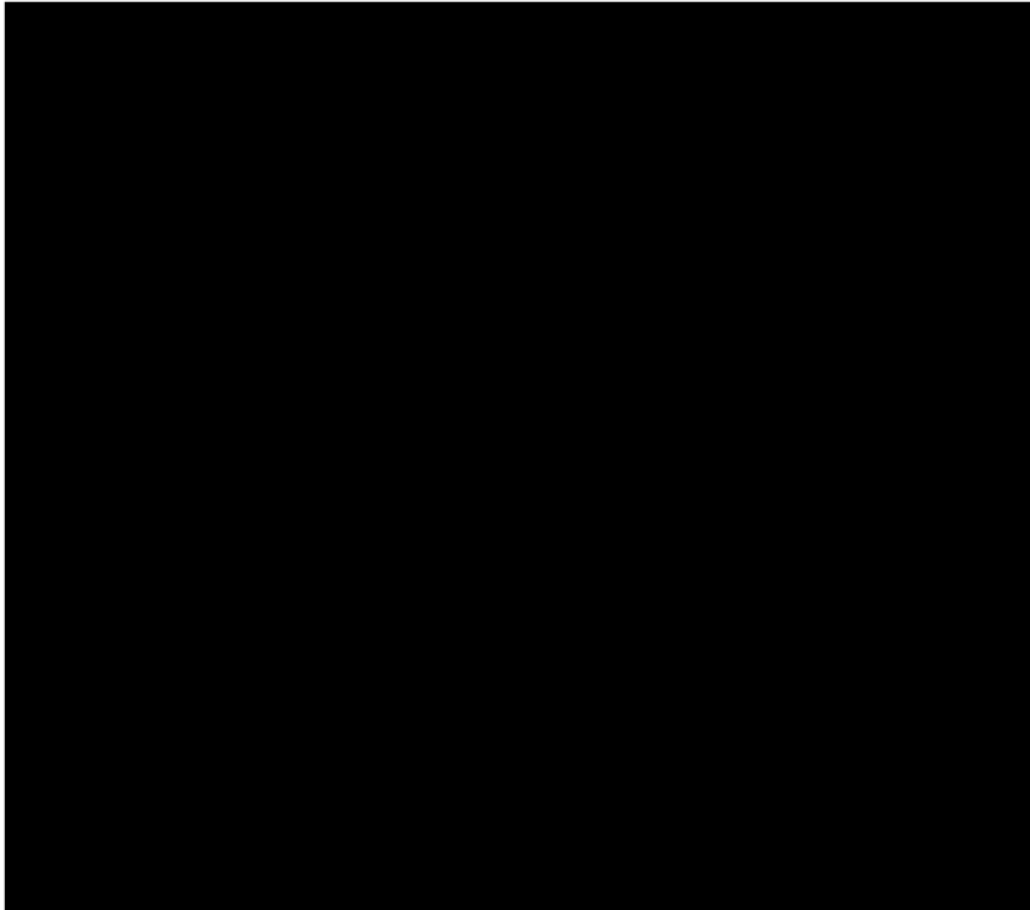


Abbildung 21: Unterschiedliche Anordnungen der Zahlen bei einem 3x3-Quadrat (BIFIE, 2013, S. 61)

5.2.3 Rückwärtsarbeiten/Rückwärtsrechnen

Beim Rückwärtsarbeiten ist die Endsituation gegeben. Dabei stellt sich die Frage, beziehungsweise wie begonnen werden muss, um zur Endsituation zu gelangen. Bardy (2007) beschreibt folgende Fragen, die für das Rückwärtsarbeiten charakteristisch sind: „Woraus lässt sich die Endgröße unmittelbar berechnen? Woraus lässt sich die Behauptung unmittelbar ableiten? Unter welchen Voraussetzungen stellt sich die Endsituation ein? Welche vorgängigen Situationen führen zur Endsituation? Welche Hilfsmittel können dienlich sein?“ (S. 141). In der Grundschule kommt meist eine besondere Form des Rückwärtsarbeitens vor, nämlich das Rückwärtsrechnen. Die Endsituation ist dabei eine Zahl oder Größe. Wie die Endsituation erreicht werden kann, wird in der Aufgabenstellung beschrieben. Gesucht ist immer die Startzahl oder die Größe, mit der begonnen werden muss. Im Folgenden wird ein Beispiel nach Bardy (2007, S. 148) beschrieben, bei dem im Anschluss die Vorgehensweise des Rückwärtsarbeitens angewendet wurde.

1. Aufgabenbeispiel: Goldmünzen

Ein Müller hinterließ seinen drei Söhnen nach seinem Tod 24 Goldmünzen. Jeder seiner Söhne sollte so viele Münzen erhalten, wie er vor fünf Jahren an Lebensjahren gezählt hat. Der jüngste Bruder schlug vor: „Ich behalte die Hälfte der Münzen, die ich vom Vater bekommen habe und verteile die andere Hälfte gerecht an euch beide.“ So soll auch der mittlere Bruder nach einer neuen Verteilung und letztlich auch der älteste Bruder nach einer neuen Verteilung vorgehen. Die Brüder stimmen dem jüngsten zu. Somit haben am Ende alle drei Brüder dieselbe Anzahl an Goldmünzen. Bestimme das Alter der Brüder!

Die Vorgehensweise eines Buben in Bardy (2007, S. 149) wird in der folgenden Abbildung dargestellt:

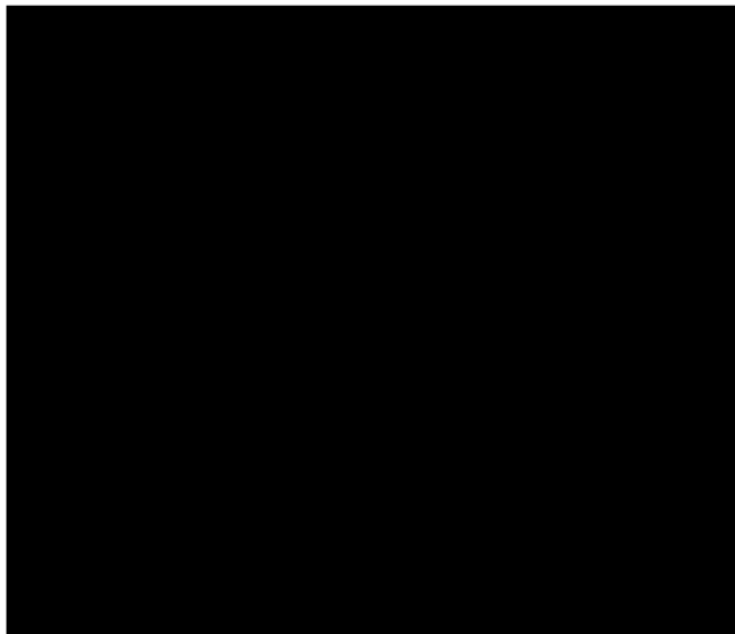


Abbildung 22: Anwendung des Rückwärtsarbeitens mit der Vorgehensweise eines Buben zum Aufgabenbeispiel: *Goldmünzen* (Bardy, 2007, S. 149)

Der Bub wendet die Strategie des Rückwärtsarbeitens an. Er geht von der vorgegebenen Endsituation, dass jeder gleich viele Münzen hat, aus. Daraus ergibt sich die Anzahl der Münzen pro Person, also $24 : 3 = 8$. Er schaut sich den Zustand vor der Verteilung durch den ältesten Bruder genau an. Dieser hat im Vergleich zum Endzustand doppelt so viele Goldmünzen, also 16. Die acht zusätzlichen Münzen kommen jeweils zur Hälfte vom jüngsten und vom mittleren Bruder. Beide hatten daher vor der Verteilung je vier Münzen. Bevor der mittlere Bruder seine Münzen verteilt hat, sah die Aufteilung so aus: 2; 8 (das Doppelte von 4); 14. Vor der Verteilung durch den jüngsten Bruder sah sie folgendermaßen aus: 4 (das Doppelte von 2); 7; 13. Daraus kann auf das tatsächliche Alter der Brüder geschlossen werden. Zu den Münzen müssen immer fünf Jahre dazugezählt werden, um auf das Alter zu kommen. Der jüngste Bruder

ist daher neun, der mittlere Bruder zwölf und der älteste Bruder 18 Jahre alt (vgl. Bardy, 2007, S. 148f).

2. Aufgabenbeispiel: Zwetschken pflücken

Stefan hat am Sonntag Zwetschken gepflückt. Von Montag bis Freitag nimmt er jeden Tag drei Stück mit in die Schule. Am Samstag hat er noch zehn Zwetschken zu Hause. Wie viele Zwetschken hat Stefan gepflückt? (vgl. Grundschulunterricht Mathematik, 2019, S. 7)

Auch bei diesem Aufgabenbeispiel wird die heuristische Strategie des Rückwärtsarbeitens angewendet, um zu einer Lösung zu kommen. Da Stefan am Samstag noch zehn Zwetschken übrig hat, müssen Kinder, die diese Aufgabe bewältigen wollen, für jeden Schultag drei Zwetschken addieren. Daraus ergibt sich, dass Stefan am Sonntag insgesamt 25 Zwetschken gepflückt haben muss.

5.2.4 Umstrukturieren

Umstrukturieren einer vorgegebenen Situation oder einer mathematischen Problemstellung bietet sich dann an, wenn die vordergründige oder nahe liegende Struktur keinen unmittelbaren oder nur einen sehr aufwändigen Lösungsweg erkennen lässt. Andere Anordnungen von Zahlen oder Größen als die vorgegebene Anordnung können Strukturen sichtbar machen, die sonst nicht ersichtlich sind. (Bardy, 2007, S. 141)

Auch die Übersetzung eines arithmetischen Problems in eine geometrische Konfiguration und deren Veränderung können Lösungswege für die Ausgangssituation zulassen (vgl. Bardy, 2007, S. 141).

1. Aufgabenbeispiel: Fingerzählen

An einer Hand wird beim Daumen beginnend vorwärts gezählt: Daumen 1, Zeigefinger 2, Mittelfinger 3, Ringfinger 4, kleiner Finger 5. Dann wieder rückwärts: Ringfinger 6, Mittelfinger 7, Zeigefinger 8, Daumen 9. Nun wieder vorwärts und immer so weiter. Welcher Finger wird die Zahl 2 002 haben? Beschreibe genau, wie du zur Lösung gekommen bist!

In der Abbildung 23 wird die Vorgehensweise eines Buben mithilfe des Strukturierens dargestellt.

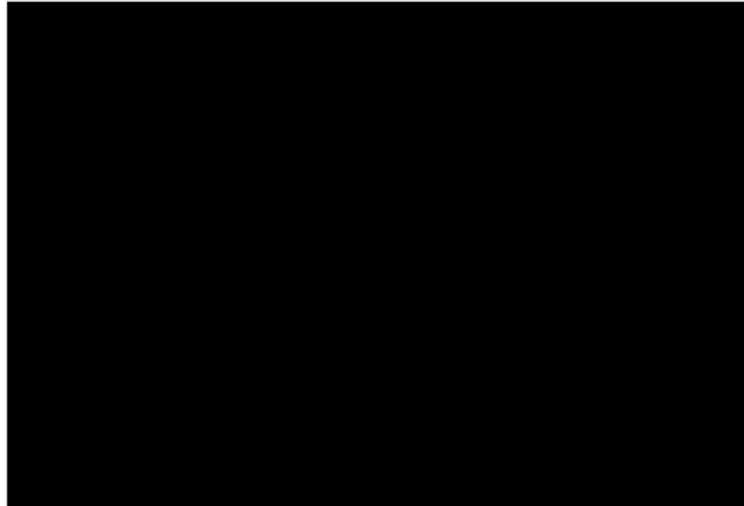


Abbildung 23: Vorgehensweise eines Buben beim Lösen des Aufgabenbeispiels: *Fingerzählen* mithilfe des Umstrukturierens (Bardy, 2007, S. 150)

Der Bub hat erkannt, dass bei einem Durchlauf vom Daumen zum kleinen Finger und wieder zurück zum Daumen immer um 8 weitergezählt werden muss. Um leichter auf die Antwort zu kommen, strukturiert er die vorgegebene Zählweise um und beginnt mit 0 statt 1 beim Daumen zu zählen. So kommt der Bub durch wenige Denkvorgänge auf die Lösung, dass der Zeigefinger die Zahl 2 002 sein muss (vgl. Bardy, 2007, S. 149f).

2. Aufgabenbeispiel: Addition aller Zahlen von 1 bis 60

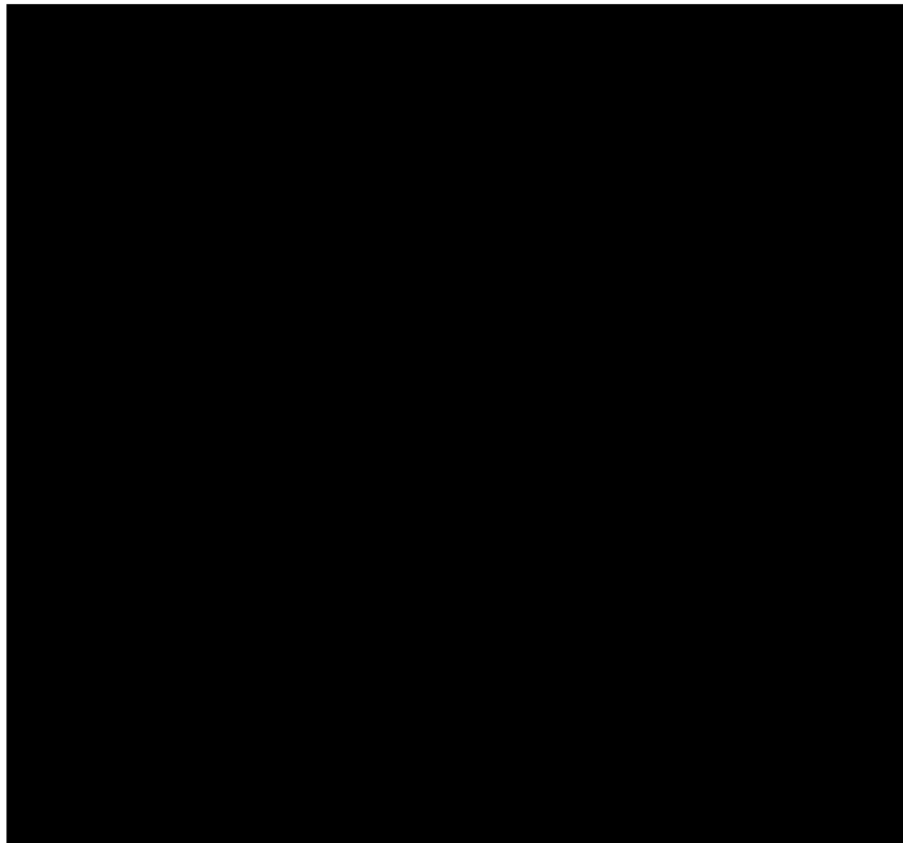


Abbildung 24: Vorgehensweise eines Kindes beim Aufgabenbeispiel: *Addition aller Zahlen von 1 bis 60* (BIFIE, 2013, S. 44)

Bei diesem Beispiel haben Kinder die Aufgabe, alle Zahlen von 1 bis 60 zu addieren. Dabei ist eine systematische Vorgehensweise von Vorteil. Das Umstrukturieren erfolgt in diesem Fall, indem das Kind, dessen Vorgehensweise in Abbildung 24 gezeigt wird, zwei sich auf zehn ergänzende Zahlen auswählt und diese zusammenfasst. Das Kind schreibt die Additionen für jeden Zehner einzeln auf und addiert anschließend die Einer, die zusammen zehn ergeben. Die bereits verwendeten Zahlen werden abgehakt (vgl. BIFIE, 2013, S. 44).

5.2.5 Benutzen von Variablen

Begabte Grundschülerinnen und Grundschüler benutzen oft von selbst Variablen für bestimmte Zahlen oder Größen. Dies können Wort- oder Buchstabenvariablen sein. Jene begabten Kinder haben vermutlich durch ältere Geschwister oder ihre Eltern erkannt, dass die Übersetzung der natürlichen Sprache in eine Symbolsprache bei der Lösung von Problemaufgaben besonders hilfreich sein kann (vgl. Bardy, 2007, S. 141).

Aufgabenbeispiel: Vögel auf den Bäumen

Auf drei Bäumen sitzen insgesamt 56 Vögel. Nachdem vom ersten Baum sieben Vögel auf den zweiten und dann fünf Vögel vom zweiten auf den dritten Baum geflogen waren, saßen nun doppelt so viele Vögel auf dem zweiten Baum wie auf dem ersten. Auf dem dritten Baum saßen doppelt so viele Vögel wie auf dem zweiten Baum. Ermittle, wie viele Vögel ursprünglich auf jedem der Bäume saßen!

Die Vorgehensweise eines Mädchens, das die Aufgabe durch die Nutzung von Variablen lösen konnte, ist im Folgenden abgebildet.

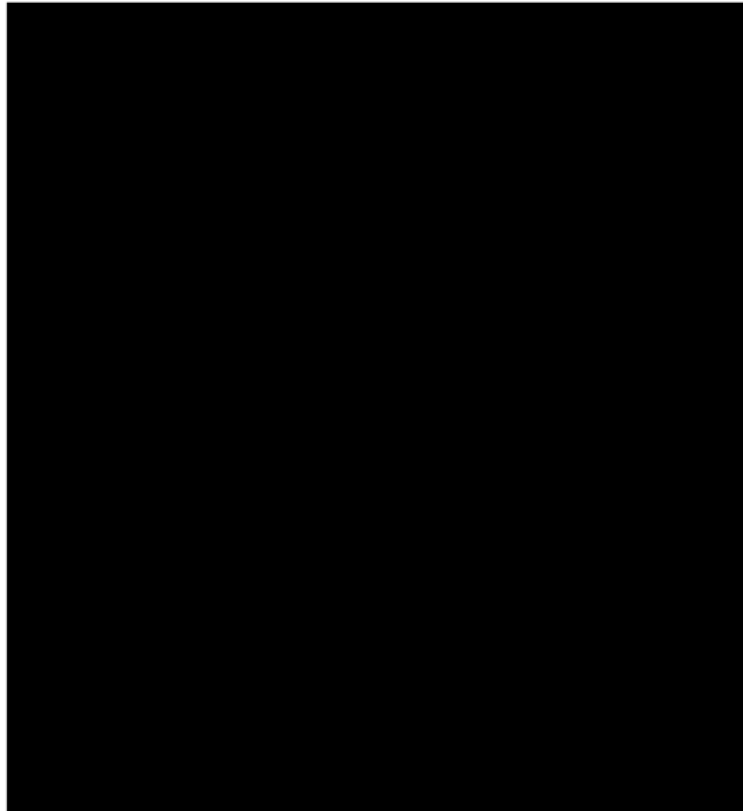


Abbildung 25: Vorgehensweise eines Mädchens beim Aufgabenbeispiel: *Vögel auf den Bäumen* mithilfe von Wortvariablen (Bardy, 2007, S. 151)

In der Abbildung ist sichtbar, dass das Mädchen die Wortvariable *Menge* verwendet. Diese nutzt es, um auszudrücken, wie viele Mengen sich nach dem Platzwechsel der Vögel auf den jeweiligen Bäumen befinden. Es geht von der momentanen Anzahl der Vögel auf dem ersten Baum aus und ist fähig, eine Gleichung der Variable *Menge* zu notieren, aus der das Mädchen einfach die passende Lösung ermitteln kann. Um die gesuchten Anzahlen zu bestimmen, verwendet es die Strategie des Rückwärtsrechnens. Es kommt zu dem Ergebnis, dass am Anfang 15 Vögel auf dem ersten, 14 Vögel auf dem zweiten und 27 Vögel auf dem dritten Baum saßen (vgl. Bardy, 2007, S. 151f).

5.2.6 Suchen nach Beziehungen und Aufstellen von Gleichungen oder Ungleichungen

Die Beziehungen, welche durch das Verwenden von Variablen erkannt wurden und sich in Form von Gleichungen oder Ungleichungen darstellen lassen, können weiter vereinfacht werden. Diese Vorgehensweise ermöglicht ein effektives Lösen von mathematischen Problemaufgaben. Im Folgenden wird ein Aufgabenbeispiel nach Bardy (2007, S. 152) vorgestellt.

Aufgabenbeispiel: Erdäpfelsäcke

In fünf Säcken befindet sich jeweils die gleiche Anzahl von Erdäpfeln. Nimmt jemand aus jedem Sack 12kg heraus, dann bleiben in allen Säcken zusammen so viele Erdäpfel übrig, wie vorher in zwei Säcken waren. Wie viel kg Erdäpfel waren anfangs in jedem Sack?

Bardy (2007, S. 152) zieht für die Erklärung des Beispiels die Vorgehensweise eines zehnjährigen Mädchens heran. Es löst die Aufgabe mithilfe von Variablen und Gleichungen, wobei diesem die Verwendung von Variablen eigentlich noch nicht bekannt ist. Es schreibt:

$$x5 - (12 \cdot 5) = x5 - 60 = x2$$

$$60 = x3$$

$$60:3 = 20$$

$$x = 20$$

Obwohl das Mädchen nicht verschriftlicht, was x sein soll, auch keine Antwort auf die Frage gibt und die Reihenfolge des Koeffizienten und der Variable ungewöhnlich ist, beweist seine Vorgehensweise, dass solche Aufgabenbeispiele bereits von manchen zehnjährigen Schülerinnen und Schülern durch Gleichungen und die Nutzung von Buchstabenvariablen gelöst werden können.

5.2.7 Analogieprinzip

Beim Analogieprinzip wird die Struktur einer Aufgabe auf eine bereits bekannte Lösungsstruktur zurückgeführt. Lernende versuchen, Gemeinsamkeiten zwischen der neuen und einer bereits bekannten Aufgabenstellung herzustellen. Diese Gemeinsamkeiten werden anschließend für die Lösungsfindung des neuen Aufgabenbeispiels verwendet (vgl. BIFIE, 2013, S. 47). Das Analogieprinzip wird häufig „bei der Bildung neuer Zahlen während der Erschließung neuer Zahlenräume oder bei der Übertragung der Grundaufgabe auf höhere Zahlenräume ($3 + 4 = 7$; dann ist $30 + 40 = 70$)“ (Grundschulunterricht Mathematik, 2019, S. 7) angewendet. Folgende Fragen oder Impulse sind bei solchen Aufgaben hilfreich: „Was kommt dir an dieser Aufgabe bekannt vor? Hast du schon eine ähnliche Aufgabe gelöst? Wie bist du bei einer ähnlichen Aufgabe vorgegangen?“ (BIFIE, 2013, S. 47)

1. Aufgabenbeispiel: Bilden von Zahlen aus Ziffern

Welche dreistelligen Zahlen kannst du mit den Ziffern 6, 8 und 3 bilden? Du darfst jede Ziffer nur einmal verwenden (vgl. BIFIE, 2013, S. 47).



Abbildung 26: Vorgehensweise eines Mädchens beim Aufgabenbeispiel: *Bilden von Zahlen aus Ziffern* (BIFIE, 2013, S. 7)

In der obigen Abbildung ist erkennbar, dass das Mädchen zuerst mit der Ziffer 3 als Hunderter begonnen hat und dann die Ziffern des Einers und des Zehners vertauscht hat. Anschließend hat es dasselbe mit den Ziffern 6 und 8 als Hunderterstelle gemacht.

Beim folgenden Beispiel wurde das Analogieprinzip angewendet, indem eine Beziehung zur eben beschriebenen Aufgabe hergestellt wurde:

Bilde aus den Ziffern 5, 3, 6 und 8 alle vierstelligen Zahlen, die größer als 7 000 sind! Jede der Ziffern darf dabei nur einmal vorkommen (vgl. BIFIE, 2013, S. 48).

Bei dieser Aufgabe wird die Vorgehensweise für die Lösungsfindung von der vorherigen Aufgabenstellung übernommen, um alle vierstelligen Zahlen, die größer als 7 000 sind, zu finden. Die Lernenden müssen also darauf kommen, dass an der Tausenderstelle die Ziffer 8 stehen muss und die restlichen Ziffern abwechselnd an anderen Stellenwerten ihren Platz finden.

2. Aufgabenbeispiel: Bauernhof

Auf einem Bauernhof sind Pferde, Kühe und Schafe. Zusammen sind das mehr als 90, aber weniger als 100 Tiere. Auf dem Hof sind doppelt soviel Kühe wie Pferde und viermal soviel Schafe wie Kühe. Wie viele Pferde, Kühe und Schafe sind auf dem Bauernhof?

Genauso wie das erste Aufgabenbeispiel lässt sich auch dieses lösen. Im Vergleich zur Anzahl der Pferde sind doppelt soviel Kühe und achtmal soviel Schafe auf dem Bauernhof. Die Gesamtanzahl ist daher das Elffache der Anzahl der Pferde: $1 + 2 + 8 = 11$. 99 ist die einzige Zahl zwischen 90 und 100, die durch 11 teilbar ist: $99 : 11 = 9$. Auf dem Bauernhof sind daher neun Pferde, 18 Kühe und 72 Schafe.

Analoge Aufgaben sollten des Öfteren im Zuge des Förderprozesses bearbeitet werden, um das Prinzip dahinter zu verstehen. Allerdings sollten diese in Maßen angeboten werden, da viele Aufgaben desselben Typs schnell zur Demotivation führen können. Begabte Kinder fühlen sich dadurch rasch unterfordert (vgl. Bardy, 2007, S. 153).

5.2.8 Symmetrieprinzip

Bei der Anwendung des Symmetrieprinzips suchen begabte Grundschülerinnen und Grundschüler in der durch die Aufgabe vorgegebenen Situation Symmetrien und stellen sich dabei folgende Fragen: „Kann ich die Aufgabe unter Ausnutzung der entdeckten Symmetrie(n) lösen bzw. einen eleganteren Lösungsweg als bei Vernachlässigung der Symmetrieeigenschaft(en) finden?“ (Bardy, 2007, S. 142)

Aufgabenbeispiel: Natürliche Zahlen

Die Summe dreier natürlicher Zahlen beträgt 57. Die erste dieser Zahlen ist um 3 kleiner und die dritte um 3 größer als die zweite. Wie lauten diese Zahlen? Notiere auch deine Lösungsschritte!

Aufgrund dessen, dass die erste gesuchte Zahl um 3 kleiner und die dritte um 3 größer als die zweite ist, muss die Summe der drei Zahlen das Dreifache der zweiten Zahl sein. Da eine Zahl um 3 kleiner und die andere um 3 größer ist, gleicht sich dies aus. Die zweite Zahl ist daher $57:3 = 19$. Die erste Zahl beträgt $19 - 3 = 16$ und die dritte Zahl $19 + 3 = 22$ (vgl. Bardy, 2007, S. 153).

5.2.9 Invarianzprinzip

Bruder und Müller (1990) beschreiben, dass bei der Anwendung des Invarianzprinzips im Vordergrund stehe „Größen, Eigenschaften oder funktionale Beziehungen zu erkennen, die konstant bzw. allen Größen oder Beziehungen gemeinsam sind. Andererseits kann man aber auch versuchen, Invarianten künstlich zu erzeugen durch Festhalten einer Größe oder Eigenschaft durch Variation der anderen Größen, Eigenschaften oder Beziehungen.“ (S. 881) Invarianz beschreibt also die Unveränderlichkeit. Dieses Prinzip kann dann bei einer mathematischen Aufgabe angewendet werden, wenn etwas gleich bleibt. Diese Gleichheit muss erkannt werden (vgl. Grundschulunterricht Mathematik, 2019, S. 7). Im folgenden Beispiel bleibt die Differenz zwischen dem Alter der Mutter und der Tochter immer gleich.

Aufgabenbeispiel: Alter

Als die Mutter 27 Jahre alt war, war ihre Tochter 8 Jahre alt. Jetzt ist die Tochter halb so alt wie die Mutter. Wie alt sind die beiden?

Der Altersunterschied zwischen der Mutter und der Tochter bleibt immer gleich, also invariant. Die Mutter ist immer um 19 Jahre älter als die Tochter. Wenn die Mutter also doppelt so alt wie die Tochter ist, muss die Tochter 19 Jahre und die Mutter 38 Jahre alt sein (vgl. Grundschulunterricht Mathematik, 2019, S. 7).

5.2.10 Extremalprinzip

Wenden Schülerinnen und Schüler beim Lösen von Problemaufgaben das Extremalprinzip an, so werden zur Lösung des Problems extreme Fälle herangezogen, wie zum Beispiel minimale oder maximale Elemente einer Menge, Sonder- oder Spezialfälle, die Betrachtung von Randfällen oder auch extremale Beziehungen. Beim Betrachten von Randfällen sind Fragen wie „Was wäre, wenn ...?“ typisch (vgl. Bardy, 2007, S. 143).

Aufgabenbeispiel: Haustiere

Oma Rosi hat 24 Haustiere, nämlich Meerschweinchen und Vögel. Diese Tiere haben zusammen 56 Beine. Wie viele Meerschweinchen und Vögel hat Oma Rosi als Haustiere?

Um das Aufgabenbeispiel zu lösen, müssen Lernende zuerst erkennen, dass Vögel zwei und Meerschweinchen vier Beine haben. Jedes Tier muss also mindestens zwei Beine haben. Kinder können also auf jedes Tier zwei Beine verteilen. So wären das insgesamt 48 Beine. Acht Beine würden schließlich noch übrig bleiben. Diese können auf vier der 24 Tiere verteilt werden. Demnach gibt es vier Tiere mit vier und 20 Tiere mit zwei Beinen. Oma Rosi hat also vier Meerschweinchen und 20 Vögel (vgl. BIFIE, 2013, S. 50f).

5.2.11 Zerlegungsprinzip

Dieses Prinzip kann Kinder vor allem beim Lösen von schwierigen Aufgaben unterstützen. Dabei stellt sich die Frage, wie die Aufgabenstellung oder der mathematische Sachverhalt möglichst geschickt zerlegt oder aufgeteilt werden kann (vgl. Bardy, 2007, S. 143).

Aufgabenbeispiel: Teilbarkeit von Zahlen

Zeige, dass die Summe von fünf Zahlen, die alle bei der Division durch 5 denselben Rest haben, immer durch 5 teilbar sind.

Um diese Anforderung zu erfüllen, wird das Problem in fünf mögliche Fälle zerlegt:

1. Fall: Alle fünf Zahlen haben bei der Division durch 5 0 Rest. In diesem Fall sind alle fünf Zahlen und daher auch die Summe dieser fünf Zahlen durch 5 teilbar.
2. Fall: Alle fünf Zahlen haben bei der Division durch 5 1 Rest. Daher ergibt sich für die Summe:

$$\begin{aligned}(a + 1) + (b + 1) + (c + 1) + (d + 1) + (e + 1) &= \\ a + b + c + d + e + 5 \cdot 1 &= a + b + c + d + e + 5\end{aligned}$$

a, b, c, d und e sind durch 5 teilbar. Daher ist die Summe auch durch 5 teilbar.

3. Fall: Alle fünf Zahlen haben bei der Division durch 5 2 Rest. Daher gilt:

$$\begin{aligned}(a + 2) + (b + 2) + (c + 2) + (d + 2) + (e + 2) &= \\ a + b + c + d + e + 5 \cdot 2 &= a + b + c + d + e + 10\end{aligned}$$

Die weitere Argumentation gleicht der des zweiten Falls.

4. Fall: Alle fünf Zahlen haben bei der Division durch 5 3 Rest. Daher gilt:

$$\begin{aligned}(a + 3) + (b + 3) + (c + 3) + (d + 3) + (e + 3) &= \\ a + b + c + d + e + 5 \cdot 3 &= a + b + c + d + e + 15\end{aligned}$$

Die weitere Argumentation gleicht der des zweiten Falls.

5. Fall: Alle fünf Zahlen haben bei der Division durch 5 4 Rest. Daher gilt:

$$\begin{aligned}(a + 4) + (b + 4) + (c + 4) + (d + 4) + (e + 4) &= \\ a + b + c + d + e + 5 \cdot 4 &= a + b + c + d + e + 20\end{aligned}$$

Die weitere Argumentation gleicht der des zweiten Falls.

5.3 Förderschwerpunkt: Argumentieren und Begründen

Da das Argumentieren und Begründen von Denk- und Lösungsschritten eine wichtige Rolle bei begabten Schülerinnen und Schülern spielt, werden in diesem Kapitel die beiden Begriffe *Argumentieren* und *Begründen* zuerst kurz erläutert. Anschließend werden Beispiele beschrieben, welche die Fähigkeit des Argumentierens und Begründens fördern.

5.3.1 Bedeutung der Begriffe *Argumentieren* und *Begründen*

Argumentieren wird als geistige Tätigkeit in mündlicher oder schriftlicher Form verstanden und hat das Ziel, die Zustimmung oder den Widerspruch einer Gesprächspartnerin oder eines Gesprächspartners zu einer Norm oder einer Aussage zu erhalten, indem Schritt für Schritt der

Rückgang auf bereits anerkannte Normen oder Aussagen angestrebt wird. Jede Zustimmung zu einer Norm oder einer Aussage, die sich im Verlauf des Gesprächs ergeben hat, charakterisiert einen Schritt zur Argumentation (vgl. Mittelstraß, 2004, S. 161). Wird eine theoretische Behauptung aufgestellt, muss diese anschließend begründet werden. Das bedeutet, dass der Behauptung von allen vernünftig argumentierenden Gesprächspartnerinnen und Gesprächspartnern zugestimmt werden muss (vgl. Bardy, 2007, S. 161).

5.3.2 Aufgabenbeispiele zur Förderung des Argumentierens und Begründens

Im Folgenden werden zwei Aufgabenbeispiele angeführt, welche die Fähigkeit des Argumentierens und Begründens von mathematisch begabten Grundschulkindern fördern sollen.

1. Aufgabenbeispiel: Kleinste und größte Zahl

Für die Zahlen a, b, c, d und e gilt:

$$a - 1 = b + 2 = c - 3 = d + 4 = e - 5$$

Welche dieser Zahlen ist die größte und welche die kleinste Zahl? Begründe deine Behauptung!

Die Lösungserwartung lautet wie folgt: Aufgrund der Gleichheitszeichen ist jene Zahl am größten, von der die größte Zahl subtrahiert wird, also e . Jene Zahl ist am kleinsten, zu der die größte Zahl addiert wird, also d (vgl. Bardy, 2007, S. 167).

2. Aufgabenbeispiel: Maximum und Minimum bilden

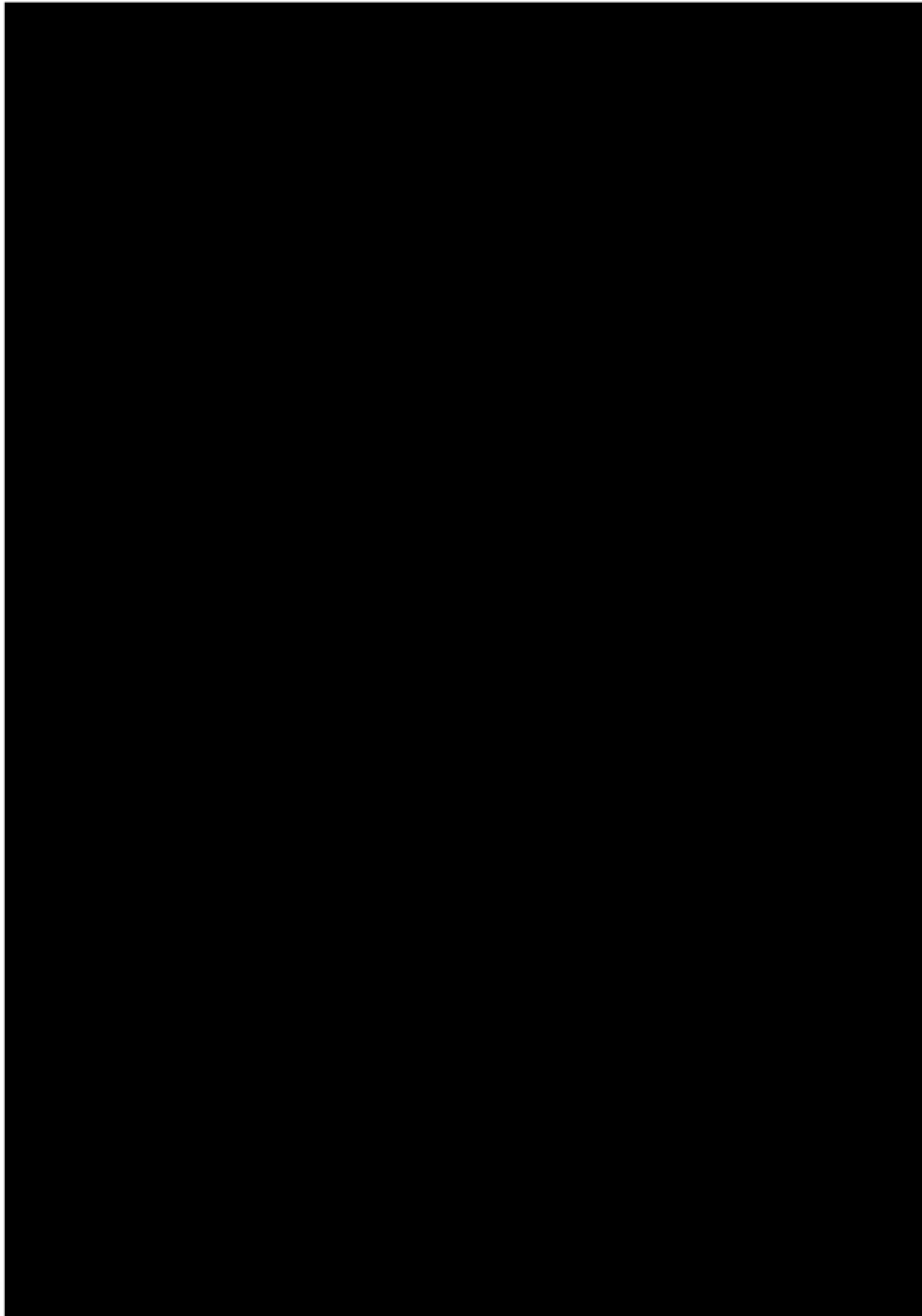


Abbildung 27: Aufgabenbeispiel: Maximum und Minimum bilden (Böhmer, 2006, S. 35)

Bei diesem Aufgabenbeispiel müssen Lernende aus vorgegebenen Ziffern zwei dreistellige Zahlen bilden, die zuerst eine möglichst große und danach eine möglichst kleine Summe ergeben. Ihre Vorgehensweise müssen sie anschließend begründen.

Eine mögliche Begründung bei 1b) ist, dass die beiden größten Ziffern an der Hunderterstelle und die beiden kleinsten Ziffern an der Einerstelle stehen müssen. Dadurch kann die größtmögliche Summe, nämlich 1 804, entstehen. Bei 2) muss genau andersherum vorgegangen werden. Für eine möglichst kleine Summe müssen aus den Ziffern die zwei kleinsten Summanden gebildet werden. Dafür stehen an der Hunderterstelle die beiden kleinsten Ziffern, an der Einerstelle die beiden größten (vgl. Böhmer, 2006, S. 36).

5.4 Förderschwerpunkt: Beweisen

Die Mathematik ist von Beweisen geprägt, denn nur durch einen Beweis können allgemein gültige Aussagen getroffen werden. Im Folgenden wird vor allem Bezug auf das Beweisen in der Grundschule genommen. Wie die Fähigkeit des Beweisens gefördert werden kann, wird im Anschluss an die Begriffserläuterung beschrieben.

5.4.1 Bedeutung des Beweisens in der Grundschule

Laut Bardy (2007, S. 161f) steht der Begriff *Beweis* in einer engen Verbindung zu den Begriffen *Argumentieren* und *Begründen*. Etwas zu beweisen bedeutet, eine aufgestellte Behauptung zu begründen. In diesem Prozess ist eine Behauptung erst bewiesen, wenn sich die oder der Behauptende gegen jeden möglichen Einwand verteidigen kann.

Doch wann ein Beweis tatsächlich als solch einer gilt und welche Behauptungen Schülerinnen und Schüler der Primarschule überhaupt beweisen können, ist fraglich. Sowohl Dreyfus (2002) als auch Drösser (2006) finden schwierig zu bestimmen, wann eine mathematische Aussage oder Behauptung auf gültige Weise, also im Zuge eines Beweises, hergeleitet wurde. Genauso sei fragwürdig, wer einen Beweis als allgemein gültig und richtig bestimmen kann. Wittmann und Müller (1988) sind der Meinung, in der Grundschule inhaltlich-anschauliche Beweise zu führen und haben auf dieses Problem folgende Antwort: „Inhaltliche-anschauliche, operative Beweise stützen sich [...] auf Konstruktionen und Operationen, von denen intuitiv erkennbar ist, daß [sic] sie sich auf eine ganze Klasse von Beispielen anwenden lassen und bestimmte Forderungen nach sich ziehen.“ (S. 249) Beweise, die in der Grundschule geführt werden sollen, benötigen in der Regel einfache und kurze Überlegungen. Welche Arten von Beweisformen im Arbeiten mit Kindern eingesetzt werden können, wird im Folgenden kurz beschrieben.

Ein Beweis kann zum einen auf der *formal symbolischen Ebene* stattfinden, bei der der mathematische Sachverhalt mit Variablen und Gleichungen dargestellt wird. Des Weiteren kann er *zeichnerisch diagrammatisch* geführt werden. In diesem Fall wird das Problem mithilfe einer Zeichnung oder eines Diagramms dargestellt. Genauso ist möglich, einen Beweis *operativ* zu

führen. Dabei wird auf Operationen zurückgegriffen, um eine allgemein gültige Aussage treffen zu können. Einen Beweis auf der *verbalen Ebene* aufzustellen, bedeutet, die Beweisführung in Worten wiederzugeben beziehungsweise aufzuschreiben. Weiters besteht die Möglichkeit, einen Beweis *generisch* zu führen. Unter einem *generischen Beweis* versteht Bardy (2007, S. 173) eine allgemeine Begründung, die an einem Beispiel überprüft wird. Bei der *induktiven Beweisführung* wird zuerst vom kleinsten Element ausgegangen, an dem die Aussage geprüft wird, um anschließend den Beweis mit dem nächstgrößeren Element durchzuführen. Ein *kontextueller Beweis* wird so geführt, dass der mathematische Sachverhalt in einen bestimmten Kontext gebracht und dadurch bewiesen wird. Diese verschiedenen Arten von Beweisführungen sollten bei der Förderung mathematisch begabter Grundschulkinder unbedingt behandelt werden, um ein Verständnis gegenüber mathematischen Problemen aufzubauen (vgl. Bardy, 2007, S. 171ff).

5.4.2 Aufgabenbeispiele zur Förderung der Beweisführung

In Bezug auf die unterschiedlichen Arten von Beweisführungen werden im Folgenden zwei Aufgabenbeispiele für Schülerinnen und Schüler der Grundstufe II vorgestellt, die verbal und formal symbolisch bewiesen werden.

1. Aufgabenbeispiel: Gerades Produkt

Ist die Summe aus vier Zahlen eine ungerade Zahl, dann ist ihr Produkt eine gerade Zahl. Beweise diesen Satz!

Der Beweis wird verbal geführt: „Wenn alle vier Zahlen ungerade wären, so wäre die Summe gerade. Also muss unter den vier Zahlen mindestens eine gerade vorkommen.“ (Bardy, 2007, S. 175) Dann ist das Produkt eine gerade Zahl.

2. Aufgabenbeispiel: Differenz zweier ungerader Zahlen

Die Differenz zweier ungerader Zahlen sei gleich 8. Beweise, dass solche Zahlen unter der Bedingung keinen gemeinsamen Teiler größer als 1 haben!

Folgende Beweisführung findet formal symbolisch statt:

Die Zahlen a und b sind ungerade; und es gilt: $a - b = 8$. Hätten a und b einen gemeinsamen Teiler größer als 1, so müsste dieser auch Teiler von $a - b$, also auch von 8 sein. Teiler von 8 sind außer 1 nur 2, 4 und 8. 2, 4 und 8 sind aber alle gerade und können deshalb nicht Teiler von a und b sein, da a und b ungerade sind. (Bardy, 2007, S. 175)

5.5 Förderschwerpunkt: Erkennen von Mustern und Strukturen beziehungsweise Verallgemeinern und Abstrahieren

Das Erkennen von Mustern und Strukturen sowie das Verallgemeinern und Abstrahieren spielen in der Mathematik eine wichtige Rolle. In Bardy (2007, S. 177) werden die Begriffe *Muster* und *Strukturen* synonym verwendet. Mittelstraß (2004) beschreibt, dass eine Struktur als „Bezeichnung der Ordnung eines geordnet aufgebauten Ganzen“ (S. 107) dient.

Unter dem Begriff *Verallgemeinern* versteht Bardy (2007, S. 183) „ein Vorgehen/ein Verfahren, auf der Grundlage einiger weniger Tatsachen den wahren Sachverhalt für eine große Klasse von Fällen zu erschließen.“ Beim *Abstrahieren* wird nach Mittelstraß (2004, S. 37) das Allgemeine des mathematischen Gegenstandes durch das Herausheben der relevanten Merkmale erkenntlich gemacht.

Im Folgenden werden Aufgabenbeispiele vorgestellt, die einerseits das Erkennen von Strukturen und andererseits das Verallgemeinern und Abstrahieren fördern.

5.5.1 Aufgabenbeispiele zur Förderung des Erkennens von Strukturen

1. Aufgabenbeispiel: Nuss-Aufgabe

Ein Vater legt 36 Nüsse in ein Quadrat, das hier dargestellt ist, auf den Tisch und sagt zu seinem Sohn: „Kannst du sechs Nüsse so wegnehmen, dass in jeder waagrechten und senkrechten Reihe eine gerade Anzahl an Nüssen liegt?“ (vgl. Käpnick, 1998, S. 128)

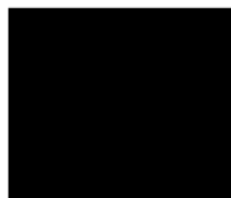


Abbildung 28: Nuss-Aufgabe (Käpnick, 1998, S. 128)

Bei dieser Aufgabe sollen Kinder dazu verleitet werden, Strukturen zu erkennen. Dabei können sie Zusammenhänge zwischen figuralen Mustern und Zahlbeziehungen entdecken. Ein zu erkennendes Muster ist beispielsweise, dass unter der Bedingung, dass der gegebene quadratische Raster eine gerade Anzahl an Zeilen und Spalten besitzt und eine gerade Anzahl an Elementen in jeder Zeile und Spalte (*Gerade-Zahl-Forderung*) nach dem Wegnehmen der Nüsse vorhanden sein muss, nur eine Lösung möglich ist, wenn auch eine gerade Anzahl an Nüssen weggenommen wird. Weiters ist erkennbar, dass 4 die kleinstmögliche gerade Zahl der zu streichenden Nüsse ist, um die *Gerade-Zahl-Forderung* zu erfüllen.

Finden Schülerinnen und Schüler eine Lösung mit sechs wegzunehmenden Nüssen, so ist ein Figurenmuster zu erkennen, das durch Verschieben, Drehen, Spiegeln oder Dehnen auf mehrere Lösungen schließen lässt (vgl. Käpnick, 1998, S. 128).



Abbildung 29: Lösungsmöglichkeiten der Nuss-Aufgabe (Käpnick, 1998, S. 128)

5.5.2 Aufgabenbeispiele zur Förderung des Verallgemeinerns und Abstrahierens

Bardy (2007, S. 183) beschreibt folgendes Beispiel für die Grundstufe II zur Förderung des Verallgemeinerns und Abstrahierens:

a) Du siehst hier die ersten vier Aufgaben einer Serie. Vervollständige die dritte und vierte Aufgabe der Serie!

1. Aufgabe: $1 \cdot 5 + 4 = 3 \cdot 3$

2. Aufgabe: $2 \cdot 6 + 4 = 4 \cdot 4$

3. Aufgabe: $3 \cdot 7 + 4 = \underline{\quad} \cdot \underline{\quad}$

4. Aufgabe: $4 \cdot 8 + 4 = \underline{\quad} \cdot \underline{\quad}$

b) Schreibe die fünfte Aufgabe der Serie auf!

5. Aufgabe: $\underline{\quad} \cdot \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad} \cdot \underline{\quad}$

c) Schreibe die 50. Aufgabe der Serie auf!

50. Aufgabe: $\underline{\quad} \cdot \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad} \cdot \underline{\quad}$

d) Schreibe die n-te Aufgabe der Serie auf!

n. Aufgabe: $\underline{\quad} \cdot (\underline{\quad} + \underline{\quad}) + \underline{\quad} = (\underline{\quad} + \underline{\quad}) \cdot (\underline{\quad} + \underline{\quad})$

Die Lösungen würden wie folgt lauten:

3. Aufgabe: $3 \cdot 7 + 4 = 5 \cdot 5$

4. Aufgabe: $4 \cdot 8 + 4 = 6 \cdot 6$

5. Aufgabe: $5 \cdot 9 + 4 = 7 \cdot 7$

50. Aufgabe: $50 \cdot 54 + 4 = 52 \cdot 52$

n. Aufgabe: $n \cdot (n + 4) + 4 = (n + 2) \cdot (n + 2)$

Bei den Aufgaben a) bis c) steht das schrittweise Verallgemeinern der Gleichungen der ersten und zweiten Aufgabe der Serie im Vordergrund. Bei der Aufgabe d) muss abstrahiert werden, indem die Buchstabenvariable n , die für eine beliebige Zahl steht, verwendet wird. Dadurch ist die letzte Gleichung für unendlich viele Fälle gültig. Mathematisch begabte Grundschulkin-der können fähig sein, die Aufgaben a) bis c) richtig zu lösen. Bei der letzten Gleichung muss den Kindern erklärt werden, wofür Klammern notwendig sind. Aufgabe d) muss also womög-lich mit der Unterstützung der Lehrperson bearbeitet werden.

5.6 Förderschwerpunkt: Selbstständiges Erweitern und Variieren von Aufga-ben

Das Erweitern und Variieren von Aufgaben ist für Schülerinnen und Schüler der Volksschule wichtig, da sie dadurch zum Fragen angeregt werden. Genauso ermöglicht ihnen das Lösen einfacher Variationen von Beispielen das richtige Lösen von komplexeren, mathematischen Problemen. Durch die Erweiterung und Variation von Aufgaben können Kinder Verknüpfungen zu früherem, späterem oder neuem Wissen herstellen. Weiters bekommen sie dadurch Anre-gungen, über verschiedene Lösungswege nachzudenken und diese zu überprüfen. Beim Über-legen eigener Variationen wird die Motivation und die Selbstkompetenz der Kinder gefördert. Das Beantworten eigener Fragen ist womöglich motivierender, als das Beantworten von Fra-gen der Lehrperson, welche die Antwort schon kennt (vgl. Bardy, 2007, S. 203f).

Im Folgenden werden zwei Beispiele beschrieben, die auf verschiedenste Art erweitert und variiert werden können.

1. Aufgabenbeispiel: Rätsel von aufeinanderfolgenden Zahlen

Addiere drei aufeinander folgende Zahlen. Was fällt dir auf?

Bei dieser Aufgabe sind verschiedene Variationen möglich. Zum einen kann die Rechenoperation Addition zum Beispiel durch die Multiplikation verändert werden. Aus drei aufeinander folgenden Zahlen können zwei, vier, fünf oder n -Zahlen werden. Bei n -Zahlen wird die mathematische Situation allerdings schon verallgemeinert. Die Phrase „aufeinander folgend“ lässt sich beispielsweise durch „im Abstand 2, 3, ...“, „gleichabständig“ oder „identisch“ ersetzen (vgl. Bardy, 2007, S. 201).

2. Aufgabenbeispiel: Zahlenabstand

Trage die Zahlen von 1 bis 4 in die Kreisfelder ein! Jene Zahlen, die durch eine Linie verbunden sind, müssen sich um mindestens 2 unterscheiden (vgl. Walther, 2004, S. 30).



Abbildung 30: Kreisfelder von Aufgabenbeispiel: Zahlenabstand (Walther, 2004, S. 30)

Bei diesem Aufgabenbeispiel sind vier verschiedene Parameter erkennbar: „die auf die Kreisfelder zu verteilenden Zahlen, die Anzahl der Kreisfelder, die Anordnung der Kreisfelder, die Bedingung für Zahlen auf benachbarten Kreisfeldern.“ (Walther, 2004, S. 30) Aufgrund dieser Parameter besteht die Möglichkeit, andere auf die Kreisfelder zu verteilenden Zahlen zu verwenden oder fünf Zahlen vorzugeben, die auf fünf Kreisfelder verteilt werden sollen. Weiters könnten Schülerinnen und Schüler die Aufgabe so verändern, indem sie eine ringförmige Anordnung der Kreisfelder mit beispielsweise vier, fünf oder sechs Feldern wählen würden. Dabei muss jedoch immer darauf geachtet werden, ob die Bedingung, dass der Abstand zwischen den Zahlen mindestens 2 sein muss, aufgrund einer anderen Anordnung der Kreisfelder auch eingehalten werden kann (vgl. Walther, 2004, S. 30f).

5.7 Förderschwerpunkt: räumliches Vorstellungsvermögen

Unter einem räumlichen Vorstellungsvermögen versteht Bardy (2007, S. 206), Kenntnisse, Erfahrungen und Vorstellungen von räumlichen Gegebenheiten zu besitzen. Wölpert (1983) beschreibt darunter weiters „die Fähigkeit, in der Vorstellung räumlich zu sehen und räumlich zu denken.“ (S. 9) Durch diese Fähigkeit sind Menschen in der Lage, sich Bilder von realen Gegen-

ständen vorzustellen, obwohl sie gerade nicht angreifbar sind. Zusätzlich zu der Fähigkeit gehört auch die Begabung, mit diesen Bildern umzugehen, indem sie umgeordnet und zu neuen Bildern entwickelt werden.

Nicht nur in der Mathematik ist ein räumliches Vorstellungsvermögen wichtig, sondern auch in alltäglichen Berufen als Flugzeugpilotinnen und Flugzeugpiloten oder Architektinnen und Architekten, in künstlerischen Berufen als Malerinnen und Maler, in technischen Berufen als Ingenieurinnen und Ingenieure, in der Medizin als Chirurgeninnen und Chirurgen oder in naturwissenschaftlichen Berufen als Physikerinnen und Physiker (vgl. Bardy, 2007, S. 207).

In zunehmendem Alter ist die Raumvorstellung von der Raumwahrnehmung immer weniger abhängig. Sich räumliche Objekte vorzustellen und mit diesen Beziehungen zwischen ihnen umzugehen, wird immer einfacher. Dabei erfolgt ein Prozess des Abstrahierens. Bei Identifikationsfaktoren von mathematisch begabten Kindern, die mithilfe von Indikatoraufgaben, die in 3.4 beschrieben wurden, festgestellt wurden, zeigte sich, dass ein hoch ausgeprägtes Raumvorstellungsvermögen kein festgelegtes Merkmal für eine mathematische Begabung ist. Bardy (2007, S. 207f) schreibt zwar, dass mathematisch begabte Schülerinnen und Schüler im Bereich der Raumvorstellung anderen, gleichaltrigen Kindern oder sogar Erwachsenen überlegen sein können, allerdings stellt dies keine Bedingung dar, um mathematisch begabt zu sein.

Folglich werden zwei Aufgabenbeispiele erläutert, die das räumliche Vorstellungsvermögen fördern.

1. Aufgabenbeispiel: Würfel

Welcher der Körper b), c) und d) lässt sich so in Körper a) einbauen, dass (von außen betrachtet) ein vollständiger Würfel entsteht? Im Inneren darf ein Loch bleiben.

Gib danach an, wie viele kleine Würfel in das Loch passen! Begründe bei beiden Körpern, für die der Einbau in den Körper a) nicht möglich ist, woran das liegt! (vgl. Bardy, 2007, S. 214f)

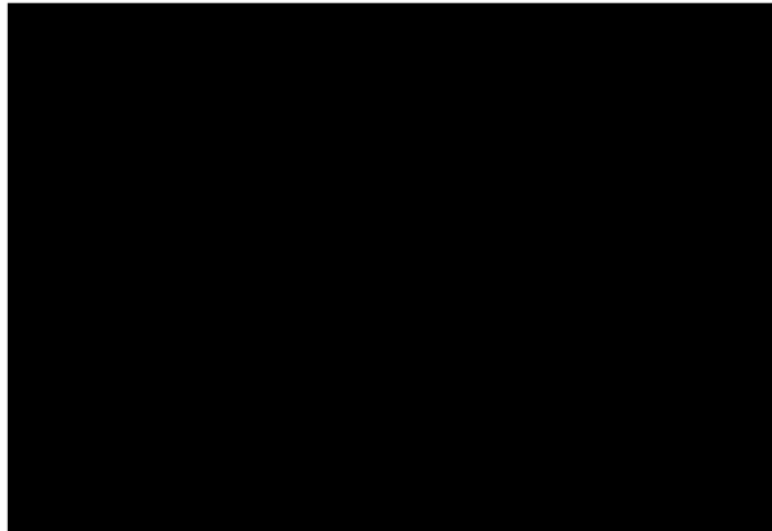


Abbildung 31: Aufgabenbeispiel: Würfel (Bardy, 2007, S. 214)

Die Lösungserwartung der Kinder lautet wie folgt: Der Körper c) lässt sich in den Körper a) so einbauen, dass ein vollständiger Würfel entsteht. Im Inneren des Würfels bleibt ein Loch, in das zwei kleine Würfel passen. Beim Körper b) stört der kleine Würfel rechts unten. Mit dem Körper d) kann der Körper a) oben nicht geschlossen werden.

2. Aufgabenbeispiel: Holzwürfel

Stell dir vor, du hast aus 64 Holzwürfeln einen großen $4 \cdot 4 \cdot 4$ – Würfel gebaut, den du jetzt rot anmalst. Wie viele kleine Würfel haben dann keine, eine, zwei, drei und vier rote Flächen? (vgl. Begić, 2002, S. 136)

Ein neunjähriger Bub löste die Aufgabe so, indem er zuerst die „Flächen“ untereinander aufschrieb, also 0, 1, 2, 3, 4. Er begann bei der letzten Zahl, die Aufgabe zu lösen, da dies seiner Meinung nach einfacher sei. Daher ist zu vermuten, dass der Bub das Problem in seiner Struktur erkannt hat. Ihm war auch klar, dass die Bearbeitung des Problems von hinten einfacher sein würde. Innerhalb kürzester Zeit konnte der Bub den Flächen die richtige Anzahl von Würfeln zuordnen. Vier Flächen konnte kein Würfel bemalt haben und drei Flächen waren nur bei den Eckwürfeln bemalt. Da ein Würfel acht Ecken besitzt, müssen demnach auch acht Würfel drei rote Flächen haben. Den Rest stellte sich der Bub bildlich vor und kam somit zu der Lösung, dass je 24 Würfel eine beziehungsweise zwei rote Fläche(n) haben müssen. Da am Ende nur noch acht Würfel übrig blieben, hatten diese keine rote Fläche. Seine Lösung überprüfte der Bub im Anschluss, indem er das Würfelgebäude auf der enaktiven Ebene nachstellte (vgl. Begić, 2002, S. 136). Somit kann durch dieses Aufgabenbeispiel nicht nur das räumliche Vorstellungsvermögen, sondern auch die Fähigkeit im Wechseln der Repräsentationsebenen gefördert werden.

5.8 Förderschwerpunkt: algebraisches Denken

Obwohl in der Primarstufe der Einsatz von Variablen und Gleichungen nicht gelehrt wird, greifen manche mathematisch begabte Grundschulkinder darauf zurück. Vorgehensweisen jener Kinder wurden unter anderem bereits in 5.2.5, 5.2.6 oder 5.4.2 beschrieben. Diese Schülerinnen und Schüler setzen beispielsweise Variablen ein, um ein mathematisches Problem zu lösen, sich mitzuteilen oder zu kommunizieren. Genauso nutzen sie jene, um ihre Lösungen zu begründen, zu argumentieren und zu beweisen.

Um das algebraische Denken mathematisch begabter Kinder zu fördern, eignen sich vor allem Aufgabenbeispiele, die durch den Einsatz von Variablen gelöst werden können (vgl. Bardy, 2007, S. 219). Nachfolgend werden zwei Beispiele nach Bardy (2007, S. 219f) beschrieben, die das algebraische Denken der Kinder fördern.

1. Aufgabenbeispiel: Zahlbeziehungen

Gesucht werden vier Zahlen, für die gilt: Die erste Zahl ist viermal so groß wie die zweite. Die zweite Zahl ist um 10 größer als die dritte. Die vierte Zahl ist um 14 größer als die erste. Die Summe der vier Zahlen beträgt 124.

So würde die Vorgehensweise eines Kindes ausschauen, das durch den Einsatz von Variablen zu einer Lösung gekommen ist:

Erste Zahl: $4 \cdot x$

Zweite Zahl: x

Dritte Zahl: $x - 10$

Vierte Zahl: $4 \cdot x + 14$

Daher gilt: $4 \cdot x + x + (x - 10) + (4 \cdot x + 14) = 124$, also

$$10 \cdot x + 4 = 124$$

$$10 \cdot x = 120$$

$$x = 12$$

Die gesuchten Zahlen sind deshalb:

Erste Zahl: 48

Zweite Zahl: 12

Dritte Zahl: 2

Vierte Zahl: 60

2. Aufgabenbeispiel: Weidezaun

„Eine rechteckige Weide wird eingezäunt. Der Zaun ist insgesamt 360m lang. Die lange Seite der Weide ist doppelt so lang wie die kurze Seite. Wie lang und wie breit ist die Weide?“ (Grosser & Koth, 2014, S. 33)

Die Vorgehensweise einer Schülerin oder eines Schülers, die oder der durch die Verwendung von Variablen zu einer Lösung kommt, könnte wie folgt aussehen, wenn x die Länge der kurzen Seite der Weide beschreibt:

$$x + 2 \cdot x + x + 2 \cdot x = 360$$

$$6 \cdot x = 360$$

$$x = 60$$

Somit ist die kurze Seite der Weide 60m und die lange Seite $2 \cdot x$, also 120m lang. Um die Aufgabe schwieriger zu machen, können natürlich auch Zahlen aus einem größeren Zahlenraum verwendet werden. Der Begriff *doppelt* kann auch durch *dreimal*, *viermal* oder Ähnliches ausgetauscht werden.

5.9 Wettbewerb: Känguru der Mathematik

Der Wettbewerb *Känguru der Mathematik* wird in vielen Staaten Europas durchgeführt und ist in Frankreich entstanden. Die französischen Entwickler dieses Wettbewerbs nannten ihn *Känguru der Mathematik*, da er ähnlich einem Wettbewerb in Australien, dem *Australian Mathematics Competition*, ist (vgl. Fast, 2005, S. 63f). Dieser Wettbewerb soll keinesfalls als Test durchgeführt werden, sondern vielmehr das Interesse im Bereich der Mathematik wecken und Spaß vermitteln. Aufgrund dessen werden die Aufgaben so ausgewählt, dass die Kinder Spaß am Rätseln und Knobeln haben. Auf Inhalte des Lehrplans wird dabei kaum Bezug genommen. So werden Themen aus der Zahlen- und Elementartheorie bei diesem Wettbewerb stärker behandelt, als sie im österreichischen Lehrplan verankert sind.

In Österreich ist dieser Wettbewerb in den letzten Jahren ein Fixtermin vieler Schulen geworden. *Känguru der Mathematik* findet jedes Jahr am dritten Donnerstag im März in allen Teilnehmerländern statt. Im Oktober oder November wird ein internationales Seminar, bei dem die Aufgabenbeispiele für den kommenden Wettbewerb festgelegt werden, abgehalten. Jedes Jahr ist ein anderes der rund 80 teilnehmenden Länder der Veranstalter des Wettbewerbs. Vor dem Seminar im Herbst schlägt jedes der teilnehmenden Länder für jede der fünf Wettbewerbsgruppen Aufgaben vor. Daraus werden schließlich 30, 24 oder 15 Aufgaben für die

jeweilige Alterskategorie ausgewählt. Bei der Auswahl wird darauf geachtet, dass die Aufgaben abwechslungsreich und originell sind. Genauso liegt das Augenmerk darauf, den Schwierigkeitsgrad von Aufgabe zu Aufgabe zu erhöhen. Den Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern des Känguruwettbewerbs erscheint wichtig, dass alle teilnehmenden Kinder Erfolgserlebnisse haben. Daher achten sie darauf, Aufgaben zu wählen, die für jede Begabungsstufe interessant und geeignet sind. Genauso wird darauf geachtet, dass mathematisch begabte Kinder alle gestellten Aufgaben in der vorgegebenen Zeit lösen können.

Grundsätzlich nimmt immer die ganze Klasse an dem Wettbewerb teil. Dieser wird von der Klassenlehrerin oder dem Klassenlehrer durchgeführt und anschließend auch ausgewertet. Das Schulergebnis wird schließlich an die zuständige Landesorganisation übermittelt. Die erste und zweite Schulstufe sowie die dritte und vierte Schulstufe der Primarstufe haben unterschiedliche Aufgaben. Alle vier Klassen haben 60 Minuten Zeit, um die Aufgaben des Wettbewerbs zu lösen. Dabei können sie 75 beziehungsweise 120 Punkte erreichen. Obwohl mit der ganzen Klasse an dem Wettbewerb teilgenommen wird, eignet er sich gut, um die begabten Schülerinnen und Schüler zu fördern. *Känguru der Mathematik* dient zum einen dazu, die Begeisterung für die Mathematik zu gewinnen, der Wettbewerb kann aber genauso als Diagnosemöglichkeit für die Fähigkeit des Problemlösens bei mathematisch begabten Kindern eingesetzt werden. Die meisten Aufgaben bei diesem Wettbewerb sind Knobelaufgaben, bei denen die Kinder ihre Problemlösefähigkeiten unter Beweis stellen können. Im Folgenden werden Auszüge aus dem Wettbewerb von 2019, die zwei Aufgabenbeispiele für die dritte und vierte Schulstufe aus der Aufgabensammlung *Ecolier* zeigen, dargestellt. Für das erste Beispiel wurden vier und für das zweite fünf Punkte bei der richtigen Beantwortung vergeben (vgl. Geretschläger, 2019). Beide Aufgaben bedürfen den Problemlösefähigkeiten, da die Lösung nicht sofort ersichtlich ist. Die Kinder müssen durch die Anwendung einer Strategie, durch den Einsatz heuristischer Hilfsmittel oder Ähnlichem zu einer Lösung gelangen.

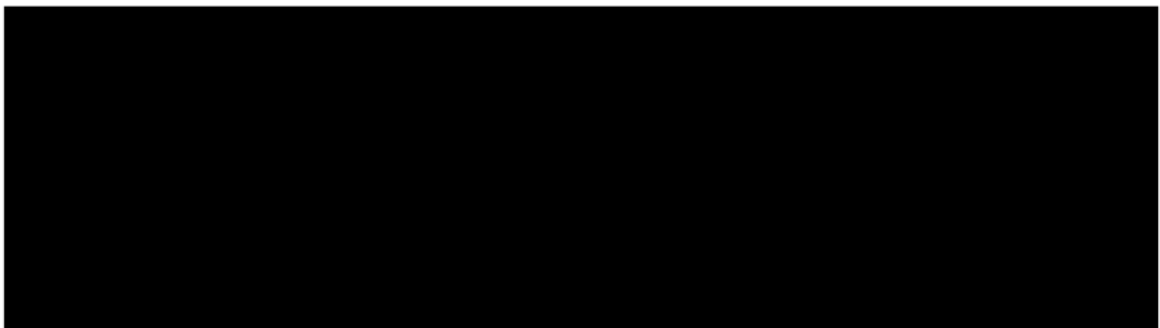


Abbildung 32: Vier-Punkte-Aufgabenbeispiel aus *Ecolier* 2019 (Haus der Mathematik, 2019)

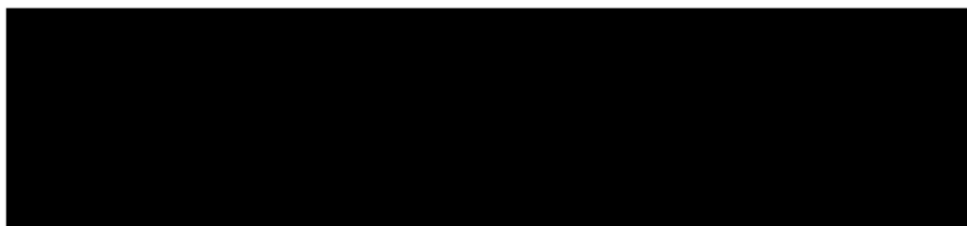


Abbildung 33: Fünf-Punkte-Aufgabe aus *Ecolier 2019* (Haus der Mathematik, 2019)

So können Kinder beim Vier-Punkte-Aufgabenbeispiel die Vorgehensweise des systematischen Probierens anwenden, indem sie sich nacheinander alle Zahlenkombinationen notieren, bei denen eine möglichst große Endzahl entsteht. Sie werden in diesem Fall zum Beispiel alle Zahlen mit 9 an der Hunderterstelle aufschreiben und so letztlich zu dem Ergebnis kommen, dass für die einstellige Zahl entweder 0 oder 1 eingesetzt werden kann.

Beim Fünf-Punkte-Aufgabenbeispiel bietet sich an, Zahlen beginnend mit 1 zu vermerken, bis insgesamt 16 Mal die Ziffer 5 verwendet wurde. Anfangs können die Kinder von 5 an in Zehnerschritten bis 50 vorwärts zählen und dann in Einerschritten weiter. So könnten sie an Schreibarbeit sparen. Mithilfe dieser Vorgehensweise würden die Schülerinnen und Schüler auf die Antwort (B) 64 kommen.

5.10 Haus der Mathematik

Das *Haus der Mathematik* dient als außerschulischer Lernort für Schülerinnen und Schüler ab der vierten Schulstufe. Es ist ein Science Center mit dem Schwerpunkt Mathematik. An diesem Ort können Kinder an Spieltischen Mathematik angreifen und begreifen lernen. Sie setzen sich eigenständig und spielerisch mit den Aufgaben auf den Tischen auseinander und können ihrer Experimentierfreude freien Lauf lassen. Sie werden von den Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern auch dazu angeregt, über mathematische Zusammenhänge und Probleme nachzudenken.

Bei der Ankunft im *Haus der Mathematik* werden die Kinder zuerst zum mathematischen Denken durch einen Marktplatz hingeführt. Die Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter stellen ihnen verschiedene Denkaufgaben, die gemeinsam gelöst werden. Anschließend dürfen sie im Raum der Spieltische zu verschiedensten Themengebieten der Mathematik forschen. Die Spieltische veranschaulichen mathematische Formeln, regen die Kinder dazu an, sich mit Spielstrategien auseinanderzusetzen und machen Beweise mathematischer Sätze verständlich. Zu guter Letzt haben Schülerinnen und Schüler im *Haus der Mathematik* nicht nur die Möglichkeit, an den Spieltischen verschiedene Aufgaben zu lösen, sondern auch eine mathematische Zeitreise zu unternehmen. Dabei wird ihnen ein Einblick in die Mathematik der Ägypter vor über 4 500 Jahren über die alten Griechen bis hin zur Neuzeit gewährt. Sie untersuchen dabei den Bau

von Pyramiden und lernen Rechenhilfen und Rechenmaschinen aus früherer Zeit kennen (vgl. Haus der Mathematik, 2020).

5.11 Projekt zum Thema *Wahrscheinlichkeit*

Das Projekt zum Thema *Wahrscheinlichkeit* kann mit Schülerinnen und Schülern der dritten und vierten Schulstufe durchgeführt werden. An diesem kann nicht nur mit mathematisch begabten Kindern, sondern mit allen Kindern einer Schulstufe gearbeitet werden. Daher sind auch Tipps enthalten, die den leistungsschwächeren Lernenden helfen sollen. Bei diesem Projekt setzen sich Schülerinnen und Schüler mit Problemlöseaufgaben auseinander, bei denen sie ihre Lösungen verbalisieren und verschriftlichen sollen. Das vorliegende Projekt soll als Beispiel dienen, sowohl begabte Kinder als auch alle anderen Schülerinnen und Schüler einer Klasse optimal fördern zu können. Zwischen den einzelnen Leistungsniveaus wird mithilfe von Differenzierungsmaßnahmen unterschieden. Mathematisch Begabte dürfen sich im Zuge des Projekts selbstständig an den offenen Aufgabenstellungen ausprobieren. Die anderen Kinder können mithilfe der Lehrperson und materieller Unterstützung wie Hilfskärtchen zu Lösungen gelangen. Um einen groben Einblick in das Thema *Wahrscheinlichkeit* zu bekommen, wird im Folgenden zuerst auf die Begriffe, die sich in Bezug auf dieses Thema ergeben, eingegangen. Danach werden die Aufgabenbeispiele des Projekts vorgestellt. Das Projekt beansprucht ungefähr vier Unterrichtseinheiten, in denen ein Wechsel vom gemeinsamen Einstieg in ein Thema mit der Lehrperson und von verschiedenen Sozialformen wie Partner- oder Einzelarbeit stattfindet. Genauso werden neben dem Begründen und Argumentieren auch der Einsatz von heuristischen Hilfsmitteln, die in 5.1 erläutert wurden, und die Anwendung von allgemeinen Strategien, die in 5.2 beschrieben wurden, wie das Herstellen von Beziehungen gefördert. Zusätzlich liegt der Schwerpunkt des Projektes auf dem Argumentieren und Begründen der Überlegungen der Kinder.

5.11.1 Begriff *Wahrscheinlichkeit*

Das Thema *Wahrscheinlichkeit* wird nicht nur im Zusammenhang mit der Mathematik gesehen, sondern auch als wichtiger Bestandteil des alltäglichen Lebens. Kinder werden bereits bei Würfelspielen wie „Mensch ärgere dich nicht“ oder bei Glücksspielen auf Jahrmärkten mit diesem Thema konfrontiert. Im österreichischen Lehrplan des Bundesministeriums für Bildung, Wissenschaft und Forschung (2012, S. 155) ist das Beschreiben von Sachverhalten, die in Datenmaterial oder grafischen Darstellungen enthalten sind, das Diskutieren darüber und das Herausarbeiten von mathematischen Problemstellungen in der dritten und vierten Schulstufe verankert, weshalb umso wichtiger ist, dass den Grundschulkindern ein Einblick in dieses

Thema gewährt wird und sie sich damit auseinandersetzen können. Vor der Einführung in die Wahrscheinlichkeit ist als Lehrperson eine ausreichende Auseinandersetzung mit diesem Thema und den damit verbundenen Begriffen notwendig. Folglich beschriebener Text stellt das Hintergrundwissen für Lehrpersonen dar.

Ausgegangen wird von einem Zufallsexperiment, das n -mal durchgeführt wird. Ein Zufallsexperiment ist ein Experiment, dessen Ausgang nicht vorhersehbar ist. Dabei kann ein Ereignis eintreffen, muss aber nicht. Zufallsexperimente sind beispielsweise jegliche Versuche mit dem Würfel, Münzwürfe oder Lottospiele. Für diese Experimente wird ein bestimmtes Ereignis A betrachtet. Dieses tritt mit absoluter Häufigkeit a_n und relativer Häufigkeit $r_n = \frac{a_n}{n}$, wobei gilt $r_n \in [0; 1]$, ein. n ist dabei als die Anzahl der Versuche definiert. Mithilfe dieser Formel können relative Häufigkeiten bestimmt werden, ohne im Vorhinein das Experiment durchzuführen. Das ist unter anderem eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Eine Zahl $P(A) \in [0; 1]$ heißt Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, wenn $P(A)$ die relative Häufigkeit r_n bei sehr großem n gut vorhersagt. Daher gilt bei sehr großem n , dass die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses annähernd gleich der relativen Häufigkeit ist. Diese beiden verschiedenen Zugänge werden nun kurz anhand des Münzwurfes erklärt. Einerseits besteht die Möglichkeit eine Versuchsserie durchzuführen, bei der beispielsweise tausend Mal eine Münze geworfen wird. Die Versuchsausgänge für Kopf oder Zahl können dafür in einer Tabelle mithilfe einer Strichliste festgehalten werden. Die relative Häufigkeit nähert sich bei sehr großem n ungefähr dem Wert 0,5 an. Andererseits kann das Experiment aber auch gedanklich durchgeführt werden. Es gibt also zwei mögliche Versuchsausgänge „Kopf“ oder „Zahl“, wobei keiner von beiden bevorzugt ist. Daraus kann geschlossen werden, dass verschiedene Ansätze möglich sind, um Wahrscheinlichkeiten zu berechnen: den empirischen und theoretischen Ansatz.

Beim empirischen Ansatz wird die Wahrscheinlichkeit aus der Erfahrung beziehungsweise aus der relativen Häufigkeit gewonnen. In der Medizin zum Beispiel wird die Wahrscheinlichkeit der Heilung von Krankheiten oder der Medikamentenverträglichkeiten aus den Erfahrungen gewonnen. Auch bei Großveranstaltungen, bei denen die Menge des Essens vom Catering bestimmt werden muss, werden die Zahlen aus dem Vorjahr betrachtet, um sie für das Veranstaltungsjahr hochzurechnen. Selbstverständlich spielt dabei immer auch das Wetter eine wichtige Rolle und die Veranstalterinnen und Veranstalter berücksichtigen, ob die Veranstaltung das erste Mal stattfindet. Die Wahrscheinlichkeit, die auf Basis der relativen Häufigkeit berechnet wird, basiert auf dem empirischen Gesetz der großen Zahlen. Das besagt, dass sich die relative Häufigkeit eines Ereignisses bei einer großen Versuchsanzahl und gleichbleibenden Versuchsbedingungen bei einem bestimmten Wert einpendelt. Daher gilt, dass sich bei $n \rightarrow \infty$ die relative Häufigkeit stabilisiert. In der Mathematik stellt dieses Gesetz der großen

Zahlen eine Ausnahme dar, da es im Gegensatz zu anderen Gesetzen nicht bewiesen werden kann.

Beim theoretischen Ansatz wird die Wahrscheinlichkeit aufgrund von theoretischen Überlegungen festgelegt. Beim Würfeln ergeben sich beispielsweise sechs Möglichkeiten, wobei alle sechs gleichberechtigt sind. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis, also zum Beispiel die Augenzahl 6 zu würfeln, eintritt, beträgt $\frac{1}{6}$. Dieses Beispiel wird mit dem Begriff *Laplace'scher Wahrscheinlichkeitsbegriff* beschrieben. Unter den Voraussetzungen, dass die Anzahl aller möglichen Versuchsausgänge endlich ist und je zwei Versuchsausgänge gleich wahrscheinlich sind, gilt für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A :

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Versuchsausgänge}}{\text{Anzahl der möglichen Versuchsausgänge}}$$

$P(A)$ heißt Laplace-Wahrscheinlichkeit (vgl. Hauer-Typelt, 2011).

Mithilfe dieser Formel lassen sich die Wahrscheinlichkeiten für diverse Glücksspiele berechnen. Dazu gehören Würfelspiele oder das Drehen an einem Glücksrad (vgl. Hasemann & Mirwald, 2008, S. 151). Folgende drei Fragen befassen sich damit:

1. Bei welcher Ziffer ist die Wahrscheinlichkeit hoch, sie zu würfeln?

Ein Würfel besteht aus sechs Flächen, auf die er fallen kann. Die Anzahl der möglichen Ereignisse ist daher 6. Aufgrund der Symmetrie eines Würfels und derselben Anzahl jeder Zahl auf dem Würfel, ist die Anzahl der günstigen Ereignisse 1. Daraus ergibt sich, dass jede Ziffer gleichwahrscheinlich gewürfelt werden kann und die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ beträgt (vgl. Hasemann & Mirwald, S. 151).

2. Welche Augensumme wird beim Würfeln mit zwei Würfeln am häufigsten gespielt?

Um diese Frage beantworten zu können, muss die Anzahl der Kombinationsmöglichkeiten, die sich aus den Augensummen ergeben, näher betrachtet werden. Folgende Tabelle soll dies veranschaulichen:

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Tabelle 3: Kombinationsmöglichkeiten der Augensummen beim Würfeln mit zwei Würfeln

Die Tabelle zeigt 36 Felder und daher auch 36 mögliche Ereignisse, die eintreten können. Um die 2 und die 12 als Augensumme zu bekommen, kann nur ein günstiger Fall eintreten, nämlich $1 + 1$ oder $6 + 6$. Die Summen 3 und 11 können durch zwei günstige Fälle erscheinen, $1 + 2$ und $2 + 1$ oder $5 + 6$ und $6 + 5$. Bei den Augensummen 4 und 10 sind drei, bei 5 und 9 vier, bei 6 und 8 fünf und bei 7 sechs Fälle günstig. Daraus ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{36}$ bei den Augensummen 2 und 12, $\frac{2}{36}$ bei 3 und 11, $\frac{3}{36}$ bei 4 und 10, $\frac{4}{36}$ bei 5 und 9, $\frac{5}{36}$ bei 6 und 8 und $\frac{6}{36}$ bei 7. Die Augensumme 7 wird daher am häufigsten gewürfelt.

3. Welches Feld tritt beim Drehen an einem Glücksrad am häufigsten auf?

Ähnlich wie beim Würfel hängt auch die Wahrscheinlichkeit des Eintretens des Ereignisses beim Glücksrad nicht nur von der Anzahl der Zahlen oder Farben ab. Entscheidend ist das flächenmäßige Vorkommen auf dem Glücksrad. Die gleiche Eintrittswahrscheinlichkeit zweier Felder bei einem Glücksrad lässt sich durch die gleich großen Flächen der Felder erklären.

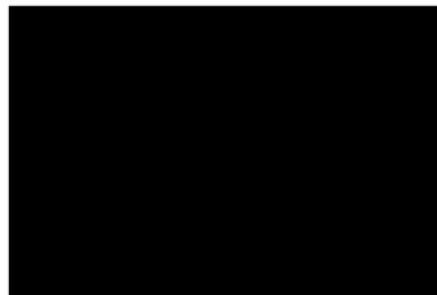


Abbildung 34: Glücksrad (PIKAS, 2019, S. 7)

Das Glücksrad in Abbildung 34 zeigt acht Felder, woraus sich acht mögliche Ereignisse ergeben: Die Wahrscheinlichkeit, auf ein weißes Feld zu drehen, beträgt $\frac{1}{8}$. Die Wahrscheinlichkeit, auf ein blaues oder rotes Feld zu drehen, beträgt jeweils $\frac{2}{8}$. Ein grünes Feld zu treffen, ist mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{3}{8}$ festgelegt. Abgesehen von den Farben beträgt die Wahrscheinlichkeit, eine bestimmte Ziffer zu treffen, jeweils $\frac{1}{8}$, da jede Ziffer nur einmal vorkommt (vgl. PIKAS, 2019, S. 7).

Das folgende Projekt zum Thema *Wahrscheinlichkeit* findet über vier Unterrichtseinheiten statt. Die Kinder sollen anfangs zum Thema hingeleitet werden, um letztlich eigene Überlegungen festzuhalten und über ihre Erkenntnisse zu diskutieren. Der Aufbau und die Ideen zum Thema richten sich dabei nach PIKAS (2019) und Neubert (2009).

5.11.2 Erste Unterrichtseinheit zum Thema *Wahrscheinlichkeit*

In der ersten Einheit liegt der Schwerpunkt darauf, dass die Kinder handelnde Erfahrungen mit den Wahrscheinlichkeiten beim Würfeln machen und diese Erfahrungen auch begründen können. Das Ziel dieser Einheit ist, dass „die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass aufgrund der Symmetrie des Würfels das Eintreten aller sechs Augenzahlen beim Würfeln mit einem Würfel gleichwahrscheinlich ist“ (PIKAS, 2019, S. 8). Genauso sollen sie Vermutungen über den Eintritt von Wahrscheinlichkeiten anstellen und diese versuchen, zu überprüfen.

Im Mittelpunkt dieser Unterrichtseinheit steht, dass die Kinder Daten, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten mit einem oder zwei Würfel(n) sammeln. Sie sollen durch die handelnden Erfahrungen einen Einblick in das Thema bekommen, sowie an das Datenerheben und das Bestimmen von Eintrittswahrscheinlichkeiten hingeführt werden. Dadurch sollen sie erkennen, dass Glücksspiele nicht nur rein vom Zufall abhängig, sondern mithilfe der Mathematik auch berechenbar sind (vgl. PIKAS, 2019, S. 8).

1. Einführung der Fachbegriffe

Anfangs wird besprochen, dass ein neues Thema behandelt wird, das die Kinder zum größten Teil selbst erkunden sollen. Als stummer Impuls wird ein Würfel durchgegeben, den die Schülerinnen und Schüler kurz beschreiben und zu dem sie Ideen anstellen sollen. Die Eigenschaften eines Würfels (sechs gleich große Flächen, Augenzahlen) und die Begriffe *wahrscheinlich* und *unwahrscheinlich* werden besprochen. Danach stellen die Kinder Vermutungen an, welche Augenzahl am häufigsten gewürfelt wird und überprüfen diese handelnd. Anschließend stellt die Lehrperson das Arbeitsblatt 1 vor, bei dem die Schülerinnen und Schüler in Einzelar-

beit 30-mal würfeln und ihre Ergebnisse mithilfe einer Strichliste notieren sollen. Ihre Erkenntnisse und Begründungen dazu werden schriftlich festgehalten. Dabei wird bereits ein heuristisches Hilfsmittel, die Tabelle, verwendet, das zwar von der Lehrperson vorgegeben ist, aber trotzdem als übersichtliche Darstellung der Ergebnisse dient.

2. Arbeitsphase

Jedes Kind bekommt einen Würfel, um die Aufgabenstellungen auf dem Arbeitsblatt 1 bearbeiten zu können. Da an diesem einzeln gearbeitet wird, werden mehrere, unterschiedliche Ergebnisse erzielt, die am Ende miteinander verglichen beziehungsweise letztlich zusammengezählt werden können, um so das Handeln mit dem Gesetz der großen Zahlen begründen zu können. Dies besagt, dass je öfter der Versuch durchgeführt wird, desto mehr nähert sich die relative Häufigkeit der theoretischen Wahrscheinlichkeit an. In diesem Fall bedeutet das, dass jede Zahl in etwa gleich oft gewürfelt wird.

Arbeitsblatt 1: Würfel

Name: _____



Würfle 30-mal und mach eine Strichliste!

Augenzahl	Strichliste	Gesamtergebnis
		
		
		
		
		
		



Was fällt dir auf, wenn du die Ergebnisse miteinander vergleichst?



Begründe deine Entdeckungen!

Abbildung 35: Arbeitsblatt 1 des Projektes

Mithilfe des Arbeitsblattes von Abbildung 35 wird vor allem das Begründen gefördert, da die Kinder zuerst Vermutungen beziehungsweise Behauptungen anstellen sollen, die sie im Weiteren belegen. Dadurch stellen sie nicht bloß Behauptungen in den Raum, sondern müssen sich auch Gedanken darüber machen, wieso diese gültig sein können. Leistungsschwächere Kinder haben hier die Möglichkeit, nur auf der Ebene des Beschreibens zu bleiben, falls ihnen das Begründen ihrer Vermutungen zu schwierig sein sollte.

Nachdem das erste Arbeitsblatt bearbeitet wurde, sollen die begabten Schülerinnen und Schüler selbstständig forschen. Sie sollen Überlegungen anstellen, wie die Strichliste beim Würfeln mit zwei Würfeln aussehen würde, ohne dabei die Augenzahlen miteinander zu addieren. Dafür wird das Arbeitsblatt 2 verwendet. Damit sollten sie auf die Erkenntnis stoßen, dass jede Kombination in etwa gleichwahrscheinlich ist, wobei ein Pasch jedoch unwahrscheinlicher gewürfelt wird.

Arbeitsblatt 2: Würfel

Name: _____



Wie würde die Strichliste aussehen, wenn du mit zwei, drei oder mehreren Würfeln würfeln würdest?

Abbildung 36: Arbeitsblatt 2 des Projektes

Bei der Aufgabenstellung in Abbildung 36 sollen die Kinder überlegen, wie die Strichliste mit zwei, drei oder mehreren Würfeln aussehen würde. Dabei bleibt den Schülerinnen und Schülern selbst überlassen, in welcher Form sie eine Strichliste anlegen. Beispielsweise können sie erneut auf eine Tabelle zurückgreifen. Manche Kinder werden eventuell alle Ergebnisse nebeneinander aufschreiben, ohne dabei eine Tabelle anzulegen. Bei diesem Forscherauftrag wird die Fähigkeit des Verallgemeinerns gefördert. Die Kinder müssen von einer tatsächlich durchgeführten Handlung des Würfeln mit einem Würfel auf die Ergebnisse des Würfeln mit zwei, drei oder mehreren Würfeln schließen. Diese Aufgabenstellung dient als zusätzlicher Forscherauftrag, den leistungsschwächere Lernende nicht lösen müssen.

3. Reflexion

Nachdem die Kinder mit dem Arbeitsblatt fertig sind und sie ihre Ergebnisse verschriftlicht haben, erfolgt eine kurze Reflexion über ihre Erkenntnisse. Dabei wird auch besprochen, dass bei häufigem Würfeln die Augenzahlen nahezu gleich oft gewürfelt werden und dies auf die Symmetrie des Würfels zurückzuführen ist (vgl. PIKAS, 2019, S. 8ff).

5.11.3 Zweite Unterrichtseinheit zum Thema *Wahrscheinlichkeit*

Die zweite Einheit hat als Schwerpunkt, die Wahrscheinlichkeiten beim Würfeln mit zwei Würfeln zu bestimmen, indem die begabten Grundschülerinnen und Grundschüler nach einem bestimmten, selbstgewählten Schema vorgehen. Die Schülerinnen und Schüler sollen möglichst systematisch alle Kombinationen herausfinden, wie sich die Summe der beiden Würfel zusammensetzen kann. Dabei soll ihnen klar werden, dass beim Würfeln mit zwei Würfeln die Augensummen unterschiedlich wahrscheinlich sind. In diesem Zusammenhang sollen sie auch erkennen, wie sich die Wahrscheinlichkeiten beim Würfeln mit einem oder zwei Würfel(n) verändern.

Nun schreiben die Kinder alle Kombinationsmöglichkeiten der Augensummen auf, die beim Würfeln mit zwei Würfeln erzielt werden können. Die verschiedenen Möglichkeiten sollen anschließend mit den unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten beim Würfeln mit einem oder zwei Würfel(n) verglichen werden. Der genaue Stundenverlauf, der eine Unterrichtseinheit beansprucht, wird im Folgenden beschrieben (vgl. PIKAS, 2019, S. 22).

1. Reflexion über die Erfahrungen aus der vorigen Stunde

Zuerst ist wichtig, dass die Erkenntnisse aus der vorigen Stunde besprochen werden. Die Lehrperson wiederholt kurz das Thema aus der Einstiegssequenz, um anschließend die Kinder zu Wort kommen und sie über ihre Erkenntnisse sprechen zu lassen. Sie macht den Schülerinnen

und Schülern bewusst, dass sie in dieser Unterrichtseinheit möglichst strukturiert vorgehen müssen, um alle Kombinationsmöglichkeiten herauszufinden.

Nachdem über die vorige Stunde reflektiert wurde, stellt die Lehrperson den Kindern das Arbeitsblatt 3 vor. Auf diesem sollen sie alle Möglichkeiten aufschreiben, die sich beim Würfeln mit zwei Würfeln aus der Summe der Augenzahlen ergeben. In diesem Zusammenhang sollen sie auch begründen, warum sie sich sicher sind, alle Möglichkeiten gefunden zu haben.

2. Arbeitsphase

Nun arbeiten die Schülerinnen und Schüler einzeln an dem Arbeitsblatt. Falls die Kinder etwas nachlegen wollen, können hierfür als Hilfestellung auch zwei Würfel zur Verfügung gestellt werden.

Arbeitsblatt 3: Würfelaugensummen Name: _____



Finde alle Möglichkeiten für die Summe von zwei Würfelzahlen und notiere deine Überlegungen!



Warum bist du dir sicher, dass du alle Möglichkeiten gefunden hast? Begründe deine Entscheidung!

Abbildung 37: Arbeitsblatt 3 des Projektes

Bei diesem Arbeitsblatt ist den Schülerinnen und Schülern selbst überlassen, wie sie zu der Lösung kommen. Ob sie strukturiert vorgehen oder die erhaltenen Augensummen im Durcheinander aufschreiben, ist ihre Entscheidung. Am Ende sollen die Kinder jedenfalls begründen, warum sie sich sicher sind, alle Kombinationsmöglichkeiten gefunden zu haben. Dies fördert unter anderem das Begründen, aber auch das Erkennen von Strukturen, das in Förderschwerpunkt: Erkennen von Mustern und Strukturen beziehungsweise Verallgemeinern und Abstrahieren beschrieben wurde.

Falls leistungsschwächere Kinder keine Ideen haben, wie sie auf alle Möglichkeiten der Summe von zwei Würfelzahlen kommen können, dürfen sie Tippkarten der Lehrperson verwenden, die in den folgenden zwei Abbildungen dargestellt sind. Dabei wird ihnen einerseits der Zugang zu einer Tippkarte gewährt, welche die Vorgehensweise für das Finden von Möglichkeiten mit der Augensumme 5 veranschaulicht. Andererseits können sie mithilfe der zweiten Tippkarte die restlichen Kombinationsmöglichkeiten zweier Würfelzahlen in einer vorgegebenen Tabelle notieren.

Tippkarte 1 zu Arbeitsblatt 3

Augensumme 5
Die Augensumme 5 kannst du mit diesen Würfelzahlen würfeln:

Würfelbilder	Plusaufgaben
	$1+4$
	$4+1$
	$2+3$
	$3+2$

Abbildung 38: Tippkarte 1 zu Arbeitsblatt 3

Tippkarte 2 zu Arbeitsblatt 3

Trage die Würfelbilder oder die Plusaufgaben in die Tabelle ein!
Die Möglichkeiten für die Augensumme 5 sind schon eingetragen.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
				1+4							
				4+1							
				2+3							
				3+2							

Abbildung 39: Tippkarte 2 zu Arbeitsblatt 3

3. Reflexionsphase

In der Abschlussphase werden die Kinder dazu angeregt, ihre Kombinationsmöglichkeiten vorzustellen und im Weiteren auch zu begründen, warum sie sich sicher sind, alle gefunden zu haben. Die Lehrperson kann als Veranschaulichung Würfelbilder mit den unterschiedlichen Möglichkeiten der Addition zweier Augensummen auflegen, wodurch kontrolliert werden kann, ob die Schülerinnen und Schüler alle Kombinationen gefunden haben (vgl. PIKAS, 2019, S. 22ff).

5.11.4 Dritte Unterrichtseinheit zum Thema *Wahrscheinlichkeit*

In dieser Unterrichtseinheit liegt der Fokus darauf, dass die Kinder die Erkenntnisse, die sie in der vorigen Stunde bezüglich der Augensummen beim Würfeln mit zwei Würfeln gemacht haben, auf das Spiel mit der Bank, das in dieser Stunde durchgeführt wird, übertragen. Das Ziel ist daher, dass sie die Anzahlen der verschiedenen Möglichkeiten der Augensummen als Begründung für den Ausgang des Würfelspiels sehen.

Beim Bearbeiten des vierten Arbeitsblattes sollen die Kinder in unterschiedliche Rollen schlüpfen und herausfinden, wie gut die Gewinnchancen für die Spielerin oder den Spieler stehen. Genauso soll als Lehrperson herausgefunden werden, auf welche Aspekte die Kinder beim Gewinnen achten: auf die Anzahl der Gewinnzahlen oder auf deren Werte. Mithilfe der Strichliste kommen die Schülerinnen und Schüler letztlich auf die Erkenntnis, dass in den meisten Fällen die Bank gewinnt. Die meisten werden über den Ausgang des Spiels überrascht sein, weshalb dieser im Folgenden auch begründet werden soll. Die Kinder sollen während des Spiels erkennen, dass nicht die Anzahl der Gewinnzahlen, sondern die Anzahl der Möglichkeiten, die Zahlen zu würfeln, bedeutend ist, um herauszufinden, ob das Spiel fair oder unfair ist. In diesem Zusammenhang kann auch wieder auf die Erkenntnisse der vorherigen Stunde aufmerksam gemacht werden. Begabten Kindern wird in diesem Fall womöglich sowieso von Beginn an bewusst sein, wer nach der beschriebenen Gewinnregel gewinnen wird. Leistungsschwächeren Kindern können diese Erkenntnisse durch das Ausprobieren des Spiels verständlicher gemacht werden.

1. Reflexion über die Erfahrungen aus der vorigen Stunde

Die Lehrperson fragt die Kinder, was sie aus der letzten Einheit mitgenommen haben. Dabei wird genannt, welche Augensummen am häufigsten gewürfelt werden und woran dies liegt. Die unterschiedlichen Möglichkeiten, die sich aus der Summe zweier Augenzahlen ergeben, werden noch einmal kurz besprochen.

2. Arbeitsphase

Nach einer kurzen Reflexion finden sich die Kinder zu zweit zusammen. Die Rollen werden dabei aufgeteilt: Ein Kind übernimmt die Bank, das andere die Spielerin oder den Spieler. Ihnen sollte jedoch anfangs nahegelegt werden, über die Fairness des Spiels zu sprechen. Erst dann beginnen sie mit dem Würfeln mit zwei Würfeln. Die Summe der beiden gewürfelten Augenzahlen wird addiert und der Gewinnregel auf dem Arbeitsblatt 4 zugeordnet.

Arbeitsblatt 4: Würfel

Name: _____



Wer gewinnt?

Spielregel

Würfelt mit zwei Würfeln und addiert die Augenzahlen!

Gewinnregel

Der Spieler gewinnt, wenn das Ergebnis der Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 10, 11 oder 12 ist.

Die Bank gewinnt, wenn das Ergebnis der Augenzahlen 5, 6, 7, 8 oder 9 ist.



Bevor ihr würfelt: Findet ihr, dass das Spiel fair ist? Begründet eure Entscheidung!

Würfelt 30-mal mit zwei Würfeln und addiert die Augenzahlen!
Macht dazu auf der Rückseite eine Strichliste!

Abbildung 40: Vorderseite des Arbeitsblattes 4 des Projektes

Arbeitsblatt 4: Würfel

Name: _____

Strichliste des Spielers:

Ergebnis der Augenzahlen	Strichliste
1	
2	
3	
4	
10	
11	
12	

Strichliste der Bank:

Ergebnis der Augenzahlen	Strichliste
5	
6	
7	
8	
9	

Wer hat gewonnen? _____

Stimmt eure Vermutung? _____

Abbildung 41: Rückseite des Arbeitsblattes 4 des Projektes

Bei diesen Arbeitsblättern sollen die Kinder zuerst anhand der vorgegebenen Gewinnregel entscheiden, ob das Spiel fair ist und ihre Entscheidung demnach auch erklären. Falls Kinder nicht einschätzen können, ob das Spiel fair ist oder nicht, können sie das Arbeitsblatt oder die Tippkarte aus der vorigen Stunde zu Hilfe nehmen. Darauf ist die gut erkennbar, wie oft die verschiedenen Augensummen auftreten können. Leistungsstarke, begabte Schülerinnen und Schüler haben die Möglichkeit, ihre Erkenntnisse auf ein Spiel mit einer neuen Gewinnregel

zu übertragen und zu überprüfen. Dafür kann das Arbeitsblatt 4/1 verwendet werden, das in Abbildung 42 und Abbildung 43 zu sehen ist.

Arbeitsblatt 4/1: Würfel

Name: _____



Wer gewinnt?

Spielregel

Würfelt mit zwei Würfeln und addiert die Augenzahlen!

Gewinnregel

Der Spieler gewinnt, wenn das Ergebnis der Augenzahlen kleiner als oder genau gleich 6 ist.

Die Bank gewinnt, wenn das Ergebnis der Augenzahlen größer als 6 ist.



Bevor ihr würfelt: Findet ihr, dass das Spiel fair ist? Begründet eure Entscheidung!

Würfelt 30-mal mit zwei Würfeln und addiert die Augenzahlen!
Macht dazu eine Strichliste auf der Rückseite!

Abbildung 42: Vorderseite des Arbeitsblattes 4/1 des Projektes

Arbeitsblatt 4/1: Würfel

Name: _____

Strichliste des Spielers:

Summe der Augenzahlen	Strichliste
1-6	

Strichliste der Bank:

Summe der Augenzahlen	Strichliste
7-12	



Gibt es einen eindeutigen Gewinner?



Woran könnte das liegen?

Abbildung 43: Rückseite des Arbeitsblattes 4/1 des Projektes

3. Reflexionsphase

Im abschließenden Gespräch werden alle neuen Erkenntnisse noch einmal besprochen und den Kindern mitgeteilt. Durch das selbstständige Arbeiten soll ihnen klar geworden sein, dass Augensummen wie 6, 7 oder 8 recht häufig, 2 und 12 jedoch eher weniger wahrscheinlich gewürfelt werden. Die Ergebnisse der Kinder, die sich durch die Strichlisten ergeben haben, können unter anderem dazu verwendet werden, die Erkenntnisse zu begründen. Dabei bietet sich an, die unterschiedliche Anzahl der Kombinationsmöglichkeiten zu besprechen, um eine

Beziehung zu den Erkenntnissen in der zweiten Unterrichtseinheit herzustellen. Dadurch soll ihnen klar werden, warum bei dem in dieser Einheit durchgeführten Spiel in den meisten Fällen die Bank gewonnen hat.

In dem Zusammenhang kann auch eine Vorschau auf die folgende Unterrichtseinheit stattfinden, indem die Lehrperson fragt, ob beim Würfeln mit zwei Würfeln Ähnlichkeiten in der Wahrscheinlichkeit zum Glücksrad erkennbar sind. Weiters kann der Bezug zur ersten Unterrichtseinheit noch einmal hergestellt werden. Die Lehrperson kann fragen, ob es beim Spiel „Mensch ärgere dich nicht“ sinnvoller wäre, mit der Augenzahl 1 auf das Spielfeld zu dürfen. Dadurch müssten die Kinder auf die Erkenntnisse der letzten Einheiten zurückgreifen und über die unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten erneut reflektieren (vgl. PIKAS, 2019, S. 10ff).

5.11.5 Vierte Unterrichtseinheit zum Thema *Wahrscheinlichkeit*

In der vierten Unterrichtseinheit beschäftigen sich die Grundschulkinder mit den Wahrscheinlichkeiten beim Glücksrad. Dabei übertragen sie ihre bisherigen Erkenntnisse mit den Würfeln auf das Glücksrad. Weiters machen die Schülerinnen und Schüler verschiedene Wahrscheinlichkeiten der Gewinnregeln ausfindig, um in weiterer Folge auch eigene Glücksräder und dazu passende Gewinnregeln erstellen zu können.

Nun ist wichtig, dass die Kinder die Erfahrungen, die sie in den letzten Einheiten gemacht haben, auf eine neue Situation, nämlich das Glücksrad, übertragen. Ihnen soll bewusst werden, dass Ähnlichkeiten zum Würfeln mit einem oder zwei Würfel(n) hergestellt werden können. In diesem Zusammenhang soll ihnen auch noch einmal klar gemacht werden, dass Glücksspiele nicht einfach nur hingenommen, sondern ohne Weiteres hinterfragt werden sollen. Beim Glücksrad spielt nicht nur das Glücksrad an sich eine entscheidende Rolle beim Gewinn, sondern auch die Gewinnregeln (vgl. PIKAS, 2019, S. 35).

1. *Reflexion über die Erfahrungen aus der vorigen Stunde und Einführung des Glücksrads*

Anfangs soll die Lehrperson die Kinder zum Thema der Stunde hinführen, indem sie einen kurzen Rückblick auf die vorige Stunde gibt und ihnen das Glücksrad für diese Einheit vorstellt. Als Veranschaulichung kann ein Glücksrad dienen, das die Lehrperson bereitstellt. Dieses ist sowohl mit Farben als auch mit Zahlen von eins bis acht gekennzeichnet. Wenn dieses gedreht wird, müssen daher zwei Aspekte gleichzeitig beachtet werden. Weiters verwendet die Lehrperson Gewinnkarten mit Gewinnregeln darauf. Um gemeinsam in das Thema einzusteigen, bietet es sich an, eine Gewinnregel auszuwählen, mit der das Glücksrad getestet wird. Der Zusammenhang zwischen dem Glücksrad und der Gewinnregel und die Begriffe *Gewinnfeld* und *Gewinn-* bzw. *Verlustregel* werden durch das mehrmalige Drehen der Schülerinnen und

Schüler an dem Glücksrad eingeführt. Vor dem Drehen können Vermutungen seitens der Kinder aufgestellt werden, auf welches Feld gedreht wird. Dadurch kann bereits eigenständig eine Gewinnregel formuliert werden. Durch den gemeinsamen Einstieg in das Thema und das konkrete Ausprobieren der Gewinnregeln an einem Glücksrad werden vor allem die leistungsschwächeren Kinder unterstützt.

Nach der kurzen Einführung werden die Arbeitsblätter 5 und 6 erklärt. Beim Arbeitsblatt 5 sollen die Kinder zu zweit zehnmal am Glücksrad drehen und notieren, wer gewinnt. Aufgrund dieser Beobachtungen sollen sie sich anschließend entscheiden, mit welcher Gewinnkarte sie am ehesten gewinnen beziehungsweise verlieren würden. Beim Arbeitsblatt 6 müssen die Schülerinnen und Schüler im Anschluss alleine eigene Glücksräder und dazugehörige Gewinnregeln erstellen.

2. Arbeitsphase

Das Arbeiten an den Arbeitsblättern erfolgt in Partnerarbeit. Pro Gruppe wird ein Glücksrad und pro Kind jeweils eine Gewinnkarte verteilt. Dadurch, dass jedes Kind eine eigene Gewinnkarte bekommt, können sich die Schülerinnen und Schüler mit dieser identifizieren und sind womöglich motivierter und neugieriger, die Fairness des Spiels zu beurteilen. Des Weiteren sollen sie über die Wahrscheinlichkeiten der Gewinnregeln diskutieren. Zwei Gewinnkarten haben immer dieselbe Wahrscheinlichkeit. Dadurch kann festgestellt werden, ob die Schülerinnen und Schüler verstanden haben, dass nicht die Anzahl der vorkommenden Zahlen und Farben relevant ist, sondern das flächenmäßige Vorkommen dieser eine bedeutende Rolle für das Gewinnen spielt. Im Folgenden werden die Arbeitsblätter 5 und 5/1 dargestellt.

Arbeitsblatt 5: Glücksrad

Name: _____



Überlegt zu zweit, mit welcher Gewinnkarte man am ehesten gewinnen kann! Warum ist das so?

Welche Gewinnkarte würdet ihr nicht nehmen? Warum?

Ordnet die Karten nach Gewinnchancen und verbindet!

Gewinnkarte 1:

Du gewinnst bei
1, 2 oder 3.

Gewinnkarte 2:

Du gewinnst bei
rot.

Gewinnkarte 3:

Du gewinnst bei
weiß und blau.

Gewinnkarte 4:

Du gewinnst bei
2, 4, 6 oder 8.

am
wahrscheinlichsten

gleich
wahrscheinlich

am
unwahrscheinlichsten

Abbildung 44: Arbeitsblatt 5 des Projektes

Arbeitsblatt 5/1: Glücksrad

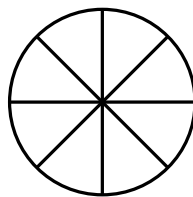
Name: _____



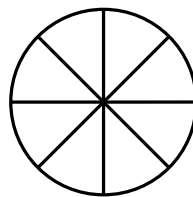
Färbt oder beschriftet die Glücksräder so, dass ihr bei der darüber stehenden Gewinnregel am wahrscheinlichsten gewinnt!

Gewinnkarte 1:

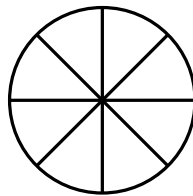
Du gewinnst bei 1,
2 oder 3.

Gewinnkarte 2:

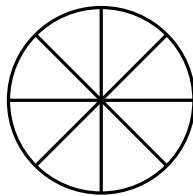
Du gewinnst bei
rot.

Gewinnkarte 3:

Du gewinnst bei
weiß und blau.

Gewinnkarte 4:

Du gewinnst bei 2,
4, 6 oder 8.



Probiert die Regeln mit eurem Glücksrad aus!

Abbildung 45: Arbeitsblatt 5/1 des Projektes

Dadurch, dass die Aufgabenstellungen sehr offen formuliert sind, können die Kinder selbst entscheiden, wie sie zu einer Lösung kommen. Genauso sind mehrere Lösungsmöglichkeiten erwünscht, die unterschiedliche Zugänge erlauben. Vor allem beim Arbeitsblatt 5 steht das Begründen erneut im Vordergrund. Die Kinder sind also immer dazu angehalten, nicht bloß Vermutungen anzustellen, sondern diese auch durch konkrete Aussagen zu begründen.

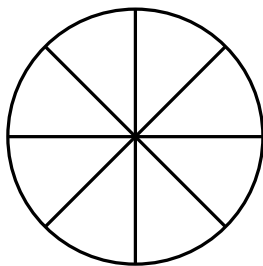
Durch das Erstellen eigener Glücksräder auf dem Arbeitsblatt 6 wird für die Lehrperson ersichtlich, ob die Kinder die Erkenntnisse der letzten Einheiten auf neue Situationen wie das Glücksrad übertragen können. Dabei wird deutlich, ob sie die Beziehung zwischen dem Anteil der Fläche auf dem Glücksrad und der Wahrscheinlichkeit verstanden haben.

Arbeitsblatt 6: eigene Glücksräder Name: _____

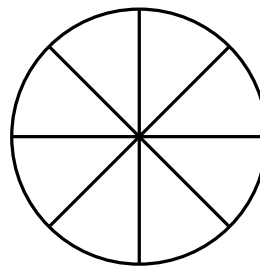


Erfinde nun eigene Glücksräder!

Glücksrad 1:



Glücksrad 2:



Ich gewinne eher, wenn ich ...

weil ...

Ich verliere eher, wenn ich ...

weil ...

Ich gewinne eher, wenn ich ...

weil ...

Ich verliere eher, wenn ich ...

weil ...

Abbildung 46: Arbeitsblatt 6 des Projektes

3. Reflexionsphase

In der abschließenden Reflexionsphase werden die Ergebnisse der Kinder präsentiert. Jede Zweiergruppe stellt ihre Erkenntnisse vor, indem die Kinder vorlesen, was sie sich auf ihrem Arbeitsblatt 5 notiert haben. Dabei soll unter anderem besprochen werden, warum die Gewinnregeln 1 und 3 dieselbe Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn haben.

Auch die selbstständig erstellten Glücksräder werden vorgestellt und anhand eines leeren Glücksrads von der Lehrperson getestet (vgl. PIKAS, 2019, S. 35ff).

6 Resümee

Der Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit liegt darauf, wie mathematisch begabte Schülerinnen und Schüler erkannt und daraufhin optimal gefördert werden können. Abschließend wird nun zusammengefasst, welche Aspekte bei der Diagnose einer mathematischen Begabung beachtet werden müssen und welche Möglichkeiten Lehrpersonen haben, mathematisch begabte Kinder im Unterricht ausreichend zu fördern.

Dafür ist zuallererst notwendig, die Komplexität des Begabungsbegriffs noch einmal zu erläutern. In der Literatur finden sich unterschiedliche Definitionen, die teilweise übereinstimmen und teilweise Unterschiede aufweisen. Grundsätzlich konnte festgestellt werden, dass Autoren wie Bardy (2007), Heller (1996) oder Käpnick (1998) unter einer mathematischen Begabung das Erbringen hoher mathematischer Leistungen verstehen. Im Kapitel 2.2 wurden Fähigkeiten mathematischen Denkens beschrieben, die alle Schülerinnen und Schüler für die Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten benötigen. Darunter fällt beispielsweise das räumliche Vorstellungsvermögen, aber auch die Fähigkeit, Zusammenhänge oder Beziehungen zwischen mathematischen Sachverhalten herzustellen. In der Schule werden jene Fähigkeiten ständig erweitert. Bei begabten Schülerinnen und Schülern sind diese besonders hoch und individuell verschieden ausgeprägt. Demnach zeigt sich eine mathematische Begabung auch nicht bei jedem gleich, sondern kann sehr unterschiedlich sein. Um hohe mathematische Leistungen erbringen zu können, spielt immer auch die Intelligenz eines Kindes eine bedeutende Rolle. Mathematisch begabte Kinder haben zumeist einen höheren Intelligenzquotienten als ihre Mitschülerinnen und Mitschüler, weshalb sie durch ihre Leistungen und Fähigkeiten in der Schule besonders positiv herausstechen.

Um nun jenen Teil der Forschungsfrage beantworten zu können, wie eine mathematische Begabung erkannt werden kann, werden Erkenntnisse aus dem Kapitel 3 herangezogen. Grundsätzlich stellt sich der Zeitpunkt der Diagnose einer mathematischen Begabung im Grundschulalter etwas schwierig dar. Käpnick (1998) und Sprengel (1988) sehen einen zu frühen Befund, Schülerinnen und Schüler für mathematisch begabt zu erklären, einerseits als Nachteil, weil im Anschluss der Schwerpunkt nur noch in der Förderung der mathematischen Begabung liegen würde und die anderen Bereiche dadurch vermutlich benachteiligt werden würden. Andererseits benötigen Schülerinnen und Schüler in der Volksschule einen längeren Zeitraum für die Entfaltung ihrer geistigen Fähigkeiten. Die Fähigkeiten sind im Grundschulalter meist noch nicht so ausgeprägt wie bei Kindern der Sekundarstufe. Genauso sind Volksschulkinder zwar besonders wissbegierig und interessiert, allerdings können ihre Interessen noch nicht eindeutig zugeordnet werden. Sie verändern sich vor allem in den ersten beiden Schulstufen laufend.

Darauf schließen zu können, dass ein Kind der ersten oder zweiten Klasse Volksschule im Bereich der Mathematik besonderes Interesse zeigt, ist schwierig zu beurteilen. Die zu frühe Förderung einer mathematischen Begabung könnte im schlimmsten Fall zu einer einseitigen Persönlichkeitsentwicklung führen. Trotzdem sieht Käpnick (1998) die Diagnose im Grundschulalter nicht als unmöglich. So ist beispielsweise auch in der Entwicklungspsychologie verankert, dass sich die allgemeine Intelligenz eines Menschen bereits im Alter von elf Jahren festigt (vgl. Orter, 2008, S. 280). Daher ist er der Meinung, dass mathematische Begabungen in der dritten beziehungsweise vierten Klasse Volksschule erkannt und in weiterer Folge auch gefördert werden können. Trotzdem muss darauf geachtet werden, dass die Begabung nicht nur einseitig unterstützt wird, sondern auch andere Bereiche wie Deutsch oder naturwissenschaftliche Themen ihren Platz finden. Van der Meer (1986) schreibt dazu weiters, dass begabte Grundschülerinnen und Grundschüler häufig bei offenen Aufgabenstellungen hohe Leistungen zeigen. Sie sind in der Lage, Beziehungen herzustellen und ihr Wissen auf unbekannte Situationen zu übertragen. In diesem Zusammenhang beschreibt auch Käpnick (1998) Merkmale, die mathematisch begabte Kinder meist aufweisen. Dazu zählen beispielsweise eine hohe geistige Aktivität, Neugierde, ein hohes Konzentrationsvermögen oder Selbstständigkeit. Diese Merkmale sind jedoch bei jedem anders ausgeprägt, weshalb Lehrpersonen immer individuell auf jedes Kind eingehen müssen.

Ich denke, dass die Diagnose einer Begabung und im Spezifischeren jene einer mathematischen Begabung in der Volksschule wichtig ist, da Lehrerinnen und Lehrer bei der Förderung darauf achten können, dass diese nicht nur einseitig erfolgt. Die Förderung sollte in allen Gegenständen stattfinden. In Mathematik kann dies beispielsweise durch offene Aufgabenstellungen wie Problemlöseaufgaben stattfinden, bei denen Kinder die Möglichkeit haben, unterschiedliche Lösungsansätze zu entwickeln und darüber zu reflektieren. Weiters bin ich nicht zuletzt wegen Käpnicks (1998) Darstellung der Meinung, dass Schülerinnen und Schüler erst ab der dritten Schulstufe für mathematisch begabt erklärt werden sollten. Vor allem Kinder der ersten und zweiten Schulstufe entwickeln sich hinsichtlich ihrer Persönlichkeit und ihrer geistigen Fähigkeiten noch stark weiter, weshalb in dieser Zeit erstmals beobachtet werden sollte, in welchen Bereichen sie besonders hohe Leistungen zeigen.

Die Indikatoraufgaben, die in Kapitel 3.4 vorgestellt wurden, können nicht nur als Diagnoseinstrument einer mathematischen Begabung, sondern auch während des Unterrichts eingesetzt werden. Lehrerinnen und Lehrern können solche Aufgabensammlungen im Klassenzimmer in einer *Forscherecke* bereitstellen, an der sich jene Schülerinnen und Schüler bedienen können, die beispielsweise früher mit einem Arbeitsauftrag fertig sind und sich tiefer mit mathematischen Problemen auseinandersetzen wollen.

Im Anschluss an die Diagnose ist eine optimale Förderung der mathematischen Begabung notwendig, um soziale Ausgrenzung und Unterforderung während des Unterrichts zu vermeiden. Dies stellt die Beantwortung des zweiten Teils meiner Forschungsfrage dar, bei der behandelt worden ist, wie mathematisch begabte Schülerinnen und Schüler während des Unterrichts gefördert werden können. Bardy (2007) beschreibt allgemeine und spezielle Ziele, die durch die Förderung einer mathematischen Begabung erreicht werden sollen. Zu den allgemeinen Zielen zählt beispielsweise, dass durch Problemlöseaufgaben mathematische Fähigkeiten entwickelt und gefördert werden. Lehrpersonen sollten den Schülerinnen und Schülern eine Vielfalt an Aufgaben mit mehreren Lösungswegen anbieten, um unterschiedliche Zugangsweisen kennenzulernen und die Kommunikation zwischen den Lernenden zu fördern. Dadurch soll weiters die Fähigkeit der Kreativität angesprochen werden, da die Kinder zum Beispiel dazu angeleitet werden, mehrere Lösungen auf unterschiedliche Art und Weise zu finden. Spezielle Ziele, welche die begabten Schülerinnen und Schüler erreichen sollen, sind beispielsweise der Einsatz von heuristischen Hilfsmitteln oder die Fähigkeit des Argumentierens und Begründens. Die Erreichung dieser Ziele ermöglicht allen Kindern eine tiefere Auseinandersetzung mit der Mathematik.

Als Förderungsmaßnahmen werden hier *Integration* und *Segregation*, *Differenzierung* und *Individualisierung* sowie *Akzeleration* und *Enrichment* vorgeschlagen. Ich persönlich denke, dass die Form von Integration wesentlich sinnvoller für die sozialen Kompetenzen eines mathematisch begabten Kindes ist, da es dadurch in der Klasse bleiben kann und durch differenzierte und individuell angepasste Aufgabenstellungen ausreichend gefördert wird. So wird es nicht laufend von seinen Mitschülerinnen und Mitschülern getrennt. Integration ist wichtig, um den mathematisch Begabten Lerninhalte anzubieten, an denen sie interessiert sind, unterschiedliche Lösungswege zuzulassen und den Kindern die Möglichkeit zu bieten, sich darüber auszutauschen und diese miteinander zu vergleichen. Differenzierung und Individualisierung erscheinen mir in jeder Klasse als besonders wichtige Aspekte. Denn jedes Kind ist verschieden, weshalb die Lehrerin oder der Lehrer demnach auch unterschiedlich auf Bedürfnisse und Interessen des Kindes eingehen sollte. Diese Förderungsmaßnahmen können umso besser gesetzt werden, je mehr Erfahrungen, Zugangsweisen und Lösungswege der Kinder als Ressourcen erkannt werden. Genauso ist die Umsetzung in offenen Lernsituationen etwas einfacher, da die Lehrperson besser auf das jeweilige Kind eingehen kann. Akzeleration und Enrichment sind Formen von Individualisierung. Bei einem mathematisch begabten Kind die Form von Akzeleration anzuwenden, sehe ich etwas schwierig, denn das Überspringen einer Schulstufe oder die frühere Einschulung sind für das Kind nur dann sinnvoll, wenn es in allen Unterrichts-

gegenständen hervorragende Leistungen aufzeigt. Die höhere Schulstufe ist nicht an die Lernbedürfnisse und die Leistungsfähigkeit angepasst, weshalb das Kind eventuell Probleme beim Lernen haben könnte. Ich persönlich denke, dass mathematisch begabte Schülerinnen und Schüler auch in ihrer Schulstufe die Möglichkeit der Entfaltung haben. Die Lehrperson kann mit diesen Kindern beispielsweise den Lehrstoff schneller durchnehmen und sie können sich in weiterer Folge mit für sie interessanten, mathematischen Themen tiefer auseinandersetzen. Dadurch wären sie mit Gleichaltrigen zusammen und würden nicht aus ihrem gewohnten Umfeld gerissen werden, wo sie ihre Freundinnen und Freunde haben. Durch die Form von Enrichment werden ungewohnte Denkprozesse und Zugänge zu mathematischen Problemen genehmigt. Daher erscheint mir die Mischung beider Förderungsmaßnahmen als sinnvoll. Die Maßnahmen muss die Lehrperson jedoch immer individuell an das Kind anpassen.

Eine konkrete Möglichkeit, mathematisch begabte Kinder während des Regelunterrichts zu fördern, wäre, alle Aufgabenstellungen für eine Klasse in offene Aufgabenformate umzuwandeln, sodass begabte Kinder vertiefend in gemeinsam erarbeitete Bereiche eintauchen und ihre Denkprozesse weiterentwickelt werden können. Wichtig ist dabei, dass die angesprochenen Ziele nach Bardy (2007) berücksichtigt werden und die Aufgabenbeispiele abwechslungsreich gestaltet sind. Dabei bieten sich zum Beispiel auch Projekte wie das Projekt zum Thema *Wahrscheinlichkeit* an, das in der vorliegenden Arbeit beschrieben wurde und mit der gesamten Klasse durchgeführt wird. So können mathematisch begabte Kinder ihre Fähigkeiten erweitern und leistungsschwache Schülerinnen und Schüler werden durch spezielle Differenzierungsmaßnahmen unterstützt. Neben speziellen Aufgaben haben Lehrpersonen auch die Möglichkeit, mit ihrer Klasse außerschulische Lernorte zu besuchen, wie beispielsweise das *Haus der Mathematik*, oder an Wettbewerben wie *Känguru der Mathematik* teilzunehmen. Dabei können alle Schülerinnen und Schüler einer Klasse mitmachen. Die Experimentierfreude und der Spaß, sich mit mathematischen Problemen durch handelnde Erfahrungen auseinanderzusetzen, kommen dabei nicht zu kurz.

Für meine zukünftige Berufslaufbahn als Lehrerin konnte ich durch diese Arbeit neue Erkenntnisse gewinnen. Ich denke, dass der richtige Zeitpunkt für die Diagnose einer mathematischen Begabung besonders schwierig ist, als Lehrperson jedoch darauf geachtet werden kann, dass die Schülerinnen und Schüler in jedem Unterrichtsfach ausreichend gefördert werden. Bei der Förderung ist, meiner Meinung nach, wichtig, dass die mathematisch begabten Kinder die meiste Zeit in der Klasse differenzierte Aufgaben lösen können und nur für zusätzliche Förderprogramme, in denen andere mathematische Themen behandelt werden, von einer Tutorin oder einem Tutor unterrichtet werden. Genauso können Lehrpersonen Erziehungsberechtig-

ten freiwillige Förderprogramme für begabte Kinder anbieten, die beispielsweise an Pädagogischen Hochschulen stattfinden. Um die Begabten während des Unterrichts zu fördern, können alle Aufgabenbeispiele in offene Formate verwandelt werden, um die Denkprozesse der Kinder zu unterstützen. So lernen sie, mathematische Probleme zu hinterfragen, zu argumentieren, zu begründen, zu lösen und darüber zu reflektieren.

7 Literaturverzeichnis

- Anderson, J. R. (2013). *Kognitive Psychologie*. Heidelberg: Springer VS.
- Bardy, P. (2007). *Mathematisch begabte Grundschulkinder. Diagnostik und Förderung*. Berlin Heidelberg: Springer Spektrum.
- Bauersfeld, H. & Kießwetter, K. (2006). *Wie fördert man mathematisch besonders befähigte Kinder?* Offenburg: Mildenberger Verlag.
- Beer, U. & Erl, W. (1972). *Entfaltung der Kreativität*. Tübingen.
- Begić, A. (2002). *Niklas – einfach genial?!*. In: Peter-Koop, A. & Sorger, P. (2002). *Mathematisch begabte Grundschulkinder als schulische Herausforderung*. Offenburg: Mildenberger Verlag.
- Besuden, H. (1999). *Raumvorstellung und Geometrieverständnis*. In: Mathematische Unterrichtspraxis 20, Heft 3.
- BIFIE (2010). *Themenheft Mathematik „Kommunizieren“*. Volksschule Grundstufe I+II. Graz: Leykam.
- BIFIE (2013). *Themenheft Mathematik „Problemlösen“*. Volksschule Grundstufe I+II. Graz: Leykam.
- Birx, E., Wagner, H. & Wiczerkowski, W. (1987). *Die Erfassung mathematischer Begabung über Talentsuchen*. In: Zeitschrift für Differentielle und Diagnostische Psychologie, 8. Jg., Heft 3.
- Bock, H. & Borneleit, P. (2000). *Logisches Denken – Einige Gedanken über ein altes Ziel und seine Verfolgung im Mathematikunterricht*. In: Flade/ Herget.
- Böhmer, J. Peter (2006). *Mathe-Ass. Materialien für leistungsstarke Kinder in der Grundschule*. Donauwörth: Auer.
- Bruder, R. (2001). *Kreativ sein wollen, dürfen und können*. In: mathematik lehren, Nr. 115.
- Bruder, R. & Müller, H. (1990). *Heuristisches Arbeiten im Mathematikunterricht beim komplexen Anwenden mathematischen Wissens und Könnens*. In: Mathematik in der Schule 28. Heft 12.
- Grundsatzterlass zur Begabungs- und Begabtenförderung. Rundschreiben Nr. 25 vom 6. November 2017.
- Cropley, A., Mc Leord, J. & Dehn, D. (1988). *Begabung und Begabungsförderung (Entwicklungschancen für alle Kinder!)*. Heidelberg: Asanger.
- Devlin, K. (2003). *Das Mathe-Gen*. München: dtv.
- Dörner, D. & Van der Meer, E. (1995). *Das Gedächtnis*. Göttingen: Hogrefe.
- Dreyfus, T. (2002). *Was gilt im Mathematikunterricht als Beweis?* In: Beiträge zum Mathematikunterricht.
- Drösser, Ch. (2006). *Das bittere Ende der Logik*. In: Die Zeit. Nr. 18.

- Fast, M. (2005). *Mathematische Leistung und intellektuelle Fähigkeiten. Integrative Begabungsförderung bei Sechs- bis Zehnjährigen*. Wien: Lit.
- Fuchs, M. (2006). *Vorgehensweisen mathematisch potentiell begabter Dritt- und Viertklässler beim Problemlösen*. Berlin: Lit.
- Gardner, H. (1991). *Abschied vom IQ. Die Rahmen-Theorie der vielfachen Intelligenzen*. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.
- Glaeser-Zikuda, M. & Mayring, P. (2003). *A qualitative oriented approach to learning emotions at school*. In P. Mayring & C. V. Rhoeneck (Eds.). *Learning emotions: The influence of affective factors on classroom learning*. Frankfurt: Lang.
- Geretschläger, R. (2019). *Über den Wettbewerb*. Abgerufen am 08.04.2020 von <https://www.kaenguru.at/verein.html>
- Grosser, N. & Koth, M. (2014). *Alles klar! Übungsheft. Knobelaufgaben*. Linz: Veritas.
- Grundschulunterricht Mathematik (2019). *Problemlösestrategien*. Oldenbourg: Pädagogische Zeitschriften.
- Hartkopf, W. (1964). *Umriß eines systematischen Aufbaus der heuristischen Methodentheorie*. In: Der Mathematikunterricht (MU) 10. Heft 1.
- Hasemann, K. & Mirwald, E. (2008). *Daten, Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit*. In G. Walther, M. van den Heuvel-Panhuizen, D. Granzer & O. Köller (Hrsg.). *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik Konkret*. Berlin: Cornelsen.
- Hauer-Typelt, P. (2011). *Angemessene Grundvorstellung zu Wahrscheinlichkeit und Zufall entwickeln – Vorschläge für den Stochastikunterricht*. In: Didaktikhefte der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft. Heft 43. Abgerufen am 29.06.2020 von <http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2009%20Band%2042/VortragHauerTypelt.pdf>
- Haus der Mathematik (2020). *Haus der Mathematik für Schulklassen*. Abgerufen am 08.04.2020 von <http://hausdermathematik.at/besuche/schulklassen/>
- Haus der Mathematik (2019). *Aufgabensammlungen. Ecolier 2019*. Abgerufen am 20.04.2020 von https://www.kaenguru.at/files/problems/2019_Ecolier.pdf
- Heller, K.A. (1996). *Begabtenförderung – (k)ein Thema in der Grundschule?* In: Grundschule 28, Heft 5.
- Heymann, H. W. (2013). *Allgemeinbildung und Mathematik*. Weinheim/Basel: Beltz.
- Jürgens, E. (1999). *Brauchen wir ein pädagogisches Leistungsverständnis?* In: Pädagogik, 51. Jg., Heft 1.
- Käpnick, F. (1998). *Mathematisch begabte Kinder*. Frankfurt am Main: Peter Lang GmbH.
- Kossakowski, A. (1987). *Psychische Entwicklung der Persönlichkeit im Kindes- und Jugendalter*. Berlin: Volk und Wissen.
- König, H. (1992). *Einige für den Mathematikunterricht bedeutsame heuristische Vorgehensweisen*. In: Der Mathematikunterricht (MU) 10. Heft 3.

- König, H. (2005). *Welchen Beitrag können Grundschulen zur Förderung mathematisch begabter Schüler leisten?* In: Mathematikinformation (Zeitschrift der Begabtenförderung Mathematik). Nr. 43.
- Mandl, H. & Friedrich, H. F. (1992). *Lern- und Denkstrategien*. Göttingen: Hogrefe.
- Mittelstraß, J. (2004). *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie*. Stuttgart: J.B. Metzler.
- Mönks, F. J. & Ypenburg, I. H. (2005). *Unser Kind ist hochbegabt: ein Leitfaden für Eltern und Lehrer*. München: E. Reinhardt.
- Neubert, B. (2009). *Zufall und Wahrscheinlichkeit in der Grundschule*. Zuletzt abgerufen am 12.02.2020 von https://www.schulportal-thueringen.de/get-data/8b7b00c6-9dd1-4ce5-8bdb-110ea25ec66b/200903_neubert_2.pdf
- Oerter, R. & Dreher, M. (2008). *Entwicklung des Problemlösens*. In: Oerter, H. & Montada, L. *Entwicklungspsychologie*. Weinheim: Beltz.
- Oerter, R. & Montada, L. (2008). *Entwicklungspsychologie*. Weinheim: Beltz.
- Österreichischer Lehrplan der Volksschule in der Fassung der Bekanntmachung von 1963 (BGBl. Nr. 134/1963), der zuletzt am 13. September 2012 (BGBl. II Nr. 303/2012) geändert worden ist.
- Piaget, J. & Inhelder, B. (1980). *Von der Logik des Kindes zur Logik des Heranwachsenden. Essay über die Ausformung der formalen operativen Strukturen*. Stuttgart.
- PIKAS (2019). *Haus 7: Gute Aufgaben. „Daten, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten“*. Zuletzt abgerufen am 10.02.2020 von https://pikas.dzlm.de/pikasfiles/uploads/upload/Material/gesamtes_Material/Paketpiko_H1_Gluecksspiele.pdf
- Pollmer, K. (1992). *Intellektuelle Hochbegabung und mathematische Spezialbegabung – Theoretische Auffassungen, empirische Befunde, Konsequenzen für die Förderung*. In: Urban, K. *Begabungen entwickeln, erkennen und fördern*. Hannover: Universität Hannover.
- Pólya, G. (1964). *Die Heuristik. Versuch einer vernünftigen Zielsetzung*. In: *Der Mathematikunterricht (MU)* 10. Heft 1.
- Pólya, G. (1967). *Schule des Denkens*. Tübingen.
- Renzulli, J. S. (1993). *Ein praktisches System zur Identifizierung hochbegabter und talentierter Schüler*. In: *Psychologie in Erziehung und Unterricht*, Heft 40. München: Reinhard.
- Roedell, W. C., Jackson, N. E. & Robinson, H. B. (2000). *Hochbegabung in der Kindheit. Besonders begabte Kinder im Vor- und Grundschulalter*. Heidelberg: Asanger.
- Rost, D. H. & Hanses, P. (1994). *Besonders begabt: besonders glücklich, besonders zufrieden? (Zum Selbstkonzept hoch- und durchschnittlich begabter Kinder)*. In: *Zeitschrift für Psychologie*. Berlin.
- Roth, E. (1998). *Intelligenz. Grundlagen und neuere Forschung*. Stuttgart: W. Kohlhammer.
- Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Braunschweig: Schroedel

- Schröder, H. (1997). *Leistung in der Schule. Begründung – Forderung – Beurteilung*. München: Arndt.
- Sprengel, H.-J. (1988). *Der mathematisch begabte Schüler und seine Förderung in der DDR*. Potsdam.
- Stadtschulrat für Wien (2007). *Individualisierung und Differenzierung als didaktischer Grundsatz*. Abgerufen am 13.04.2020 von http://www.schulentwicklung.at/joomla/images/stories/allgemein/ind_diff.pdf
- Stern, E. (1992). *Die spontane Strategieentwicklung in der Arithmetik*. In: Mandl, H. & Friedrich, H. F. Lern- und Denkstrategien. Göttingen: Hogrefe.
- Sternberg, R. J. (1990). *What Constitutes a "Good" Definition of Giftedness?* In: Journal for the Education of the Gifted.
- Van der Meer, E. (1985). *Mathematisch-naturwissenschaftliche Hochbegabung*. In: Zeitschrift für Psychologie, Band 193, Heft 3.
- Van der Meer, E. (1986). *Experimentelle Begabungsforschung*. In: Diagnostik geistiger Leistungen (Forschungsberichte der Sektion Psychologie der Humboldt-Universität). Berlin: Verlag der Wissenschaften.
- Walther, G. (2004). *Gute Aufgaben*. Kiel: IPN. Abgerufen am 24.05.2020 von <https://www.schulportal-thueringen.de/get-data/494ed93b-1bb0-4a48-bafd-cdc99baf52a2/Mathe1.pdf>
- Wessels, M. G. (1990). *Kognitive Psychologie*. Basel: Reinhardt.
- Weth, T. (1999). *Kreativität im Mathematikunterricht. Begriffsbildung als kreatives Tun*. Hildesheim/ Berlin.
- Wittmann, E. Ch. & Müller, G. (1988). *Wann ist ein Beweis ein Beweis?* In: Bender, P (Hrsg.). *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter*. Berlin.
- Wölpert, H. (1983). *Materialien zur Entwicklung von Raumvorstellung im Mathematikunterricht*. In: Der Mathematikunterricht (MU) 29, Heft 6.

8 Anhang

Arbeitsblatt 1: Würfel

Name: _____



Würfle 30-mal und mach eine Strichliste!

Augenzahl	Strichliste	Gesamtergebnis
		
		
		
		
		
		



Was fällt dir auf, wenn du die Ergebnisse miteinander vergleichst?



Begründe deine Entdeckungen!

Arbeitsblatt 2: Würfel

Name: _____



Wie würde die Strichliste aussehen, wenn du mit zwei, drei oder mehreren Würfeln würfeln würdest?

[illegible]

Arbeitsblatt 3: Würfelaugensummen Name: _____



Finde alle Möglichkeiten für die Summe von zwei Würfelzahlen und notiere deine Überlegungen!



Warum bist du dir sicher, dass du alle Möglichkeiten gefunden hast? Begründe deine Entscheidung!



Wer gewinnt?

Spielregel

Würfelt mit zwei Würfeln und addiert die Augenzahlen!

Gewinnregel

Der Spieler gewinnt, wenn das Ergebnis der Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 10, 11 oder 12 ist.

Die Bank gewinnt, wenn das Ergebnis der Augenzahlen 5, 6, 7, 8 oder 9 ist.



Bevor ihr würfelt: Findet ihr, dass das Spiel fair ist? Begründet eure Entscheidung!



Würfelt 30-mal mit zwei Würfeln und addiert die Augenzahlen!
Macht dazu auf der Rückseite eine Strichliste!

Strichliste des Spielers:

Ergebnis der Augenzahlen	Strichliste
1	
2	
3	
4	
10	
11	
12	

Strichliste der Bank:

Ergebnis der Augenzahlen	Strichliste
5	
6	
7	
8	
9	

Wer hat gewonnen? _____

Stimmt eure Vermutung? _____



Wer gewinnt?

Spielregel

Würfelt mit zwei Würfeln und addiert die Augenzahlen!

Gewinnregel

Der Spieler gewinnt, wenn das Ergebnis der Augenzahlen kleiner als oder genau gleich 6 ist.

Die Bank gewinnt, wenn das Ergebnis der Augenzahlen größer als 6 ist.



Bevor ihr würfelt: Findet ihr, dass das Spiel fair ist? Begründet eure Entscheidung!



Würfelt 30-mal mit zwei Würfeln und addiert die Augenzahlen!
Macht dazu eine Strichliste auf der Rückseite!

Strichliste des Spielers:

Summe der Augenzahlen	Strichliste
1-6	

Strichliste der Bank:

Summe der Augenzahlen	Strichliste
7-12	



Gibt es einen eindeutigen Gewinner?



Woran könnte das liegen?



Überlegt zu zweit, mit welcher Gewinnkarte man am ehesten gewinnen kann! Warum ist das so?

Welche Gewinnkarte würdet ihr nicht nehmen? Warum?

Ordnet die Karten nach Gewinnchancen und verbindet!

Gewinnkarte 1:

Du gewinnst bei
1, 2 oder 3.

Gewinnkarte 2:

Du gewinnst bei
rot.

Gewinnkarte 3:

Du gewinnst bei
weiß und blau.

Gewinnkarte 4:

Du gewinnst bei
2, 4, 6 oder 8.

am
wahrscheinlichsten

gleich
wahrscheinlich

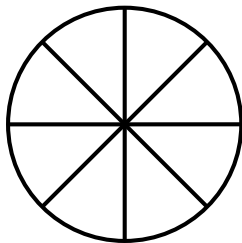
am
unwahrscheinlichsten



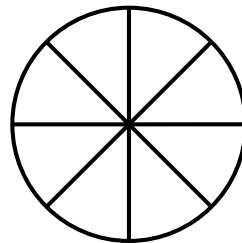
Färbt oder beschriftet die Glücksräder so, dass ihr bei der darüber stehenden Gewinnregel am wahrscheinlichsten gewinnt!

Gewinnkarte 1:

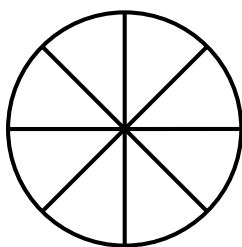
Du gewinnst bei 1,
2 oder 3.

Gewinnkarte 2:

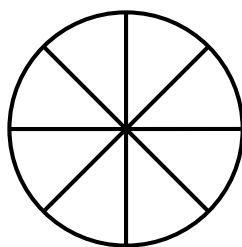
Du gewinnst bei
rot.

Gewinnkarte 3:

Du gewinnst bei
weiß und blau.

Gewinnkarte 4:

Du gewinnst bei 2,
4, 6 oder 8.

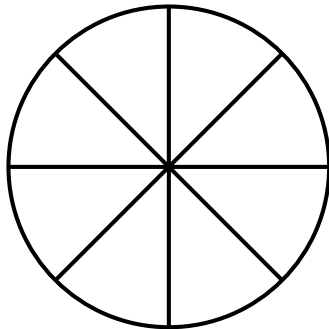


Probiert die Regeln mit eurem Glücksrad aus!



Erfinde nun eigene Glücksräder!

Glücksrad 1:



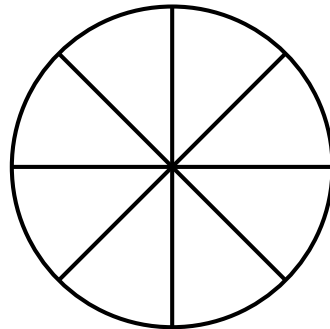
Ich gewinne eher, wenn ich ...

weil ...

Ich verliere eher, wenn ich ...

weil ...

Glücksrad 2:



Ich gewinne eher, wenn ich ...

weil ...

Ich verliere eher, wenn ich ...

weil ...

Eigenständigkeitserklärung

„Ich erkläre, dass ich die vorliegende Masterarbeit selbst verfasst habe und dass ich dazu keine anderen als die angeführten Hilfsmittel verwendet habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten und nicht veröffentlichten Publikationen entnommen sind, sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit wurde in gleicher oder ähnlicher Form weder im In- noch im Ausland in irgendeiner Form als Prüfungsarbeit vorgelegt.“

Wolfsthal, 17.06.2020, 